

基于 CR 列式的无应力状态 控制法基本方程*

卫少阳

(长安大学 公路学院, 西安 710064)

摘要: 简述了无应力状态控制法的基本理论,并且介绍了 CR 列式的基本原理.基于 CR 列式分析方法,分析了传统增量法和无应力状态控制法参考标架的不同,并在此基础上推导了无应力状态控制法的基本方程,得到的公式表明:采用 CR 列式分析方法来剖析无应力状态控制法的基本方程,是完全可行的,并且力学概念清晰.最后以实例分析了无应力状态控制法的运用.

关键词: 无应力状态控制法; 增量法; 全量法; 参考位形; CR 列式

中图分类号: U445.4; O342 **文献标志码:** A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2014.12.007

引 言

当今,桥梁施工中大多采用分阶段施工方法.分阶段施工桥梁一个比较大的难题是桥梁施工过程和由这一过程形成的成桥状态结构分析问题,经典力学的分析方法是在已经形成的整体结构上施加外荷载,计算结构的内力和变形.而分阶段施工的一个典型特征是,结构不是一次成形,后一个施工阶段发生在已经变形的前一个施工阶段已经施工完成的结构上.所以在计算施工中间状态和成桥状态结构内力和变形时,一般采用增量法.这种方法对于连续梁来说是可行的,但对于大跨径的斜拉桥这种恒载成桥状态指定并且分阶段形成的结构,采用上述方法就遇到了很大的困难^[1].在这种背景下,无应力状态控制法便被提了出来.

无应力状态控制法是一种解决分阶段施工桥梁结构计算的理论方法.它首次建立了分阶段施工桥梁的力学平衡方程,第一次从理论上阐明了桥梁构件单元的无应力状态量是影响分阶段施工桥梁内力和线形的本质因素,从而可以应用构件单元的无应力状态量控制分阶段施工桥梁施工过程和成桥状态的内力、位移.

至今该方法已经在国内外 30 多座桥梁上成功运用,取得了良好的效果.尤其是在斜拉桥的设计与施工监控中,无应力状态控制法取得了很好效果.

本文的主要任务是以 CR 列式计算方法剖析无应力状态控制法的实质,以使无应力状态控制法的概念更加清晰,更广泛地用于桥梁施工设计与监控中.

1 无应力状态控制法基本理论

在弹性范围内,一次成形结构的平衡方程,也就是传统的力学平衡方程为

* 收稿日期: 2014-06-23; 修订日期: 2014-08-06

作者简介: 卫少阳(1990—),男,河南人,硕士生(E-mail: 1041982393@qq.com).

$$\mathbf{K}_0 \boldsymbol{\delta} = \mathbf{P}. \quad (1)$$

文献[1]运用势能驻值原理,不考虑材料非线性,以平面梁单元为例推导出了分阶段成形结构的平衡方程,得到下式:

$$\mathbf{K} \boldsymbol{\delta}' = \mathbf{P} + \mathbf{L}_0. \quad (2)$$

上式即为无应力状态控制法基本方程.

式(1)及式(2)均参考单元局部坐标系,其中 \mathbf{K}_0 与 \mathbf{K} 分别为

$$\mathbf{K}_0 = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l_0} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l_0} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l_0^3} & \frac{6EI}{l_0^2} & 0 & -\frac{12EI}{l_0^3} & \frac{6EI}{l_0^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l_0^2} & \frac{4EI}{l_0} & 0 & -\frac{6EI}{l_0^2} & \frac{2EI}{l_0} \\ -\frac{EA}{l_0} & 0 & 0 & \frac{EA}{l_0} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l_0^3} & -\frac{6EI}{l_0^2} & 0 & \frac{12EI}{l_0^3} & -\frac{6EI}{l_0^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l_0^2} & \frac{2EI}{l_0} & 0 & -\frac{6EI}{l_0^2} & \frac{4EI}{l_0} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}.$$

比较这两个刚度矩阵可以发现两点区别:

1) 其中 \mathbf{K}_0 中的 l_0 是单元在无应力长度,而 \mathbf{K} 中 l 是单元安装时的单元长度,具体细节见第3节.

2) 式(2)等式右边多一个广义荷载项 \mathbf{L}_0 . \mathbf{L}_0 是由于结构分阶段形成,由后续单元安装在已有变形的结构上产生的,它是与无应力状态量(单元无应力长度和无应力曲率)有关的荷载列阵,见文献[1].

2 CR 列式的基本思想

CR 列式即所谓的共转坐标法,该方法最初由 Wempner^[2] 提出,后经 Belytschko 等^[3] 发展,主要应用于显式动力分析中,在静力分析中也很有优势,而静力过程只不过是动力过程的一个

特殊情况。

根据刚体运动理论,初始作用有一个平衡力系的物体,在单元刚体运动过程中,应变域、应力域和节点力随单元发生旋转,不产生附加应变,力系在刚体转动后保持平衡,即理论上刚体运动不引起力的增量,刚体运动对结构势能没有贡献^[4-5]。

对于离散为许多单元的杆系结构,虽然结构经历大位移、大转动,但能引起单元变形的位移通常是很小的,意味着单个单元的位移绝大部分是刚体位移。对于绝大部分单元来说位移主要是由于附近单元对其的牵引作用造成的,所以在求解单元抗力时,如果能从单元整体位移中精确扣除单元刚体平动和转动,那么就可以得到引起单元变形的那部分运动(自然变形),这样仅在自然变形^[6]上应用有限单元法的位移近似,无疑可以精确计算单元的抗力。

为了能精确扣除单元刚体平动和转动从而得到单元的自然变形,在每个单元上附加一个坐标系,而这个坐标系的原点始终位于单元 i 节点, x 轴始终沿单元 i, j 节点的连线方向,坐标系随着单元平动和转动,用这个坐标系把单元的刚体平动和转动与引起单元变形的那部分运动区别开,称这个坐标系为随转坐标系,或者称为 CR 坐标系^[7]。

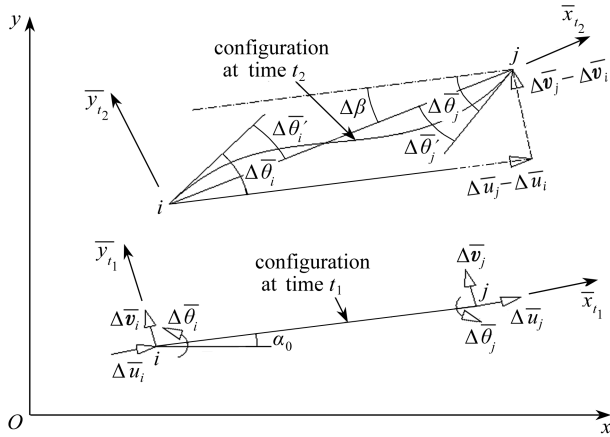


图 1 CR 列式坐标系下梁的变形

Fig.1 Deformation of the beam under the CR coordinate system

图 1 为结构坐标系 Oxy 中一个平面梁单元在 $t_1 \rightarrow t_2$ 时段的位置和形状。 t_1 时刻单元已经处于平衡状态,构形和内力已知。为清晰起见,其中 t_1 时刻未示出单元变形, ${}^2ix\bar{y}$ 是 t_2 时刻 CR 坐标系。

在 $t_1 \rightarrow t_2$ 时间段内,节点位移可用结构坐标系下位移分量 $\Delta \mathbf{e}_{t_1} = [\Delta u_i, \Delta v_i, \Delta \theta_i, \Delta u_j, \Delta v_j, \Delta \theta_j]^e$ 表示。经过 t_1 时刻的坐标转换矩阵 \mathbf{T} 转换到 t_1 时刻随转坐标系下的位移增量 $\bar{\Delta} \mathbf{e}_{t_1} = [\Delta \bar{u}_i, \Delta \bar{v}_i, \Delta \bar{\theta}_i, \Delta \bar{u}_j, \Delta \bar{v}_j, \Delta \bar{\theta}_j]^e$ 。

于是 $t_1 \rightarrow t_2$ 内,在 t_2 时刻 CR 坐标系 ${}^2ix\bar{y}$ 下,单元的自然变形分量 $\bar{\Delta} \mathbf{e}_{t_1}^e$ 可以表示为

$$\begin{cases} \Delta \bar{u}'_i = 0, \Delta \bar{v}'_i = 0, \Delta \bar{\theta}'_i = \Delta \bar{\theta}_i - \Delta \beta, \\ \Delta \bar{u}'_j = {}^2l - {}^1l \approx \sqrt{({}^1l + \Delta \bar{u}_j - \Delta \bar{u}_i)^2 + (\Delta \bar{v}_j - \Delta \bar{v}_i)^2} - {}^1l, \\ \Delta \bar{v}'_j = 0, \Delta \bar{\theta}'_j = \Delta \bar{\theta}_j - \Delta \beta, \end{cases} \quad (3)$$

其中 $\Delta \beta = \arctan((\Delta \bar{v}_j - \Delta \bar{v}_i)/({}^1l + \Delta \bar{u}_j - \Delta \bar{u}_i))$, l 代表单元长度, 1l 是已知量。

此时,单元在 t_2 时刻的 CR 坐标系中的有效节点位移减小为 3 个,表示为

$$\bar{\Delta}'_{t_1} = [0, 0, \Delta\bar{\theta}'_i, \Delta\bar{u}'_j, 0, \Delta\bar{\theta}'_j]^T.$$

在 CR 坐标系下,从 t_1 到 t_2 时间段内,单元抗力增量可以表示为

$$\Delta\tilde{F}^e = K_{t_2} \bar{\Delta}'_{t_1}, \quad (4)$$

其中

$$K_{t_2} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{{}^1l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{{}^1l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{{}^1l^3} & \frac{6EI}{{}^1l^2} & 0 & -\frac{12EI}{{}^1l^3} & \frac{6EI}{{}^1l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{{}^1l^2} & \frac{4EI}{{}^1l} & 0 & -\frac{6EI}{{}^1l^2} & \frac{2EI}{{}^1l} \\ -\frac{EA}{{}^1l} & 0 & 0 & \frac{EA}{{}^1l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{{}^1l^3} & -\frac{6EI}{{}^1l^2} & 0 & \frac{12EI}{{}^1l^3} & -\frac{6EI}{{}^1l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{{}^1l^2} & \frac{2EI}{{}^1l} & 0 & -\frac{6EI}{{}^1l^2} & \frac{4EI}{{}^1l} \end{bmatrix}.$$

在上式中 K_{t_2} 是以 t_2 时刻为参考构形的,但由于 CR 坐标精确地扣除了单元的刚体转动和平动,得到了单元的自然变形,所以分离出来的自然变形属于小变形.基于小变形,在建立 K_{t_2} 时,忽略 t_1 到 t_2 时间段单元积分域的变化,即可以采用 t_1 时刻的积分域,这是足够精确的.

由上述可以看出使用 CR 列式分离出的自然变形是对单元内力的精确反应,换言之自然变形与结构所受的外荷载是一一对应的.

3 基于 CR 列式分析无应力状态控制法的基本方程

3.1 计算的参考标架选择

1) 在图 2 中,如果 t_1 时刻单元构形是已知的,从单元的视角来看,即在 t_1 时刻 CR 坐标系内可以知道单元坐标方位角、单元内力以及单元长度.若 $t_1 \sim t_2$ 时段的荷载增量 $\Delta\tilde{P}^e$ 已知,则可以根据式(4) 求出 $t_1 \sim t_2$ 时段内位移的增量.这是基于增量法的思想,会产生累计误差,并且事先需要知道 t_1 时刻各个单元的内力与位移,这需要按照结构的形成顺序进行正装计算,然后进行累加才能求得.

上述方法即传统的分阶段施工桥梁分析方法,通过将分阶段计算的结构内力和位移的数值累加建立起过程状态和最终状态之间的联系,解决过程状态温度和荷载变化的效果较差^[1].

2) 根据自然变形与结构所受的外荷载一一对应的思想,可以把计算 t_2 状态自然变形的参考标架,定在每个计算单元的无应力构形上,而对于无应力构形,一般根据合理成桥状态确定.这样就能直接建立起安装时刻到 t_2 时刻的计算关系,从而进行全量的计算.

3.2 采用 CR 坐标系计算方法推导无应力状态控制法的基本方程

设单元无应力长度为 l_0 ,梁端的无应力曲率以梁端转角来表示, i 段转角为 θ_{α_i} , j 端为 θ_{α_j} .以单元安装时刻为 0 时刻,单元安装时长度为 l ,梁端转角为 0.从 0 时刻到 t_2 时刻,相对于 0 时刻,在单元局部坐标系下,单元节点位移为 $\bar{\Delta}'_0 = [\bar{u}_i, \bar{v}_i, \bar{\theta}_i, \bar{u}_j, \bar{v}_j, \bar{\theta}_j]^T$.

于是在 $0 \rightarrow t_2$ 时刻内,在单元 CR 坐标系 $i\bar{x}\bar{y}$ 下,单元的自然变形分量 $\bar{\Delta}'_0$ 可以表示为

$$\begin{cases} \Delta \bar{u}'_i = 0, \\ \Delta \bar{v}'_i = 0, \\ \Delta \bar{\theta}'_i = \bar{\theta}_i - \Delta \beta - \theta_{0i}, \\ \Delta \bar{u}'_j = {}^{t_2}l - l_0 \approx \sqrt{(l + \bar{u}_j - \bar{u}_i)^2 + (\bar{v}_j - \bar{v}_i)^2} - l_0, \\ \Delta \bar{v}'_j = 0, \\ \Delta \bar{\theta}'_j = \bar{\theta}_j - \Delta \beta - \theta_{0j}. \end{cases} \quad (5)$$

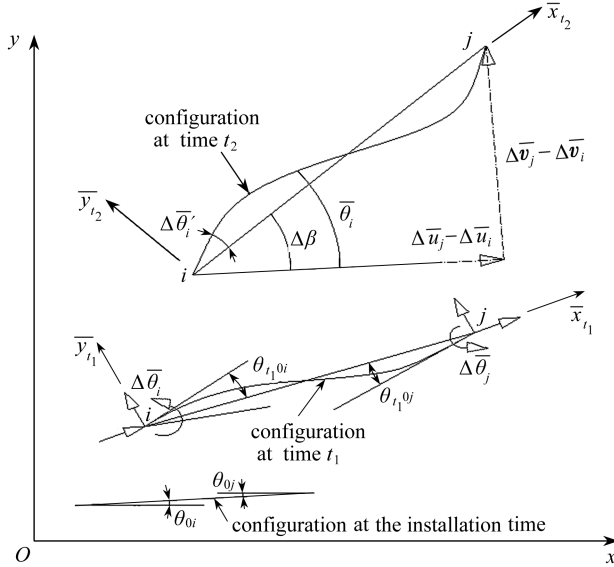


图2 安装时刻起算 CR 列式坐标系下梁的变形

Fig.2 Deformation of the beam under the CR coordinate system calculated from the installation time

基于小变形的假设可以有以下简化:

$$\begin{aligned} \Delta \bar{u}'_j = {}^{t_2}l - l &\approx \sqrt{(l + \bar{u}_j - \bar{u}_i)^2 + (\bar{v}_j - \bar{v}_i)^2} - l_0 \approx \\ &\sqrt{(l + \bar{u}_j - \bar{u}_i)^2} - l_0 \approx l + \bar{u}_j - \bar{u}_i - l_0, \\ \Delta \beta &\approx \tan(\Delta \beta) = \frac{\bar{v}_j - \bar{v}_i}{l + \bar{u}_j - \bar{u}_i} \approx \frac{\bar{v}_j - \bar{v}_i}{l}, \end{aligned}$$

这里对 $\Delta \beta$ 的处理是近似的,只有当小位移的情况才具有良好的精度.则式(5)可以写成

$$\begin{cases} \Delta \bar{u}'_i = 0, \Delta \bar{v}'_i = 0, \Delta \bar{\theta}'_i = \bar{\theta}_i - \frac{\bar{v}_j - \bar{v}_i}{l} - \theta_{0i}, \\ \Delta \bar{u}'_j = l + \bar{u}_j - \bar{u}_i - l_0, \Delta \bar{v}'_j = 0, \Delta \bar{\theta}'_j = \bar{\theta}_j - \frac{\bar{v}_j - \bar{v}_i}{l} - \theta_{0j}, \end{cases} \quad (6)$$

则可得

$$\tilde{\mathbf{F}}^e = \mathbf{K}_{t_2} \bar{\mathbf{\Delta}}_0^e. \quad (7)$$

与式(4)相同,基于小变形,在建立 \mathbf{K}_{t_2} 时,忽略0到 t_2 时间段单元积分域的变化,即可以采用0时刻的积分域,这是足够精确的,那么可得

$$\tilde{\mathbf{F}}^e = \mathbf{K}_{t_2} \bar{\mathbf{\Delta}}_0^e =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{\theta}_i - \frac{\bar{v}_j - \bar{v}_i}{l} - \theta_{oi} \\ l + \bar{u}_j - \bar{u}_i - l_0 \\ 0 \\ \bar{\theta}_j - \frac{\bar{v}_j - \bar{v}_i}{l} - \theta_{oj} \end{bmatrix} = \\
 \mathbf{K}_0 \bar{\Delta}_0^e + \begin{bmatrix} -\frac{EA}{l}(l-l_0) \\ -\frac{6EI}{l^2}\theta_{oi} - \frac{6EI}{l^2}\theta_{oj} \\ -\frac{4EI}{l}\theta_{oi} - \frac{2EI}{l}\theta_{oj} \\ \frac{EA}{l}(l-l_0) \\ \frac{6EI}{l^2}\theta_{oi} + \frac{6EI}{l^2}\theta_{oj} \\ \frac{4EI}{l}\theta_{oj} + \frac{2EI}{l}\theta_{oi} \end{bmatrix}.$$

从而可得

$$\tilde{\mathbf{F}}^e + \tilde{\mathbf{L}}_0 = \mathbf{K}_0 \bar{\Delta}_0^e, \quad (8)$$

其中

$$\tilde{\mathbf{L}}_0 = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l}(l-l_0) \\ \frac{6EI}{l^2}(\theta_{oi} + \theta_{oj}) \\ \frac{4EI}{l}\theta_{oi} + \frac{2EI}{l}\theta_{oj} \\ -\frac{EA}{l}(l-l_0) \\ -\frac{6EI}{l^2}(\theta_{oi} + \theta_{oj}) \\ -\frac{4EI}{l}\theta_{oj} - \frac{2EI}{l}\theta_{oi} \end{bmatrix},$$

$\tilde{\mathbf{F}}^e$ 是单元从安装到 t_2 时刻的抗力全量。

设 i 端的无应力曲率为 K_{i0} , j 端的无应力曲率为 K_{j0} , 则根据梁端转角和曲率之间的关系可以得到

$$\tilde{\mathbf{L}}_0 = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l}(l-l_0) \\ \frac{6EI}{l^2}(\theta_{0i} + \theta_{0j}) \\ \frac{4EI}{l}\theta_{0i} + \frac{2EI}{l}\theta_{0j} \\ -\frac{EA}{l}(l-l_0) \\ -\frac{6EI}{l^2}(\theta_{0i} + \theta_{0j}) \\ -\frac{4EI}{l}\theta_{0i} - \frac{2EI}{l}\theta_{0j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l}(l-l_0) \\ \frac{EI(K_{j0} - K_{i0})}{l} \\ -K_{i0} \\ -\frac{EA}{l}(l-l_0) \\ -\frac{EI(K_{j0} - K_{i0})}{l} \\ -K_{j0} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

设安装时刻单元坐标转换矩阵为 \mathbf{T} , 取 $s = \sin \alpha$, $c = \cos \alpha$, 则对式(8)做如下变换:

$$\mathbf{T}\tilde{\mathbf{F}}^e + \mathbf{T}\tilde{\mathbf{L}}_0 = \mathbf{TK}_0\mathbf{T}\Delta^e.$$

在整体坐标系下式(8)可以转换成下式:

$$\mathbf{F}^e + \mathbf{L}_0 = \mathbf{D}\Delta^e, \quad (10)$$

\mathbf{F}^e 以等效节点外力 \mathbf{P}^e 代替则可得到

$$\mathbf{P}^e + \mathbf{L}_0 = \mathbf{D}\Delta^e, \quad (11)$$

从而可得

$$\mathbf{L}_0 = \mathbf{T}\tilde{\mathbf{L}}_0 = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l}(l-l_0)c + (K_{i0} - K_{j0})\frac{EI(K_{j0} - K_{i0})}{l}s \\ \frac{EA}{l}(l-l_0)s - (K_{i0} - K_{j0})\frac{EI(K_{j0} - K_{i0})}{l}c \\ -K_{i0}EI \\ -\frac{EA}{l}(l-l_0)c - (K_{i0} - K_{j0})\frac{EI(K_{j0} - K_{i0})}{l}s \\ -\frac{EA}{l}(l-l_0)s + (K_{i0} - K_{j0})\frac{EI(K_{j0} - K_{i0})}{l}c \\ -K_{j0}EI \end{bmatrix}, \quad (12)$$

其中 $\mathbf{D} = \mathbf{TK}_0\mathbf{T}$, \mathbf{L}_0 和 \mathbf{D} 与文献[1]利用能量法推导的结果完全相同.

3.3 实例分析

为了简要地说明问题, 本文以一斜拉桥施工为例, 以 CR 坐标系的角度来剖析无应力状态控制法的基本原理.

如图 3 所示的斜拉桥, 有两个施工阶段.

要求得阶段 2 完成后结构的位移及内力, 以其中某一单元为例分析:

1) 传统增量方法计算:

阶段 1:

$\mathbf{K}_1\Delta\delta_1 = \mathbf{P}_1$, 则阶段 1 完成后结构位移分量为 $\delta_1 = \Delta\delta_1$, 抗力分量 $\mathbf{F}_1 = \Delta\mathbf{F}_1$;

阶段 2:

$K_1 \Delta \delta_2 = P_2$, 则阶段 2 完成后结构的位移为 $\delta_2 = \delta_1 + \Delta \delta_2$, 抗力分量 $F_2 = F_1 + \Delta F_2$.

可以看出如果要得到阶段 2 完成后结构的位移及内力必须正装计算, 并且事先要知道阶段 1 完成后各个单元的内力与位移, 这需要按照结构的形成顺序进行正装计算, 然后进行累加才能求得, 会产生累积误差。

2) 以安装时刻的无应力构形为参考构形, 即根据式(11)可以得到

$$P_1 + P_2 + L_0 = K_1 \Delta,$$

上式中, Δ 是以安装构形为参考标架的结构单元位移, 并且有 $\Delta = \delta_2$. 所以可以得到阶段 2 完成后结构整体的位移, 不需要正装计算。

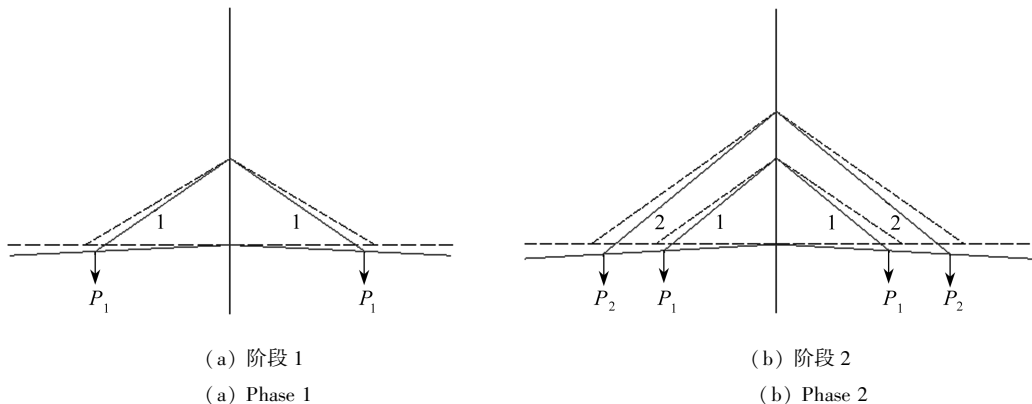


图 3 分阶段施工的斜拉桥

Fig.3 The phased construction of a cable-stayed bridge

这里应注意的一点是: 单元的安装构形并不一定等于最终参考的无应力构形, 这一点对于缆索承重桥梁来说比较明显. 对于斜拉桥来说, 各个单元的无应力构形需要由合理成桥状态来确定, 所以在施工时需要张拉拉索, 调整拉索的无应力长度^[1], 以达到合理成桥状态。

4 数值算例验证及分析

图 4 所示平面桁架由两根杆件组成, 设材料处于线弹性工作阶段, 弹性模量 $E = 20\ 000$ MPa, 杆件横截面积 $A = 4\ \text{cm}^2$, 在 C 点施加一集中力 F , F 分为 10 个阶段施加, 依次为 0.1 kN, 0.3 kN, 0.6 kN, 1 kN, 1.5 kN, 2 kN, 2.5 kN, 3 kN, 3.5 kN, 5.5 kN, 最后 F 达到 20 kN. 分别按简单增量法、一阶自校正增量法及本文方法计算 C 点在每个阶段的竖向位移以及杆件轴力, 结果见表 1 和表 2. 其中, S 代表简单增量法, C 代表一阶自校正增量法。

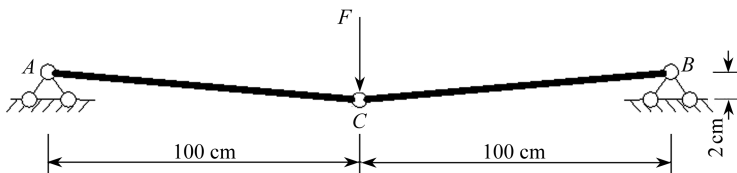


图 4 二杆平面桁架

Fig.4 A 2-bar plane truss

表 1 C 点竖向位移

Table 1 The vertical displacement at point C

phase	load increment F/kN	the vertical displacement at point C δ/cm				error $\delta_e/\%$		
		theoretical value	the value of this paper	the value of S	the value of C	the error of this paper	the error of S	the error of C
1	-0.1	-0.141 2	-0.150 8	-0.156 3	-0.156 4	6.80	10.73	10.76
2	-0.3	-0.457 0	-0.515 3	-0.587 6	-0.570 5	12.76	28.57	24.83
3	-0.6	-0.886 9	-0.995 8	-1.246 7	-1.086 2	12.27	40.57	22.46
4	-1	-1.377 9	-1.515 2	-1.955 5	-1.587 7	9.96	41.92	15.23
5	-1.5	-1.902 3	-2.058 1	-2.643 1	-2.133 0	8.19	38.94	12.13
6	-2	-2.423 7	-2.580 4	-3.276 1	-2.621 1	6.47	35.17	8.15
7	-2.5	-2.931 6	-3.088 7	-3.863 0	-3.129 7	5.36	31.77	6.76
8	-3	-3.423 6	-3.578 1	-4.413 3	-3.593 9	4.51	28.91	4.97
9	-3.5	-3.910 0	-4.052 1	-4.934 2	-4.064 6	3.63	26.19	3.95
10	-5.5	-4.518 3	-4.746 2	-5.617 3	-4.762 1	5.04	24.32	5.40

表 2 杆件轴向力

Table 2 The axial force of the bar

phase	load increment F/kN	the bar axial force N/kN				error $N_e/\%$		
		theoretical value	the value of this paper	the value of S	the value of C	the value of this paper	the value of S	the value of C
1	-0.1	-2.335 7	-2.500 5	-2.599 3	-2.596 7	7.05	11.28	11.17
2	-0.3	-8.142 4	-9.301 2	-10.766 1	-10.423 4	14.23	32.22	28.01
3	-0.6	-17.327 6	-19.884 5	-26.147 9	-22.083 8	14.76	50.90	27.45
4	-1	-29.621 3	-33.395 3	-46.550 1	-35.462 7	12.74	57.15	19.72
5	-1.5	-44.879 5	-49.815 1	-70.173 0	-52.288 4	11.00	56.36	16.51
6	-2	-62.225 9	-67.821 4	-95.232 5	-69.360 6	8.99	53.04	11.47
7	-2.5	-81.207 9	-87.419 7	-121.356 8	-89.167 9	7.65	49.44	9.80
8	-3	-101.556 9	-108.223 1	-148.323 2	-109.046 9	6.56	46.05	7.38
9	-3.5	-123.094 8	-130.175 2	-176.066 7	-130.956 9	5.75	43.03	6.39
10	-5.5	-153.740 5	-165.534 4	-215.714 2	-166.662 3	7.67	40.31	8.40

该例的计算结果表明,采用本文方法即无应力状态控制法的基本方程计算得到的位移和内力精度明显高于简单增量法和一阶自校正增量法,并且在每个阶段,采用本文方法得到的是位移全量和内力全量,不需要进行累加。

5 结 语

无应力状态控制法是我国首先提出的先进桥梁设计与施工控制方法,在国际上领先,在国内外 30 多座桥梁上成功运用,取得了很好的效果,体现了该方法的优越性。

本文基于 CR 列式讨论了传统的增量计算方法和无应力状态控制法的参考标架,采用 CR 坐标系计算方法推导了无应力状态控制法的基本方程,得出的计算公式与文献[1]利用能量法推导的结果完全相同,并且本文用数值算例证明了无应力状态控制法的精度相比增量法的优越性。

能量方法是最本质的方法,可以清晰地得到无应力状态控制法的基本方程.本文采用 CR

坐标系计算方法,以新的思路得到无应力状态控制法的基本方程,有两方面的意义:

1) 从理论上进一步证明了无应力状态控制法的基本方程;

2) 证明了可以从 CR 坐标系角度来理解无应力状态控制法,以便无应力状态法的概念更加清晰,更广泛地用于施工设计与监控中。

但值得重视的是,本文在采用 CR 坐标系计算方法推导无应力状态控制法基本方程过程中,式(5)对 $\Delta\beta$ 的处理是近似的,只有当小位移的情况才具有良好的精度,从而可以得出文献[1]得到的无应力状态控制法基本方程成立的条件是在小变形、小转动的条件假设下,并没有考虑几何非线性的影响,这对于跨径不大的斜拉桥来说是可以满足要求的。不过,在运用无应力状态控制法进行结构计算过程中,如果计算过程中进行坐标迁移和迭代计算,考虑几何非线性,那么无应力状态控制法将适用于大跨径的斜拉桥。

参考文献(References):

- [1] 秦顺全. 分阶段施工桥梁的无应力状态控制法[J]. 桥梁建设, 2008(1): 8-14. (QIN Shun-quan. Unstressed state control method for bridges constructed in stages[J]. *Bridge Construction*, 2008(1): 8-14. (in Chinese))
- [2] Wempner G. Finite elements, finite rotations and small strains of flexible shells[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1969, 5(2): 117-153.
- [3] Belytschko T, Hsieh B J. Non-linear transient finite element analysis with convected co-ordinates[J]. *International Journal of Numerical Methods and Engineering*, 1973, 7(3): 255-271.
- [4] Argyris J H, Balmer H, Doltsinis J St, Dunne P C, Haase M, Kleiber M, Malejannakis G A, Mlejnek H P, Müller M, Scharpf D W. Finite element method—the natural approach[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics Engineering*, 1979, 17/18: 1-106.
- [5] Lea L J, Yang Y B. Effects of rigid body and stretching on nonlinear analysis of trusses[J]. *Journal of Structural Engineering*, 1990, 116(10): 2582-2598.
- [6] Gattass M, Abel J F. Equilibrium considerations of the updated Lagrangian formulation of beam-columns with natural concepts[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1987, 24(11): 2119-2141.
- [7] 唐茂林. 大跨度悬索桥空间几何非线性分析及软件开发[D]. 博士学位论文. 成都: 西南交通大学, 2003. (TANG Mao-lin. The space nonlinear analysis and software development of a long-span suspension bridge[D]. PhD Thesis. Chengdu: Southwest Jiaotong University, 2003. (in Chinese))
- [8] 秦顺全. 桥梁施工控制——无应力状态理论与实践[M]. 北京: 人民交通出版社, 2006. (QIN Shun-quan. *The Theory and Practice of Bridge Construction Control—Unstressed State Control Method*[M]. Beijing: China Communications Press, 2006. (in Chinese))
- [9] 朱慈勉. 计算结构力学[M]. 北京: 科学出版社, 2009. (ZHU Ci-mian. *Computational Structural Mechanics*[M]. Beijing: Science Press, 2009. (in Chinese))
- [10] 谢贻权, 何福保. 弹性和塑性力学中的有限元法[M]. 北京: 机械工业出版社, 1983. (XIE Yi-quan, HE Fu-bao. *The Finite Element Method of Elastic and Plastic Mechanics*[M]. Beijing: Mechanical Industry Press, 1983. (in Chinese))

Basic Equations of the Unstressed State Control Method Based on Co-Rotational Formulation

WEI Shao-yang

(*School of Highway, Chang'an University, Xi'an 710064, P.R.China*)

Abstract: The basic theory of unstressed state control method was addressed through introduction of the principle of co-rotational formulation. Based on the co-rotational formulation analysis, the differences of the reference frame between the traditional incremental method and the unstressed state control method were discussed, and the basic equations of the unstressed state control method were derived. The resulting formulas show that the co-rotational formulation procedure is appropriate for analysis of the basic equations of the unstressed state control method, and the derivation process has a clear mechanics concept. Moreover, the case analysis demonstrates validity and advantage of the co-rotational formulation in application of the unstressed state control method.

Key words: unstressed state control method; incremental method; whole quantity method; reference configuration; co-rotational formulation