

# 基于辛本征空间的线性阻尼 振动系统动力学分析\*

李明武, 赵岩, 钟万勰

(大连理工大学 工程力学系;  
工业装备结构分析国家重点实验室(大连理工大学), 辽宁 大连 116024)

(我刊编委钟万勰来稿)

**摘要:** 对于考虑阻尼项和陀螺项的一般线性动力学振动系统,建立了基于辛本征空间展开求解的一般方法.基于 Rayleigh 商本征值的模式展开方法被广泛应用于复杂结构动力系统振动分析,但对于很多机械系统,由于其不能有效考虑陀螺效应的影响,其适用性却受到很大限制.该文首先讨论了无阻尼系统 Rayleigh 商本征值问题与辛本征值问题的对应关系,表明前者实际可由后者的一种退化形式给出(也即忽略陀螺效应),而后者更具有一般性.在此基础上,进一步基于辛本征空间本征向量展开,推导了同时考虑阻尼和陀螺系统的一般线性动力学系统的有效求解方法.数值算例选取不考虑陀螺效应及考虑陀螺效应的两种线性阻尼振动系统对所提出的方法进行了验证,分析结果表明了该文所建立方法的正确性和有效性.

**关键词:** 阻尼系统; 陀螺项; Rayleigh 商; 辛本征值

**中图分类号:** O322      **文献标志码:** A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2015.01.001

## 引 言

一般的线性振动系统包括惯性、弹性、陀螺与阻尼效应.对于不考虑阻尼与陀螺效应的线性振动系统可以称为非陀螺保守系统<sup>[1]</sup>,有 Rayleigh 商本征值问题.基于 Rayleigh 商本征向量展开,非陀螺保守系统可以实现解耦.Rayleigh 商本征向量展开也常用于阻尼线性系统<sup>[2]</sup>.若阻尼是比例阻尼或者 Rayleigh 阻尼,也可以实现解耦.对于陀螺线性系统,其本征向量一般为复数,且复本征向量的实部与虚部对应实对称矩阵的广义本征值问题<sup>[3]</sup>.在复本征向量的实部与虚部张成的线性空间展开,陀螺系统最终解耦为若干组平面动力系统.

以上的讨论均是建立在一类变量的框架下,也就是 Lagrange 的体系.Hamilton 体系是两类变量的体系,在经典力学中有很重要的地位.陀螺系统的辛求解已经得到很好的解答<sup>[4-6]</sup>.在

\* 收稿日期: 2014-09-17; 修订日期: 2014-11-29

基金项目: 国家自然科学基金(面上项目)(11472067); 国家重点基础研究发展计划(973计划)(2014CB046803)

作者简介: 李明武(1990—),男,湖南浏阳人,硕士生(E-mail: limingwu0601@126.com);  
赵岩(1974—),男,吉林公主岭人,副教授(通讯作者. E-mail: yzhao@dlut.edu.cn);  
钟万勰(1934—),男,浙江德清人,教授,院士(E-mail: zwoffice@dlut.edu.cn).

Hamilton 体系下,陀螺系统的本征值问题归结为 Hamilton 矩阵的辛本征值问题;基于辛本征向量展开,可以实现完全解耦.非陀螺保守系统作为陀螺系统的特例,自然可以在 Hamilton 体系下进行讨论.非陀螺保守系统的 Rayleigh 商本征值问题与辛本征值问题是同一物理问题的不同描述,两者存在的关系还有待进一步确定.关于线性阻尼振动系统在 Hamilton 体系的讨论还不完整.此外,将陀螺系统的辛求解拓展到阻尼陀螺系统,也是有必要的.

本文重新审视了基于 Lagrange 体系下线性振动系统求解与基于 Hamilton 体系下线性振动系统辛求解两种分析体系,探讨了非陀螺保守系统辛本征值问题与 Rayleigh 商本征值问题之间的联系,并通过理论推导得出了 Rayleigh 商本征解与辛本征解的定量关系,也即:1) 对于本征值,辛本征值平方等于 Rayleigh 商本征值的相反值;2) 对于本征向量,辛本征向量矩阵的 4 个分块子矩阵与 Rayleigh 商本征解获得的本征向量矩阵相差一系数变换阵,而其可由辛本征向量矩阵共轭正交归一关系获得.最终可以看到,通常基于 Lagrange 体系下本征向量展开,实际为由基于 Hamilton 体系下本征向量展开的一种退化表达形式.在这些工作基础上,本文进一步基于辛本征空间推导了同时考虑阻尼和陀螺系统的一般线性动力学系统的有效求解方法.数值算例中选取两种典型结构对本文方法的正确性和有效性进行了验证.

## 1 Lagrange 体系下线性振动系统求解

一般的  $n$  维线性振动系统的动力学方程可以写成如下形式:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{G} + \mathbf{C})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f}(t), \quad (1)$$

其中  $\mathbf{M}, \mathbf{G}, \mathbf{C}$  和  $\mathbf{K}$  分别为系统的质量阵、陀螺阵、阻尼阵和刚度阵,  $\mathbf{q}$  与  $\mathbf{f}$  分别为  $n$  维位移向量与激励向量.若不计陀螺效应与阻尼效应,式(1)退化为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f}(t). \quad (2)$$

对于式(2),有特征值问题  $(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M})\mathbf{q} = \mathbf{0}$ , 且有 Rayleigh 商

$$\omega^2 = \min_{\mathbf{q}} [(\mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q}) / (\mathbf{q}^T \mathbf{M} \mathbf{q})], \quad (3)$$

可以求解得到  $n$  个本征解  $\omega_i^2, \mathbf{q}_{\psi, i}$  满足正交归一关系:

$$\boldsymbol{\psi}_q^T \mathbf{M} \boldsymbol{\psi}_q = \mathbf{I}, \quad \boldsymbol{\psi}_q^T \mathbf{K} \boldsymbol{\psi}_q = \boldsymbol{\Lambda}, \quad (4)$$

其中  $\boldsymbol{\psi}_q = [\mathbf{q}_{\psi, 1}, \mathbf{q}_{\psi, 2}, \dots, \mathbf{q}_{\psi, n}]$ ,  $\boldsymbol{\Lambda} = \text{diag}(\omega_i^2)$ .

当忽略陀螺效应时,式(1)将退化为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f}(t). \quad (5)$$

对于式(5)所示的非陀螺阻尼系统,其求解通常采用 Rayleigh 商本征向量展开<sup>[2]</sup>.应用展开定理,即将位移向量表示为 Rayleigh 商本征向量的线性组合

$$\mathbf{q}(t) = \boldsymbol{\psi}_q \cdot \mathbf{c}(t). \quad (6)$$

将式(6)代入式(5),在方程两边左乘  $\boldsymbol{\psi}_q^T$  并注意到正交关系式(4),有

$$\ddot{\mathbf{c}}(t) + \boldsymbol{\psi}_q^T \mathbf{C} \boldsymbol{\psi}_q \dot{\mathbf{c}}(t) + \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{c}(t) = \boldsymbol{\psi}_q^T \cdot \mathbf{f}(t). \quad (7)$$

若阻尼为比例阻尼或者 Rayleigh 阻尼,则式(7)完全解耦.在由式(7)求解得到模态坐标后再利用式(6)即可得到位移向量.

以上是  $n$  维的求解,是一类变量的体系.但还要考虑 Hamilton 系统的  $2n$  维状态空间求解,更具一般性.

## 2 Hamilton 体系下线性振动系统辛求解

### 2.1 陀螺系统辛求解

陀螺系统的辛求解在文献[4-6]中有详细论述,这里给出简要介绍。

对于陀螺系统,如不考虑阻尼效应,式(1)退化为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f}(t). \quad (8)$$

此时,对应于动力学方程(8)的 Lagrange 函数为

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{G} \mathbf{q} - \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} + \mathbf{f}(t)^T \mathbf{q}. \quad (9)$$

应用 Legendre 变换,得到对偶动量:

$$\mathbf{p} = \partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) / \partial \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G} \mathbf{q} / 2. \quad (10)$$

从上式解出  $\dot{\mathbf{q}}$ , 进一步可以定义 Hamilton 函数:

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathbf{p}^T \dot{\mathbf{q}} - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{p}^T \mathbf{D} \mathbf{p} / 2 + \mathbf{p}^T \mathbf{A} \mathbf{q} + \mathbf{q}^T \mathbf{B} \mathbf{q} / 2 - \mathbf{f}(t)^T \mathbf{q}, \quad (11)$$

其中

$$\mathbf{A} = -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{G} / 2, \quad \mathbf{B} = \mathbf{K} + \mathbf{G}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{G} / 4, \quad \mathbf{D} = \mathbf{M}^{-1}. \quad (12)$$

引入状态向量则相应的 Hamilton 正则方程为

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{H} \mathbf{v} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}(t) \end{pmatrix}, \quad (13)$$

其中  $\mathbf{v}$  和  $\mathbf{H}$  分别为状态向量与 Hamilton 矩阵,表达式如下:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{D} \\ -\mathbf{B} & -\mathbf{A}^T \end{bmatrix}. \quad (14)$$

对于式(13),略去载荷项,有 Hamilton 矩阵本征值问题

$$\mathbf{H} \boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\Psi}, \quad \mathbf{v} = \boldsymbol{\Psi} \exp(\boldsymbol{\mu} t). \quad (15)$$

$\mathbf{H}$  阵的  $2n$  个本征值经过适当分组,可以划分为两类:

$$\begin{cases} (\alpha) \mu_i, \operatorname{Re}(\mu_i) < 0 \text{ or } \operatorname{Re}(\mu_i) = 0, \operatorname{Im}(\mu_i) > 0, & i = 1, 2, \dots, n; \\ (\beta) \mu_{n+i}, \mu_{n+i} = -\mu_i. \end{cases} \quad (16)$$

Hamilton 矩阵的本征向量满足共轭辛正交归一关系.如将其排列得到如下辛本征矩阵:

$$\boldsymbol{\Psi} = [\boldsymbol{\psi}_1, \boldsymbol{\psi}_2, \dots, \boldsymbol{\psi}_n; \boldsymbol{\psi}_{n+1}, \boldsymbol{\psi}_{n+2}, \dots, \boldsymbol{\psi}_{2n}]. \quad (17)$$

则有

$$\boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{J} \boldsymbol{\Psi} = \mathbf{J}, \quad (18)$$

其中  $\mathbf{J}$  为单位辛矩阵:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{I}_{n \times n} \\ -\mathbf{I}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} \end{bmatrix}. \quad (19)$$

应用 Hamilton 阵本征向量的展开定理

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n [a_i \boldsymbol{\psi}_i + b_i \boldsymbol{\psi}_{n+i}] = \boldsymbol{\Psi} \mathbf{v}_a, \quad \mathbf{v}_a = [\mathbf{a}^T \quad \mathbf{b}^T]^T, \quad (20)$$

将辛本征矩阵  $\boldsymbol{\Psi}$  写成如下的分块形式:

$$\boldsymbol{\Psi} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{\alpha(n \times n)} & \mathbf{Q}_{\beta(n \times n)} \\ \mathbf{P}_{\alpha(n \times n)} & \mathbf{P}_{\beta(n \times n)} \end{bmatrix}, \quad (21)$$

则式(20)可以改写为

$$\mathbf{q} = \mathbf{Q}_\alpha \mathbf{a} + \mathbf{Q}_\beta \mathbf{b}, \mathbf{p} = \mathbf{P}_\alpha \mathbf{a} + \mathbf{P}_\beta \mathbf{b}. \quad (22)$$

将式(20)代入式(13),左乘  $\mathbf{J}\Psi^T\mathbf{J}$ , 得到

$$\dot{\mathbf{v}}_a = \mathbf{D}_p \mathbf{v}_a - \mathbf{J}\Psi^T\mathbf{J} \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}(t) \end{array} \right\}, \quad (23)$$

其中  $\mathbf{D}_p = \text{diag}[\text{diag}(\mu_i), -\text{diag}(\mu_i)]$ .

注意到  $\mathbf{D}_p$  阵为对角阵,故式(23)完全解耦.通过式(23)求解得到辛空间中的广义坐标后代入式(22)即可得到位移与对偶动量.

## 2.2 非陀螺保守系统辛本征值问题与 Rayleigh 商本征值问题的关系

对于陀螺系统,导出了辛本征值问题(15).注意到本征值以相反数成对出现,其求解也是以对为单位的.关于陀螺系统辛本征值的求解,在文献[4]和文献[7]中有详细的讨论.非陀螺系统作为陀螺系统的特例,自然也存在辛本征值问题.非陀螺保守系统的辛本征值问题与其 Rayleigh 商本征值问题是非陀螺保守系统本征值问题的两种不同表述,自然存在关联.接下来,将建立两种本征值问题的关系.

当  $\mathbf{G} = \mathbf{0}$  时,有  $\mathbf{D} = \mathbf{M}^{-1}, \mathbf{B} = \mathbf{K}, \mathbf{A} = \mathbf{0}$ .为了建立 Rayleigh 商的本征向量矩阵  $\boldsymbol{\psi}_q$  与共轭辛本征向量矩阵  $\boldsymbol{\Psi}$  之间的关系,先考虑某一个 Rayleigh 商的本征向量  $\mathbf{q}_{\psi,i}$ , 有

$$\mathbf{K}\mathbf{q}_{\psi,i} = \omega_i^2 \mathbf{M}\mathbf{q}_{\psi,i}. \quad (24)$$

对应的 Hamilton 矩阵本征值问题为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{M}^{-1} \\ -\mathbf{K} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi}_{q,i} \\ \boldsymbol{\psi}_{p,i} \end{bmatrix} = \mu_i \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi}_{q,i} \\ \boldsymbol{\psi}_{p,i} \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\psi}_{p,i} = \mu_i \mathbf{M}\boldsymbol{\psi}_{q,i}, \mathbf{K}\boldsymbol{\psi}_{q,i} = -\mu_i^2 \mathbf{M}\boldsymbol{\psi}_{q,i}. \quad (25)$$

对比式(24)与(25),可以得到

$$\mu_i^2 = -\omega_i^2 \Rightarrow \mu_i = j\omega_i, \quad (26)$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi}_{q,i} \\ \boldsymbol{\psi}_{p,i} \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{\psi,i} \\ \mu_i \mathbf{M}\mathbf{q}_{\psi,i} \end{bmatrix}, \quad (27)$$

上式中的  $j$  为虚数单位( $j = \sqrt{-1}$ ),常数  $k$  需要由共轭辛本征向量的归一性来确定.共轭辛本征值互为相反数,故由式(25)可以得到  $\boldsymbol{\psi}_i$  的辛共轭本征向量为

$$\boldsymbol{\psi}_{n+i} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\psi}_{q,n+i} \\ \boldsymbol{\psi}_{p,n+i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\psi}_{q,i} \\ -\boldsymbol{\psi}_{p,i} \end{pmatrix}. \quad (28)$$

共轭辛特征向量满足辛正交归一,代入式(27)、(28)有

$$(\boldsymbol{\psi}_i)^T \mathbf{J} (\boldsymbol{\psi}_{n+i}) = -2\mu_i k^2 (\mathbf{q}_{\psi,i})^T \mathbf{M} (\mathbf{q}_{\psi,i}) = -2\mu_i k^2 = 1. \quad (29)$$

因此, Rayleigh 商的本征向量矩阵  $\boldsymbol{\psi}_q$  与共轭辛本征向量矩阵  $\boldsymbol{\Psi}$  之间的关系为

$$\mathbf{Q}_\alpha = \mathbf{Q}_\beta = \boldsymbol{\psi}_q \mathbf{A}_1, \mathbf{P}_\alpha = -\mathbf{P}_\beta = \mathbf{M}\boldsymbol{\psi}_q \mathbf{A}_2, \quad (30)$$

其中

$$\mathbf{A}_1 = \text{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{-2j\omega_i}}\right), \mathbf{A}_2 = \text{diag}\left(\frac{j\omega_i}{\sqrt{-2j\omega_i}}\right). \quad (31)$$

共轭辛本征向量矩阵应该满足辛共轭正交归一性.下面予以检验:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_\alpha & \mathbf{Q}_\beta \\ \mathbf{P}_\alpha & \mathbf{P}_\beta \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_\alpha & \mathbf{Q}_\beta \\ \mathbf{P}_\alpha & \mathbf{P}_\beta \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_\alpha^T \mathbf{P}_\alpha - \mathbf{P}_\alpha^T \mathbf{Q}_\alpha & \mathbf{Q}_\alpha^T \mathbf{P}_\beta - \mathbf{P}_\alpha^T \mathbf{Q}_\beta \\ \mathbf{Q}_\beta^T \mathbf{P}_\alpha - \mathbf{P}_\beta^T \mathbf{Q}_\alpha & \mathbf{Q}_\beta^T \mathbf{P}_\beta - \mathbf{P}_\beta^T \mathbf{Q}_\beta \end{pmatrix}. \quad (32)$$

将式(30)、(31)代入上式:

$$\mathbf{Q}_\alpha^T \mathbf{P}_\alpha - \mathbf{P}_\alpha^T \mathbf{Q}_\alpha = \mathbf{A}_1 \boldsymbol{\psi}_q^T \mathbf{M} \boldsymbol{\psi}_q \mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_2 \boldsymbol{\psi}_q^T \mathbf{M} \boldsymbol{\psi}_q \mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1 = \mathbf{0}, \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_\alpha^T \mathbf{P}_\beta - \mathbf{P}_\beta^T \mathbf{Q}_\alpha &= -\mathbf{A}_1 \boldsymbol{\psi}_q^T \mathbf{M} \boldsymbol{\psi}_q \mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_2 \boldsymbol{\psi}_q^T \mathbf{M} \boldsymbol{\psi}_q \mathbf{A}_1 = \\ &= -\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1 = -2\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 = \mathbf{I}, \end{aligned} \quad (34)$$

$$\mathbf{Q}_\beta^T \mathbf{P}_\alpha - \mathbf{P}_\beta^T \mathbf{Q}_\alpha = -(\mathbf{Q}_\alpha^T \mathbf{P}_\beta - \mathbf{P}_\alpha^T \mathbf{Q}_\beta)^T = -\mathbf{I}, \quad (35)$$

$$\mathbf{Q}_\beta^T \mathbf{P}_\beta - \mathbf{P}_\beta^T \mathbf{Q}_\beta = -\mathbf{A}_1 \boldsymbol{\psi}_q^T \mathbf{M} \boldsymbol{\psi}_q \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2 \boldsymbol{\psi}_q^T \mathbf{M} \boldsymbol{\psi}_q \mathbf{A}_1 = -\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1 = \mathbf{0}. \quad (36)$$

故得到验证。

### 2.3 阻尼(陀螺)系统辛求解

基于陀螺系统的辛本征向量展开,可以计算阻尼陀螺系统的动力响应.非陀螺阻尼系统作为阻尼陀螺系统的特例,可以利用2.2小节得到的辛本征向量作为展开基底,进行辛求解.为了应用展开定理,首先将式(1)改写为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f}(t) - \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}. \quad (37)$$

此时式(13)变为

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{H}\mathbf{v} + \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_c \end{Bmatrix}, \quad (38)$$

其中,  $\mathbf{v}$  与  $\mathbf{H}$  已经在式(14)中给出定义,且  $\mathbf{f}_c = \mathbf{f}(t) - \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}$ . 因此,式(23)在这种情形下应该改写为

$$\dot{\mathbf{v}}_a = \mathbf{D}_p \mathbf{v}_a - \mathbf{J}\boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{J} \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}(t) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\mathbf{q} + \mathbf{D}\mathbf{p}) \end{Bmatrix}. \quad (39)$$

将式(22)代入式(39)得到

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{a}}(t) \\ \dot{\mathbf{b}}(t) \end{Bmatrix} = (\mathbf{D}_p + \hat{\mathbf{C}}) \begin{Bmatrix} \mathbf{a}(t) \\ \mathbf{b}(t) \end{Bmatrix} - \mathbf{J}\boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{J} \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}(t) \end{Bmatrix}, \quad (40)$$

其中

$$\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{J}\boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{J} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}(\mathbf{A}\mathbf{Q}_\alpha + \mathbf{D}\mathbf{P}_\alpha) & \mathbf{C}(\mathbf{A}\mathbf{Q}_\beta + \mathbf{D}\mathbf{P}_\beta) \end{bmatrix}. \quad (41)$$

将式(40)与(23)对比可以看到阻尼的出现使得微分方程的系数矩阵多出了  $\hat{\mathbf{C}}$  部分.下面可以进一步看到,即使阻尼是比例阻尼或者 Rayleigh 阻尼,  $\hat{\mathbf{C}}$  也不是对角矩阵,由此使得式(40)并不完全解耦进而不能直接求得解析解.而注意到式(40)具有一阶微分方程组的标准形式,可以应用精细积分法求解<sup>[8]</sup>.

以上的推导是针对一般的陀螺阻尼系统的,因此也适用于非陀螺的阻尼系统.对于非陀螺阻尼系统  $\mathbf{G} = \mathbf{0}$ ,有  $\mathbf{D} = \mathbf{M}^{-1}$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{K}$ ,  $\mathbf{A} = \mathbf{0}$  且式(30)成立.将式(30)与(21)代入式(41)得到

$$\hat{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \boldsymbol{\psi}_q^T \mathbf{C} \boldsymbol{\psi}_q \mathbf{A}_2 & -\mathbf{A}_1 \boldsymbol{\psi}_q^T \mathbf{C} \boldsymbol{\psi}_q \mathbf{A}_2 \\ -\mathbf{A}_1 \boldsymbol{\psi}_q^T \mathbf{C} \boldsymbol{\psi}_q \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_1 \boldsymbol{\psi}_q^T \mathbf{C} \boldsymbol{\psi}_q \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}. \quad (42)$$

由此可以看到,当阻尼为比例阻尼或者 Rayleigh 阻尼时,虽然  $\hat{\mathbf{C}}$  为分块对角矩阵,但是矩阵整体却不是对角的.

对于非陀螺保守系统,2.2小节指出辛本征值问题与 Rayleigh 商本征值问题之间存在关系.非陀螺阻尼系统振动响应的求解是基于非陀螺保守系统的本征向量.由此可以推测,对于非陀螺阻尼系统,基于 Rayleigh 商本征向量的展开定理与基于辛本征向量的展开定理之间也

应该存在某种联系,基于 Rayleigh 商本征向量的展开定理,有式(6)成立.而基于辛本征向量展开定理,有式(22)成立.将式(30)代入式(22)可以得到

$$\mathbf{q} = \boldsymbol{\psi}_q \boldsymbol{\Lambda}_1 (\mathbf{a} + \mathbf{b}). \quad (43)$$

对比式(6)与(43)可以发现  $\boldsymbol{\Lambda}_1 (\mathbf{a} + \mathbf{b})$  就是状态空间辛矩阵表达的位移  $\mathbf{c}$ ,也体现了单纯位移法积分与状态空间积分的差别.接下来进一步通过动力学方程的等价性来说明  $\mathbf{c} = \boldsymbol{\Lambda}_1 (\mathbf{a} + \mathbf{b})$ .

首先注意到方程(38)等价于

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{A}\mathbf{q} + \mathbf{D}\mathbf{p} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{p}, \quad (44)$$

$$\dot{\mathbf{p}} = -\mathbf{B}\mathbf{q} - \mathbf{A}^T\mathbf{p} + \mathbf{f}_c = -\mathbf{K}\mathbf{q} + \mathbf{f}(t) - \mathbf{C}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{p}. \quad (45)$$

将式(22)代入式(44),得

$$\mathbf{Q}_\alpha \dot{\mathbf{a}} + \mathbf{Q}_\beta \dot{\mathbf{b}} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{P}_\alpha \mathbf{a} + \mathbf{P}_\beta \mathbf{b}). \quad (46)$$

将式(30)代入上式得

$$\boldsymbol{\Lambda}_1 (\dot{\mathbf{a}} + \dot{\mathbf{b}}) = \boldsymbol{\Lambda}_2 (\mathbf{a} - \mathbf{b}). \quad (47)$$

类似地,将式(22)代入式(45)并利用式(30)有

$$\mathbf{M}\boldsymbol{\psi}_q \boldsymbol{\Lambda}_2 (\dot{\mathbf{a}} - \dot{\mathbf{b}}) = -\mathbf{K}\boldsymbol{\psi}_q \boldsymbol{\Lambda}_1 (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{f}(t) - \mathbf{C}\boldsymbol{\psi}_q \boldsymbol{\Lambda}_2 (\mathbf{a} - \mathbf{b}). \quad (48)$$

将式(47)连同其微分  $\boldsymbol{\Lambda}_1 (\ddot{\mathbf{a}} + \ddot{\mathbf{b}}) = \boldsymbol{\Lambda}_2 (\dot{\mathbf{a}} - \dot{\mathbf{b}})$  代入式(48),得到

$$\mathbf{M}\boldsymbol{\psi}_q \boldsymbol{\Lambda}_1 (\ddot{\mathbf{a}} + \ddot{\mathbf{b}}) + \mathbf{C}\boldsymbol{\psi}_q \boldsymbol{\Lambda}_1 (\dot{\mathbf{a}} + \dot{\mathbf{b}}) + \mathbf{K}\boldsymbol{\psi}_q \boldsymbol{\Lambda}_1 (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{f}(t). \quad (49)$$

对上式左乘  $\boldsymbol{\psi}_q^T$  并利用正交关系式(4),有

$$\boldsymbol{\Lambda}_1 (\ddot{\mathbf{a}} + \ddot{\mathbf{b}}) + \boldsymbol{\psi}_q^T \mathbf{C}\boldsymbol{\psi}_q \boldsymbol{\Lambda}_1 (\dot{\mathbf{a}} + \dot{\mathbf{b}}) + \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Lambda}_1 (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \boldsymbol{\psi}_q^T \mathbf{f}(t). \quad (50)$$

对于 Rayleigh 商展开定理,有式(7)成立.对比式(7)和(50)可以看到,确实有  $\mathbf{c} = \boldsymbol{\Lambda}_1 (\mathbf{a} + \mathbf{b})$ .

## 3 算例分析

### 3.1 非陀螺阻尼系统

考虑如图 1 所示的 7 自由度的非陀螺阻尼系统<sup>[9]</sup>:

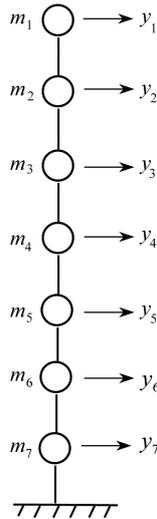


图 1 7 自由度非陀螺阻尼系统

Fig. 1 A 7-DOF damped system without gyroscopic effect

该系统的质量阵、阻尼阵与刚度阵分别为

$$\mathbf{M} = \text{diag}(153, 170, 170, 170, 170, 170, 183), \quad (51)$$

$$C = \begin{bmatrix} 3\ 510 & -5\ 780 & 1\ 830 & 425 & 121 & 29.6 & 8.74 \\ -5\ 780 & 13\ 500 & -8\ 950 & 1\ 090 & 215 & 69.4 & 16.5 \\ 1\ 830 & -8\ 950 & 14\ 500 & -8\ 740 & 1\ 160 & 231 & 78.5 \\ 425 & 1\ 090 & -8\ 740 & 14\ 600 & -8\ 720 & 1\ 170 & 251 \\ 121 & 215 & 1\ 160 & -8\ 720 & 14\ 600 & -8\ 710 & 1\ 230 \\ 29.6 & 69.4 & 231 & 1\ 170 & -8\ 710 & 14\ 600 & -8\ 430 \\ 8.74 & 16.5 & 78.5 & 251 & 1\ 230 & -8\ 430 & 13\ 900 \end{bmatrix}, \quad (52)$$

$$K = 10^4 \cdot \begin{bmatrix} 204 & -350 & 111 & 25.7 & 7.30 & 1.79 & 0.529 \\ -350 & 808 & -542 & 66.2 & 13 & 4.20 & 1 \\ 111 & -542 & 870 & -529 & 70.3 & 14 & 4.75 \\ 25.7 & 66.2 & -529 & 874 & -528 & 70.7 & 15.2 \\ 7.30 & 13 & 70.3 & -528 & 875 & -527 & 74.6 \\ 1.79 & 4.20 & 14 & 70.7 & -527 & 876 & -510 \\ 0.529 & 1 & 4.75 & 15.2 & 74.6 & -510 & 833 \end{bmatrix}. \quad (53)$$

此外,激励向量以及初始条件如下:

$$f(t) = [153\ 170\ 170\ 170\ 170\ 170\ 183]^T f(t); \quad q(0) = \mathbf{0}, \quad \dot{q}(0) = \mathbf{0}, \quad (54)$$

其中

$$f(t) = \begin{cases} \sin(\pi t), & 0 \leq t \leq 1.0, \\ 0, & t \geq 1.0. \end{cases} \quad (55)$$

基于 Rayleigh 商,求得忽略阻尼后该系统的固有频率在表 1 中列出.相应的本征向量矩阵如下:

$$\psi_q = \begin{bmatrix} -0.049\ 9 & -0.040\ 8 & -0.032\ 6 & 0.026\ 1 & -0.020\ 0 & -0.013\ 7 & -0.007\ 0 \\ -0.041\ 2 & -0.010\ 8 & 0.011\ 4 & -0.028\ 6 & 0.037\ 5 & 0.035\ 4 & 0.021\ 4 \\ -0.032\ 4 & 0.016\ 4 & 0.035\ 5 & -0.026\ 1 & -0.006\ 9 & -0.036\ 9 & -0.034\ 8 \\ -0.023\ 7 & 0.034\ 5 & 0.022\ 1 & 0.023\ 6 & -0.036\ 9 & 0.009\ 6 & 0.040\ 4 \\ -0.015\ 5 & 0.039\ 4 & -0.014\ 6 & 0.034\ 8 & 0.024\ 4 & 0.024\ 2 & -0.038\ 6 \\ -0.008\ 4 & 0.031\ 4 & -0.040\ 5 & -0.012\ 8 & 0.023\ 7 & -0.040\ 2 & 0.029\ 0 \\ -0.003\ 1 & 0.015\ 9 & -0.033\ 4 & -0.041\ 4 & -0.037\ 9 & 0.027\ 3 & -0.014\ 1 \end{bmatrix}. \quad (56)$$

表 1 7 自由度非陀螺保守系统各阶固有频率

Table 1 The natural frequencies of the 7-DOF conservative system without gyroscopic effect

$k$	1	2	3	4	5	6	7
$\omega^2$	119.493 7	2 347.625 4	12 679.884 0	33 192.519 7	61 169.955 5	90 163.413 8	112 297.213 9

根据 2.2 小节建立的关系,可得该非陀螺保守系统的辛本征向量矩阵:

$$Q_\alpha = Q_\beta = \begin{bmatrix} -0.007\ 6 - 0.007\ 6i & -0.002\ 9 - 0.002\ 9i & -0.001\ 5 - 0.001\ 5i & 0.001\ 0 + 0.001\ 0i \\ -0.006\ 2 - 0.006\ 2i & -0.000\ 8 - 0.000\ 8i & 0.000\ 5 + 0.000\ 5i & -0.001\ 1 - 0.001\ 1i \\ -0.004\ 9 - 0.004\ 9i & 0.001\ 2 + 0.001\ 2i & 0.001\ 7 + 0.001\ 7i & -0.001\ 0 - 0.001\ 0i \\ -0.003\ 6 - 0.003\ 6i & 0.002\ 5 + 0.002\ 5i & 0.001\ 0 + 0.001\ 0i & 0.000\ 9 + 0.000\ 9i \\ -0.002\ 4 - 0.002\ 4i & 0.002\ 8 + 0.002\ 8i & -0.000\ 7 - 0.000\ 7i & 0.001\ 3 + 0.001\ 3i \\ -0.001\ 3 - 0.001\ 3i & 0.002\ 3 + 0.002\ 3i & -0.001\ 9 - 0.001\ 9i & -0.000\ 5 - 0.000\ 5i \\ -0.000\ 5 - 0.000\ 5i & 0.001\ 1 + 0.001\ 1i & -0.001\ 6 - 0.001\ 6i & -0.001\ 5 - 0.001\ 5i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -0.000\ 6 - 0.000\ 6i & -0.000\ 4 - 0.000\ 4i & -0.000\ 2 - 0.000\ 2i \\ 0.001\ 2 + 0.001\ 2i & 0.001\ 0 + 0.001\ 0i & 0.000\ 6 + 0.000\ 6i \\ -0.000\ 2 - 0.000\ 2i & -0.001\ 1 - 0.001\ 1i & -0.000\ 9 - 0.000\ 9i \\ -0.001\ 2 - 0.001\ 2i & 0.000\ 3 + 0.000\ 3i & 0.001\ 1 + 0.001\ 1i \\ 0.000\ 8 + 0.000\ 8i & 0.000\ 7 + 0.000\ 7i & -0.001\ 1 - 0.001\ 1i \\ 0.000\ 8 + 0.000\ 8i & -0.001\ 2 - 0.001\ 2i & 0.000\ 8 + 0.000\ 8i \\ -0.001\ 2 - 0.001\ 2i & 0.000\ 8 + 0.000\ 8i & -0.000\ 4 - 0.000\ 4i \end{bmatrix}, \quad (57)$$

$$\mathbf{P}_\alpha = -\mathbf{P}_\beta = \begin{bmatrix} 12.628\ 4 - 12.628\ 4i & 21.715\ 3 - 21.715\ 3i \\ 11.589\ 7 - 11.589\ 7i & 6.418\ 0 - 6.418\ 0i \\ 9.113\ 0 - 9.113\ 0i & -9.698\ 2 + 9.698\ 2i \\ 6.673\ 0 - 6.673\ 0i & -20.403\ 7 + 20.403\ 7i \\ 4.367\ 9 - 4.367\ 9i & -23.297\ 7 + 23.297\ 7i \\ 2.368\ 0 - 2.368\ 0i & -18.605\ 0 + 18.605\ 0i \\ 0.930\ 4 - 0.930\ 4i & -10.101\ 3 + 10.101\ 3i \\ 26.474\ 5 - 26.474\ 5i & -26.906\ 4 + 26.906\ 4i \\ -10.260\ 9 + 10.260\ 9i & 32.795\ 5 - 32.795\ 5i \\ -31.989\ 8 + 31.989\ 8i & 29.995\ 1 - 29.995\ 1i \\ -19.909\ 1 + 19.909\ 1i & -27.030\ 8 + 27.030\ 8i \\ 13.125\ 0 - 13.125\ 0i & -39.923\ 0 + 39.923\ 0i \\ 36.519\ 7 - 36.519\ 7i & 14.656\ 4 - 14.656\ 4i \\ 32.413\ 1 - 32.413\ 1i & 51.082\ 3 - 51.082\ 3i \\ 24.096\ 9 - 24.096\ 9i & 18.166\ 9 - 18.166\ 9i & 9.753\ 0 - 9.753\ 0i \\ -50.188\ 6 + 50.188\ 6i & -52.077\ 0 + 52.077\ 0i & -33.291\ 1 + 33.291\ 1i \\ 9.276\ 6 - 9.276\ 6i & 54.409\ 3 - 54.409\ 3i & 54.083\ 1 - 54.083\ 1i \\ 49.347\ 1 - 49.347\ 1i & -14.111\ 8 + 14.111\ 8i & -62.869\ 1 + 62.869\ 1i \\ -32.576\ 2 + 32.576\ 2i & -35.679\ 3 + 35.679\ 3i & 60.002\ 8 - 60.002\ 8i \\ -31.711\ 1 + 31.711\ 1i & 59.230\ 2 - 59.230\ 2i & -45.103\ 7 + 45.103\ 7i \\ 54.500\ 3 - 54.500\ 3i & -43.305\ 1 + 43.305\ 1i & 23.566\ 0 - 23.566\ 0i \end{bmatrix}. \quad (58)$$

将由式(57)、(58)组成的辛本征矩阵代入  $\|\mathbf{H}\Psi - \Psi\mathbf{D}_p\|_\infty = 2.417\ 4\text{E} - 10$ , 故关系式(30)得到验证。

表 2 7 自由度体系在动力荷载作用下的顶层位移反应

Table 2 The roof displacement response of a 7-DOF damped system

$t$	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	maximum relative error
exact solution <sup>[9]</sup>	0.004 269	0.014 859	0.011 925	0.006 133	0.002 571	-
PIM ( $\Delta t = 0.2$ )	0.004 269	0.014 858	0.011 925	0.006 134	0.002 571	0.016%

在得到忽略阻尼系统的本征解后,可以基于展开定理计算该阻尼系统的响应.可以验证  $\psi_q^T \mathbf{C} \psi_q$  并不是对角矩阵.因此,基于 Rayleigh 商本征矩阵  $\psi_q$  展开得到的式(7)并不完全解耦.基于辛本征向量矩阵  $\Psi$  展开求解该阻尼系统的响应,归结为求解式(40).利用精细积分法求解式(40)即可得到系统的响应.注意到激励具有简谐特征,采用文献[10]中推导的精细积分格式求解.表2中列出了精细积分步长为0.2时辛本征向量展开解与精确解.当积分步长为0.2时,最大相对误差仅为0.016%.因此,基于辛本征向量展开求解非陀螺阻尼系统的响应是可行

的,而且同样具有很高的精度.

### 3.2 陀螺阻尼系统 1

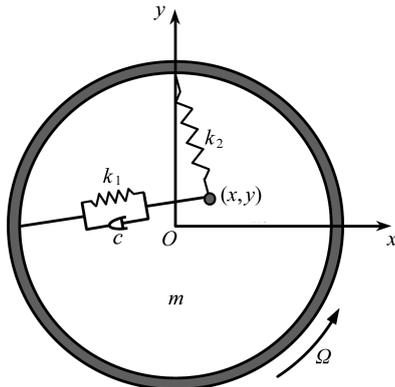


图2 阻尼陀螺系统

Fig. 2 A damped gyroscopic system

考虑图2所示的2自由度阻尼陀螺系统<sup>[11]</sup>.系统的质量阵、陀螺阵、阻尼阵与刚度阵分别如下:

$$\begin{cases} \mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & -2m\Omega \\ 2m\Omega & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 - m\Omega^2 & 0 \\ 0 & k_2 - m\Omega^2 \end{bmatrix}, \end{cases} \quad (59)$$

其中

$$m = 1 \text{ kg}, \Omega = 1 \text{ rad/s}, c = 0.1 \text{ kg/s}, k_1 = 3 \text{ kg/s}^2, k_2 = 5 \text{ kg/s}^2.$$

该系统的初始条件取为  $\mathbf{q}(0) = \mathbf{0}, \dot{\mathbf{q}}(0) = \mathbf{0}$ .关于激励,假定在  $x$  方向输入 El Centro 地震波.为了验证辛本征向量展开解的有效性,把对式(1)进行直接时程积分结果作为参考解.关于式(1)的时程积分,可以采用中心差分、Newmark 方法等.为了便于比较,统一采用精细积分法进行时程积分.为此,将式(1)写成标准形式.引入  $\mathbf{y}_1 = \mathbf{q}, \mathbf{y}_2 = \dot{\mathbf{q}}$ , 则式(1)可以改写为

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{y}}_1 \\ \dot{\mathbf{y}}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{C} + \mathbf{G}) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}(t) \end{pmatrix}. \quad (60)$$

因此,对于本问题,将用精细积分法<sup>[8]</sup>分别求解式(40)、式(60),并对计算结果进行比较.

为了利用辛本征向量展开定理,需要首先计算忽略阻尼的陀螺系统的辛本征值问题.辛本征值问题解如下:

$$\mathbf{D}_p = \text{diag}(0.936 \text{ 4i} \quad 3.020 \text{ 4i} \quad -0.936 \text{ 4i} \quad -3.020 \text{ 4i}), \quad (61)$$

$$\boldsymbol{\Psi} =$$

$$\begin{bmatrix} 0.318 \text{ 0} + 0.318 \text{ 0i} & -0.226 \text{ 8} - 0.226 \text{ 8i} \\ 0.190 \text{ 7} - 0.190 \text{ 7i} & 0.267 \text{ 4} - 0.267 \text{ 4i} \\ -0.488 \text{ 4} + 0.488 \text{ 4i} & 0.417 \text{ 5} - 0.417 \text{ 5i} \\ 0.496 \text{ 5} + 0.496 \text{ 5i} & 0.580 \text{ 9} + 0.580 \text{ 9i} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.318\ 0 + 0.318\ 0i & -0.226\ 8 - 0.226\ 8i \\ -0.190\ 7 + 0.190\ 7i & -0.267\ 4 + 0.267\ 4i \\ 0.488\ 4 - 0.488\ 4i & -0.417\ 5 + 0.417\ 5i \\ 0.496\ 5 + 0.496\ 5i & 0.580\ 9 + 0.580\ 9i \end{bmatrix}, \quad (62)$$

从式(62)可以看到辛共轭关系  $\mu_{n+k} = -\mu_k$ ;  $\psi_{n+k} = \psi_{1,k} + i\psi_{R,k}$  成立<sup>[6]</sup>。

地震波采样时间步长为 0.02 s,故精细积分法步长也选取为 0.02 s。图 3 给出了该陀螺系统的位移响应。可以看到,基于辛本征向量展开法得到的结果与直接时程积分法得到的结果是相吻合的。

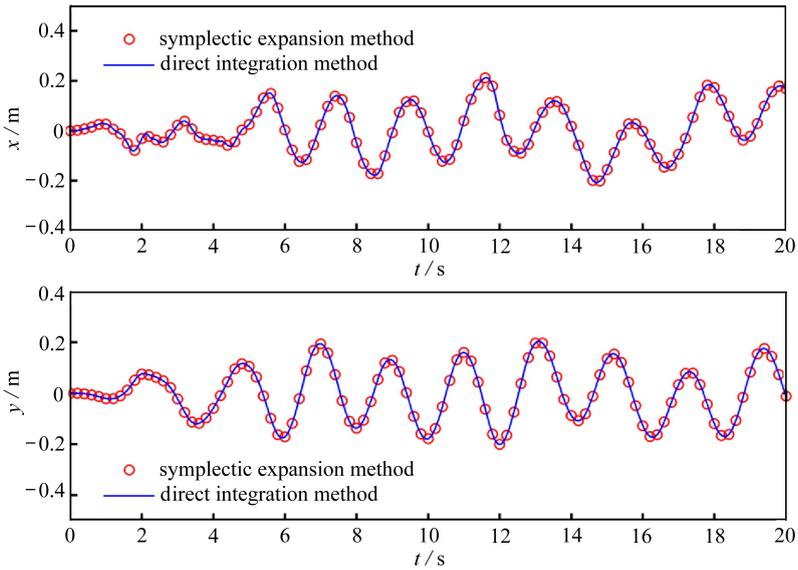


图 3 两自由度阻尼陀螺系统位移响应

Fig. 3 The displacement responses of the 2-DOF damped gyroscopic system

### 3.3 陀螺转子系统 2

在本小节与 3.4 小节给出的算例中,考虑转子系统动力学问题,转子系统动力学由于在旋转机械中的广泛应用引起了许多人的关注,其建模方法在文献[4,12]中有详细介绍,这里不再赘述.特别指出,在本文采用的转子动力学模型中,对于轴采用 Euler 梁模型且不计及轴的惯性效应(假定轴的惯性相比转盘的惯性可以忽略不计).需要指明的是对于短粗轴段,应该采用 Timoshenko 梁模型来实现对剪切变形的考虑。

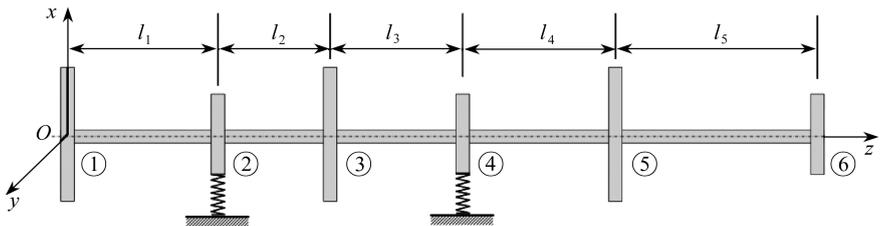


图 4 6 圆盘转子系统

Fig. 4 A rotor system with 6 circular disks

考虑以  $\Omega = 100 \text{ rad/s}$  旋转的 6 转子系统,圆盘从左到右的编号为①~⑥,如图 4 所示.材料参数  $E = 20 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ .各轴段长度、盘的质量、盘的转动惯量具体数值如表 3 所示.轴截面为圆截面,其二次轴距为  $I_d = 3.976 \times 10^{-8} \text{ m}^4$ .两个支撑分别位于 ② 号盘与 ④ 号盘轴心上,其刚度分别为  $K_1 = 3.92 \times 10^6 \text{ N/m}$  和  $K_2 = 4.90 \times 10^6 \text{ N/m}$ .

表 3 图 4 系统主要特性参数

Table 3 The main parameters of the system shown in fig. 4

$i$	1	2	3	4	5	6
$l_i / \text{m}$	0.1	0.05	0.05	0.1	0.1	-
$m_i / \text{kg}$	20	5	10	5	20	5
$J_{Di} / (\text{kg} \cdot \text{m}^2)$	0.072	0.018	0.036	0.018	0.072	0.018
$J_{pi} / (\text{kg} \cdot \text{m}^2)$	0.144	0.036	0.072	0.036	0.144	0.036

对于本算例,在绝对坐标下建模,考虑转盘的偏心所引起的简谐激励.考虑①,③,⑥号盘偏心且偏心量取为:  $e_1 = 0.01 \text{ m}$ ,  $e_3 = 0.02 \text{ m}$ ,  $e_6 = 0.005 \text{ m}$ .若将贴体坐标系的  $x$  轴取为转盘轴心到其质心的向量,则偏心引起的简谐激励的初始相位为  $0^{[4]}$ .对于阻尼矩阵,取 Rayleigh 阻尼  $C = 0.02K$ .用辛本征向量展开法与直接积分法求解.①号转盘的响应见图 5、图 6.从图 5 和图 6 可以看到,基于辛本征向量展开得到的结果与直接时程积分法的结果是一致的.此外,可以看到由于阻尼的引入,自由振动的分量迅速衰减,响应只剩下强迫振动分量.一段时间后系统的谐波响应就对应了强迫振动.

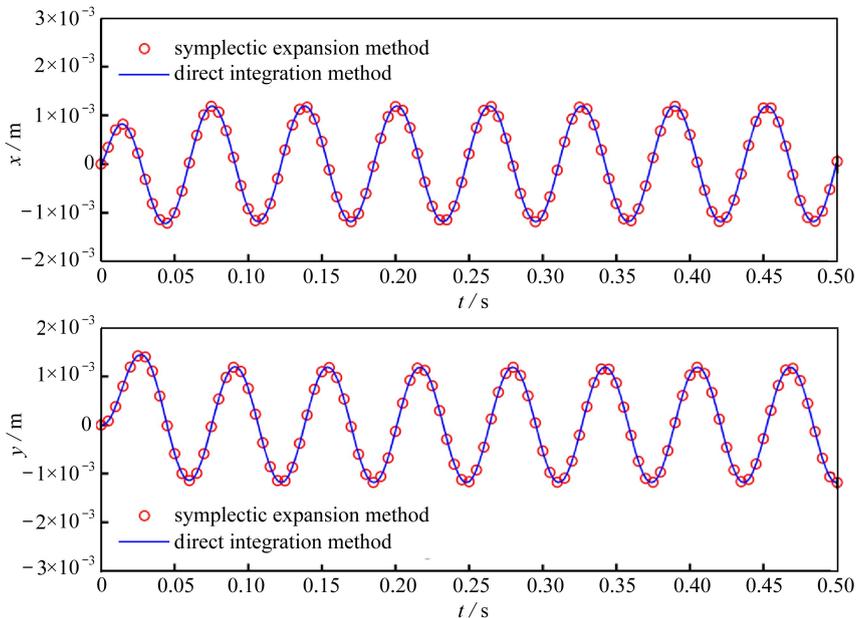


图 5 简谐激励下①号转盘轴心的位置坐标响应

Fig. 5 The dynamic responses of coordinates at the rotation center of No. ① disk of the system subjected to harmonic excitation

### 3.4 陀螺转子系统 3

考虑如图 7 所示的 6 转子系统,系统的旋转角速度为  $\Omega = 800 \text{ rad/s}$ ,盘从左到右的编号为①~⑥.材料参数  $E = 20 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ .对于本算例讨论的转子系统,①,③,④,⑤,⑥号盘为圆盘

而②号盘为长方形盘,对于②号盘,假设盘的惯性主轴与轴截面主刚度方向重合.转轴截面为长方形,高为 0.05 m,宽为 0.04 m.各轴段长度、盘的质量、盘的转动惯量具体数值如表 4 所示.两个支撑分别位于最左端与最右端转轴轴心,其刚度分别为  $K_1 = 3.92 \times 10^6 \text{ N/m}$  和  $K_2 = 4.90 \times 10^6 \text{ N/m}$ .

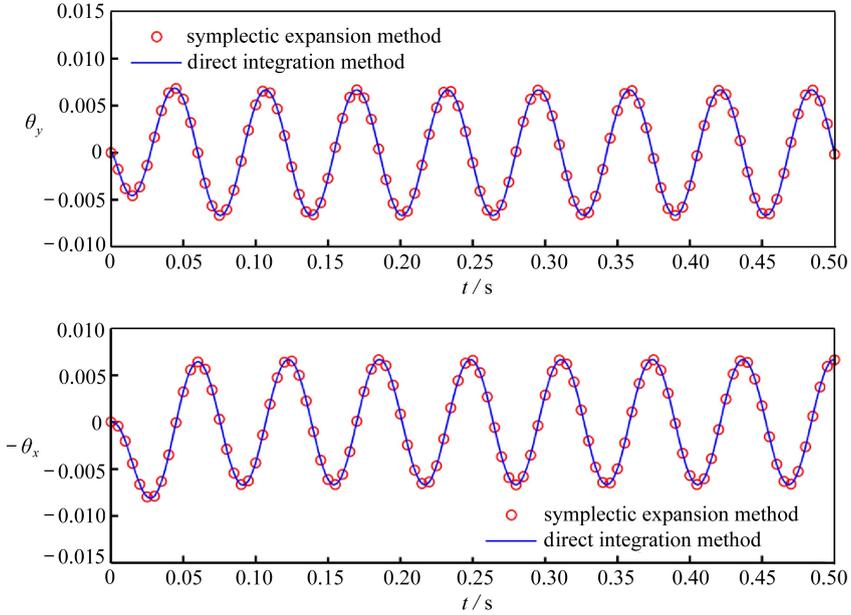


图 6 简谐激励下①号转盘转角响应

Fig. 6 The dynamic rotation angle responses of No. ① disk in the system subjected to harmonic excitation

表 4 图 7 系统主要特性参数

Table 4 The main parameters of system shown in fig. 7

$i$	1	2	3	4	5	6
$l_i / \text{m}$	0.1	0.16	0.12	0.12	0.1	-
$m_i / \text{kg}$	0.5	2.5	2.0	1.0	2.0	1.0
$J_{xi} / (\text{kg} \cdot \text{m}^2)$	$2.0 \times 10^{-4}$	$1.05 \times 10^{-3}$	$2.95 \times 10^{-3}$	$1.65 \times 10^{-3}$	$2.95 \times 10^{-3}$	$4.56 \times 10^{-5}$
$J_{yi} / (\text{kg} \cdot \text{m}^2)$	$2.0 \times 10^{-4}$	$3.95 \times 10^{-3}$	$2.95 \times 10^{-3}$	$1.65 \times 10^{-3}$	$2.95 \times 10^{-3}$	$4.56 \times 10^{-5}$
$J_{pi} / (\text{kg} \cdot \text{m}^2)$	$3.8 \times 10^{-4}$	$5.0 \times 10^{-3}$	$59 \times 10^{-3}$	$30 \times 10^{-3}$	$59 \times 10^{-3}$	$9.0 \times 10^{-5}$

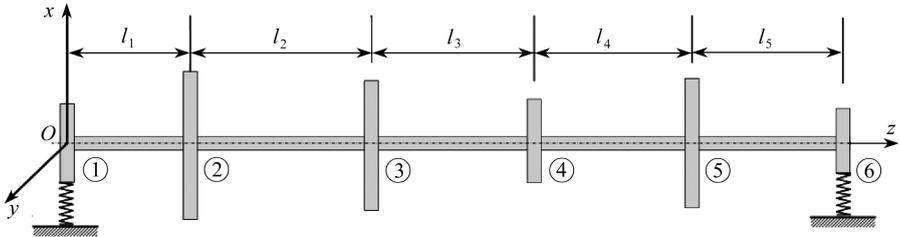


图 7 转轴横截面为长方形的 6 盘转子系统

Fig. 7 A rotor system with 6 disks and a rectangular-cross-section axle

对于本算例,在旋转坐标下建模,考虑支撑的初始扰动下系统的响应.初始扰动取为  $x_a = 0.001 \text{ m}$ ,  $y_a = 0.002 \text{ m}$ ,  $x_b = 0.001 \text{ m}$ ,  $y_b = 0.002 \text{ m}$ .关于阻尼矩阵,取 Rayleigh 阻尼  $C = 0.04K$ .

用辛本征向量展开法与直接积分法求解。①号转盘的响应见图 8、图 9。可以看到,两种计算方法得到的结果是相互吻合的,这再一次验证了辛本征向量展开的有效性。此外,由于阻尼的作用,自由振动会逐渐衰减掉,如图 8、图 9 所示。

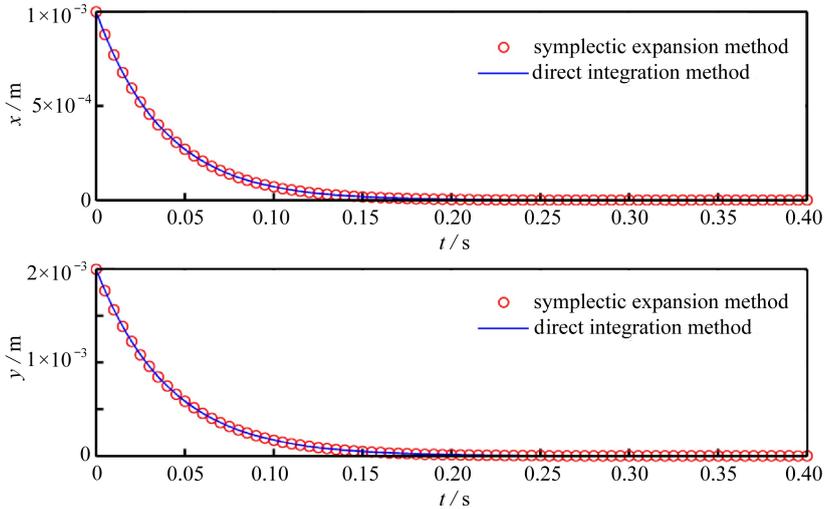


图 8 初始扰动下①号转盘轴心的位置坐标响应

Fig. 8 The dynamic responses of coordinates at the rotation center of No. ① disk in the system subjected to initial perturbation

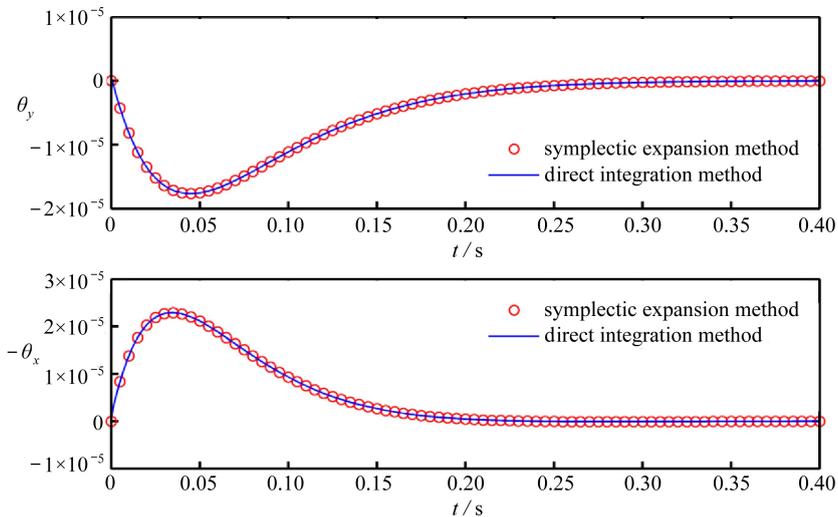


图 9 初始扰动下①号转盘转角响应

Fig. 9 The dynamic rotation angle responses of No. ① disk in the system subjected to initial perturbation

## 4 结 论

本文建立了一般线性振动系统的辛求解方法,探讨了无阻尼系统 Rayleigh 商本征值问题与辛本征值问题之间的关系。基于陀螺系统的辛本征向量展开,求解了阻尼陀螺系统动态响应。数值算例验证了无阻尼系统两种本征值问题的关系与辛本征向量展开法的有效性。

## 参考文献(References):

- [1] Ziegler H. *Principles of Structural Stability*[M]. Waltham, MA: Blaisdell, 1968.
- [2] Timoshenko S, Young D H. *Vibration Problems in Engineering*[M]. 3rd ed. D. Van Nostrand Company, 1955.
- [3] Meirovitch L. A new method of solution of the eigenvalue problem for gyroscopic systems[J]. *AIAA Journal*, 1974, **12**(10): 1337-1342.
- [4] 隋永枫. 转子动力学的求解辛体系及其数值计算方法[D]. 博士学位论文. 大连: 大连理工大学, 2005.(SUI Yong-feng. A symplectic systematic methodology for rotor dynamics and the corresponding numerical computational methods[D]. PhD Thesis. Dalian: Dalian University of Technology, 2005.(in Chinese))
- [5] 钟万勰. 应用力学的辛数学方法[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.(ZHONG Wan-xie. *Symplectic Method in Applied Mechanics*[M]. Beijing: Higher Education Press, 2006.(in Chinese))
- [6] 钟万勰, 高强, 彭海军. 经典力学辛讲[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 2013.(ZHONG Wan-xie, GAO Qiang, PENG Hai-jun. *Classical Mechanics-Its Symplectic Description*[M]. Dalian: Dalian University of Technology Press, 2013.(in Chinese))
- [7] 隋永枫, 钟万勰. 大型不正定陀螺系统本征值问题[J]. 应用数学和力学, 2006, **27**(1): 13-20.(SUI Yong-feng, ZHONG Wan-xie. Eigenvalue problem of a large scale indefinite gyroscopic dynamic system[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2006, **27**(1): 13-20.(in Chinese))
- [8] 钟万勰. 结构动力方程的精细时程积分法[J]. 大连理工大学学报, 1994, **34**(2): 131-136.(ZHONG Wan-xie. On precise time-integration method for structural dynamics[J]. *Journal of Dalian University of Technology*, 1994, **34**(2): 131-136.(in Chinese))
- [9] 汪梦甫, 周锡元. 结构动力方程的高斯精细时程积分法[J]. 工程力学, 2004, **21**(4): 13-16.(WANG Meng-fu, ZHOU Xi-yuan. Gauss precise time-integration of structural dynamic analysis[J]. *Engineering Mechanics*, 2004, **21**(4): 13-16.(in Chinese))
- [10] 林家浩, 沈为平, 宋华茂, 孙东科. 结构非平稳随机响应的混合型精细积分[J]. 振动工程学报, 1995, **8**(2): 127-135.(LIN Jia-hao, SHEN Wei-ping, SONG Hua-mao, SUN Dong-ke. High-precision integration of mixed type for analysis of non-stationary random responses[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 1995, **8**(2): 127-135.(in Chinese))
- [11] 曾亮, 李琳. 阻尼陀螺系统动力响应的有限元复模态分析方法[J]. 航空动力学报, 2008, **23**(10): 1847-1853.(ZENG Liang, LI Lin. Dynamic response of damped gyroscopic system with complex modal method[J]. *Journal of Aerospace Power*, 2008, **23**(10): 1847-1853.(in Chinese))
- [12] 张文. 转子动力学理论基础[M]. 北京: 科学出版社, 1990.(ZHANG Wen. *Fundamental Theories of Rotor Dynamics*[M]. Beijing: Science Press, 1990.(in Chinese))

# Dynamic Analysis of Linear Damped Systems With the Symplectic Eigenspace Expansion Method

LI Ming-wu, ZHAO Yan, ZHONG Wan-xie

(*State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment (Dalian University of Technology)*); *Department of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116024, P.R.China*)

(Contributed by ZHONG Wan-xie, M. AMM Editorial Board)

**Abstract:** A symplectic eigenspace expansion method was proposed for the dynamic analysis of linear systems with damping and gyroscopic effect. The modal expansion method based on the Rayleigh quotient had been widely used in the dynamics of complex structures. However, the applicability of the modal expansion method was restricted since the gyroscopic effect was not taken into account. Herein, the relation between the Rayleigh quotient eigenvalue problems and the symplectic eigenvalue problems was established firstly. For these two types of problems, it was found that the latter was more general and can be reduced to the former through neglectation of the gyroscopic effect. Then, the symplectic eigenspace expansion method was derived to conduct the dynamic analysis of linear damped gyroscopic systems. Finally, effectiveness of the proposed method is shown with the numerical examples of damped systems with and without gyroscopic effect simulated respectively.

**Key words:** damped system; gyroscopic term; Rayleigh quotient; symplectic eigenvalue

**Foundation item:** The National Natural Science Foundation of China (General Program) (11472067); The National Basic Research Program of China (973 Program) (2014CB046803)