

孔隙介质的时域 BEM 计算*

丁伯阳, 蒋佳琪

(浙江工业大学 建筑工程学院, 杭州 310014)

摘要: 根据 Biot 饱和孔隙介质动力方程,结合快、慢纵波解耦法得到时域 Green 函数 U-P 表达以及 Somigliana 表象积分,采用 BEM 分析了集中力作用下饱和孔隙介质时域动力响应.详细论述了孔隙介质时域边界积分方程的离散化方法与形式,它的 Stokes 状态解答和借用已有技术成果对计算奇异性的处理.在无量纲材料参数的数值分析计算中,以图表形式给出结果.由于孔隙介质的时域 BEM 计算在相关文献中较为罕见,因此文中结果会对两相饱和和介质动力响应特性等相关研究提供一些新的途径.

关键词: 时域 BEM; 饱和孔隙介质; 动力响应; Green 函数; 奇异性处理方法

中图分类号: O357.3 **文献标志码:** A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2015.01.003

引 言

孔隙介质,即饱和两相孔隙介质的简称.孔隙介质动力学在地震工程、地球物理以及土动力学中都有十分重要的用途.饱和孔隙理论由 Biot 在 1941 年^[1]为解决土固结问题产生.根据饱和土特性,Biot 提出具有耦合扩散变形,又充满自由流动流体的两相孔隙介质模型.据此 Frenkel 首先开展了弹性孔隙介质动力响应分析^[2],之后 Biot 等做了深入发展^[3-6].上世纪 80 年代,Bowen 用混合物理论证明 Biot 动力方程正确^[7-8].Biot 预见的两类耦合纵波,也差不多在同时期被实验证实^[9-11].

随着计算机技术不断完善,今天复杂工程技术问题的数值方法蓬勃发展,FEM(有限元法)已在许多领域有了广泛的应用.然而,对于孔隙介质模拟的无限或半无限域(如饱和土地)相关问题,由于难以精确模拟介质中固、流相间的相互作用,同时也由于无穷远处辐射存在,FEM 受到限制.与此不同的是:BEM(边界元法)只需在问题域边界积分,对域内架构要求低,辐射处理也仅需添加无穷远处($r \rightarrow \infty$)条件即可,而且伴有降维优势,因此 BEM 在孔隙问题动力响应分析中正日益受到重视.当然在 BEM 实际计算中,合适的 Green 函数,流相位移的化解,积分奇异性处理等问题的解决也是非常关键的环节.

在 Biot 提出孔隙动力方程大约十年后的上世纪 70 年代,Burrige 和 Vargas^[12]首先尝试导出在三维点力作用下的 Biot 方程固相 Green 函数(位移基本解).他们给出了 3D 6 变量的、各 u_i-w_i 表达,这里 u_i 是固相位移, w_i 是流相相对固相的位移.此后所得基本都是各状态形式的

* 收稿日期: 2014-04-03; 修订日期: 2014-12-01

基金项目: 国家自然科学基金(11172268;51478435)

作者简介: 丁伯阳(1949—),男,浙江绍兴人,教授(E-mail: dingboyang@zjut.edu.cn);

蒋佳琪(1990—),男,浙江湖州人,硕士生(通讯作者. E-mail: jiang-jiaqi@163.com).

u_i-w_i 表达^[13-24]。事实上, Biot 是在无限域中讨论动力方程, 未涉及边值问题。如涉及边值计算, 是很难找到求解 u_i-w_i 问题所需要的 6 个边界条件。因为在 3D 空间中若确定 3 个固相位移或面力的边界条件后, 流相的孔压、流量以及流相相对固相位移等相应的物理量值就不再随意定义。不然会导致与 Darcy 定理 (Biot 方程的基本前提) 矛盾^[25-27]。Bonnet^[25] 和 Cheng 等^[26-27] 都证明了这一点; 由于变量关联, 在 Green 函数中 6 变量 u_i-w_i 表达多余, 系统只需要 4 变量 u_i-p 表达的 Green 函数, 其中 p 是孔隙压力。

还应明确的是, 经典动力学已将集中力作用 3D 无限空间, 频域具有 e^{ikr}/r (r 是距离, k 是波数, i 是虚数单位) 形式的位移与应力解答归纳为 Stokes 状态^[28]。对于 Stokes 状态, 系统的第一 (Somigliana), 第二 (Volterra) 或混合 (Curtin, 1964) 边值问题都完成了严格的证明。研究结果也表明 Stokes 解答可视为力作用下的弹性空间泛函, 它是场方程与初始决定的极值, 能由此建立线弹性动力学最普遍的变分和 Hamilton 连续统理论, 它们在经典弹性动力学中也具有丰富的成果。如频、时域互换的 Stokes 等式, BEM 配点位移与应力的弱、强奇异 ($1/r, 1/r^2$) 处理。如若孔隙动力学基本解答以对应的 Stokes 状态表达, 参照已有成果就能方便地解决孔隙动力学的 BEM 计算。

在孔隙动力学 BEM 计算上, Cheng 等^[29] 对频域的边值积分有过许多贡献; 在处理奇异性问题中 Manolis, Banerjee, Dominguez, 姚振汉等^[30-35] 都有较好的成果; Chen 对时域孔隙动力学 Green 函数也做过重要的研究^[36-37]。但本文描述的是作者以解耦的独立快、慢纵波解答, 结合横波结果及 Darcy 定理和 Betti 公式, 通过 Stokes 状态转换得到孔隙介质 Green 函数的 u_i-p 简明表达^[38-39]; 它们的边值 BEM 积分可分别计算各自独立的快、慢纵波和横波 3 部分贡献, 并且对给定单元仅在波影响范围不为 0。使得奇异性处理能遵循单相介质成果完成 (以奇异点为顶点三角形映射, 经 Jacobi 行列式变换消除子单元配点位移 $1/r$ 型弱奇异性; 由 Cauchy 主值积分的刚体位移法解决子单元配点应力 $1/r^2$ 型强奇异性)。文章最后给出时域问题的两个计算实例, 计算结果的图像足以表明这些方法都是可行的。本文之前, 由于相关 Green 函数过于复杂, 计算过程中奇异性处理基本无法可循, 孔隙介质时域 BEM 计算一直未见诸文献, 因而本文结果会对孔隙介质动力响应等相关研究提供一些新的途径。

1 孔隙介质 Biot 方程及 Somigliana 公式

孔隙介质 Biot 动力学方程可写为^[5-6]

$$\sigma_{ij,j} + g_i = \rho \ddot{u}_i + \rho_f \ddot{w}_i, \quad (1)$$

$$\sigma_{ij} = \lambda u_{k,k} \delta_{ij} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) - \alpha p \delta_{ij}, \quad (2)$$

式中 λ, μ 是 Lamé 系数; α, M 是 Biot 在孔隙介质研究中引入的参量; u_i, w_i 分别为固相位移和流相相对固相位移 ($i = 1, 2, 3$), 其中 $\ddot{u}_i = \partial^2 u_i / \partial t^2, \ddot{w}_i = \partial^2 w_i / \partial t^2; \rho, \rho_f$ 为两相与流相介质密度; σ_{ij} 是孔隙介质的应力; g_i 是 i 方向的体力 (通常略去); δ_{ij} 是 Kronecker- δ 函数。如果设 k_s, k_f 和 k_b 分别是固相、流相及两相体积弹性模量, β_0 是孔隙度, 那么还有^[39]

$$\begin{cases} \lambda_c = (k_s - k_b)^2 / (D - k_b) + k_b - 2\mu/3 = \lambda + \alpha^2 M, & M = k_s^2 / (D - k_b), \\ \alpha = (k_s - k_b) / k_s = 1 - \beta_0, & D = k_s [1 + (k_s/k_f - 1)\beta_0], \end{cases} \quad (3)$$

式中, $\lambda_c, \mu, \alpha, M$ 可视为 4 个独立的弹性常数; 其中 Darcy 定律还要求^[38]

$$\dot{w}_i = -\kappa (p_{,i} + \rho_f \ddot{u}_i + m_b \ddot{w}_i), \quad (4)$$

这里 $\kappa = k/\eta$ 为动力渗透系数, 而 η 和 k 分别是反映动力粘滞性和固体骨架自身渗透率的物理参数, m_b 是每单位孔隙介质体积的流体含量, $m_b = \rho_f/\beta_0$ 。如不计体力可得 Biot 动力学方程为^[6, 38-39]

$$\begin{cases} (\lambda_c + \mu)u_{j,ij} + \mu u_{i,jj} + \alpha M w_{j,ij} = \rho \ddot{u}_i + \rho_i \ddot{w}_i, \\ \alpha M u_{j,ij} + M w_{j,ij} = \rho_i \ddot{u}_i + \gamma \ddot{w}_i, \end{cases} \quad (5)$$

方程(5)中 $\lambda_c = \lambda + \alpha^2 M$, $\gamma = (\rho_a + \beta_0 \rho_f) / \beta_0$, ρ_a 为表观密度. 当 u_i, w_i 是无散场分量时, 有^[38-39]

$$\rho_i \ddot{u}_i + \gamma \ddot{w}_i = 0, \quad (6)$$

$$w_i = -(\rho_f / \gamma) u_i, \quad (7)$$

而对于无旋场, 有^[38-39]

$$\begin{cases} u_{i1} + u_{i2} = u_i, \\ \xi_1 u_{i1} + \xi_2 u_{i2} = w_i, \end{cases} \quad (8)$$

其中 u_{i1}, u_{i2} 分别为快纵波和慢纵波的位移^[2,5-6], 而解耦系数 ξ_n 为

$$\xi_n = [\lambda_c + 2\mu - \rho(\alpha_n)^2] / [\rho_f(\alpha_n)^2 - \alpha M] \quad (n = 1, 2), \quad (9)$$

式中 α_1, α_2 分别为快纵波速与慢纵波速. 孔隙介质的 Somigliana 表象积分为^[40]

$$\begin{aligned} c(\mathbf{x})u_m(\mathbf{x}, t) = & \int_0^t \left\{ \iint_S [(t_i(\boldsymbol{\zeta}, \tau) \dot{G}_{im}(\mathbf{x}/\boldsymbol{\zeta}, t - \tau) - \sigma_{im}(\mathbf{x}, \tau) \dot{u}_i(\boldsymbol{\zeta}, t - \tau)) + \right. \\ & (p(\boldsymbol{\zeta}, \tau) \xi_n G_{(n)im}(\mathbf{x}/\boldsymbol{\zeta}, t - \tau) - G_{4i}(\mathbf{x}/\boldsymbol{\zeta}, t - \tau) \xi_n u_{(n)i}(\boldsymbol{\zeta}, \tau))] ds - \\ & \left. \iint_V [\xi_n u_{(n)i,i}(\boldsymbol{\zeta}, \tau) G_{4i}(\mathbf{x}/\boldsymbol{\zeta}, t - \tau) - \right. \\ & \left. \xi_n G_{(n)im,i}(\mathbf{x}/\boldsymbol{\zeta}, t - \tau) p(\boldsymbol{\zeta}, \tau)] dv \right\} d\tau, \quad (10) \end{aligned}$$

这里 σ_{ij} 应在所求域边界, $c(\mathbf{x})$ 是积分参数, 它分别等于 0(场点在积分域外), 0.5(场点在积分域边界上), 1(场点在积分域内), $n = 1, 2$; 而 $G_{(1)ij}$ 和 $G_{(2)ij}$ 分别为 G_{ij} 中的快、慢纵波分量. $u_{i,i}$ 是固相物质的体应变. 类似地, 不计体力情况下同样可得^[40]

$$\begin{aligned} c(\mathbf{x})p(\mathbf{x}, t) = & \int_0^t \left\{ \iiint_V [\xi_n u_{(n)i,i}(\boldsymbol{\zeta}, \tau) G_{44}(\mathbf{x}/\boldsymbol{\zeta}, t - \tau)] dv + \right. \\ & \left. \iint_S [(t_i(\boldsymbol{\zeta}, \tau) \dot{G}_{i4}(\mathbf{x}/\boldsymbol{\zeta}, t - \tau) - \sigma_{i4}(\mathbf{x}, t) \dot{u}_i(\boldsymbol{\zeta}, t - \tau)) + \right. \\ & \left. (p(\boldsymbol{\zeta}, \tau) \xi_n G_{(n)i4}(\mathbf{x}/\boldsymbol{\zeta}, t - \tau) - G_{44}(\mathbf{x}/\boldsymbol{\zeta}, t) \xi_n u_{(n)i}(\boldsymbol{\zeta}, t - \tau))] ds \right\} d\tau. \quad (11) \end{aligned}$$

应力解的形式可写为

$$\sigma_{il}^k = \lambda_c G_{mk,m} \delta_{il} + \mu (G_{ik,l} + G_{lk,i}) - \alpha p \delta_{il}, \quad (12)$$

σ_{il}^k 是 1 个 3 阶张量. 它表示源点 $\boldsymbol{\zeta}$ 作用着 k (上标) 方向的集中力, 在场点 \mathbf{x} 的 i 向面内 l 方向应力, 由于源点的 3 个作用力方向都可产生应力 σ_{il} , 应力表达为

$$\sigma_{il}(\mathbf{x}, t) = \{ \lambda_c G_{mk,m}(\mathbf{x}/\boldsymbol{\zeta}, t) \delta_{il} + \mu [G_{ik,l}(\mathbf{x}/\boldsymbol{\zeta}, t) + G_{lk,i}(\mathbf{x}/\boldsymbol{\zeta}, t)] \} l_k - \alpha p \delta_{il}, \quad (13)$$

l_k 是平面法向余弦. 由方程(5)通过积分变换已求得两相饱和介质在集中力作用下频域的位移 Green 函数 Stokes 状态解答为^[38-39]

$$\begin{aligned} G_{ij}(\mathbf{x}/\boldsymbol{\zeta}, \omega) = & D_0 \{ -\lambda_1 (e^{-ik\alpha_1 r} / r)_{j,j} + \\ & \lambda_2 (e^{-ik\alpha_2 r} / r)_{j,j} + \delta_{ikm} \delta_{mj} (e^{-ik\beta r} / r)_{j,ik} \} / (4\pi\rho\omega^2), \quad (14) \end{aligned}$$

这里 δ_{ijk} 为置换张量, i 是虚数单位. $\lambda_n = (\xi_n + \rho_f / \gamma) / (\xi_1 - \xi_2)$, $D_0 = 1 / (\rho - \rho_f^2 / \gamma)$. r 是源点到场点的距离 $r^2 = (x_i - \zeta_i)(x_i - \zeta_i)$, $r_{,i} = (x_i - \zeta_i) / r$; 由 Stokes 频、时域互换恒等式, 得到时域的表达式是^[39]

$$G_{ij}(\mathbf{x}/\boldsymbol{\zeta}, t) = \frac{1}{4\pi} D_0 \left\{ \frac{r_{,i} r_{,j}}{r} \left[\lambda_1 \delta \left(t - \frac{r}{\alpha_1} \right) - \lambda_2 \delta \left(t - \frac{r}{\alpha_2} \right) - \delta \left(t - \frac{r}{\beta} \right) \right] + \right.$$

$$\frac{\delta_{ij}}{r} \delta\left(t - \frac{r}{\beta}\right) + \left(-\frac{\delta_{ij}}{r^3} + 3\frac{r_{,i}r_{,j}}{r^3}\right) \left[\alpha_1^2 \lambda_1 t \text{H}\left(t - \frac{r}{\alpha_1}\right) - \alpha_2^2 \lambda_2 t \text{H}\left(t - \frac{r}{\alpha_2}\right) - \beta^2 t \text{H}\left(t - \frac{r}{\beta}\right) \right] \}. \quad (15)$$

将式(15)的 Green 函数时域表达式代入式(12),由下标置换,记 $\sigma_{ij} = \sigma_{ii}$. 可得到式(16):

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = & \frac{D_0}{4\pi} \left\{ \left[\lambda_1 d_{ij}^1(r) \delta\left(t - \frac{r}{\alpha_1}\right) - \lambda_2 d_{ij}^2(r) \delta\left(t - \frac{r}{\alpha_2}\right) - d_{ij}^3(r) \delta\left(t - \frac{r}{\beta}\right) \right] - \right. \\ & \left[\lambda_1 e_{ij}^1(r) \dot{\delta}\left(t - \frac{r}{\alpha_1}\right) - \lambda_2 e_{ij}^2(r) \dot{\delta}\left(t - \frac{r}{\alpha_2}\right) - e_{ij}^3(r) \dot{\delta}\left(t - \frac{r}{\beta}\right) \right] - \\ & f_{ij}(r) \left[\frac{\lambda_1}{\alpha_1} t \delta\left(t - \frac{r}{\alpha_1}\right) - \frac{\lambda_2}{\alpha_2} t \delta\left(t - \frac{r}{\alpha_2}\right) - \frac{1}{\beta} t \delta\left(t - \frac{r}{\beta}\right) \right] - \\ & \left. h_{ij}(r) \left[\lambda_1 t \text{H}\left(t - \frac{r}{\alpha_1}\right) - \lambda_2 t \text{H}\left(t - \frac{r}{\alpha_2}\right) - t \text{H}\left(t - \frac{r}{\beta}\right) \right] \right\}, \quad (16) \end{aligned}$$

这里

$$d_{ij}^1(r) = \frac{1}{\alpha_1^2} \left[\lambda \frac{r_{,j} l_i}{r^2} + \mu \frac{2l_i r_{,j} + l_j r_{,i} + \delta_{ij} r_{,m} l_m - 6r_{,i} r_{,j} r_{,m} l_m}{r^2} - \alpha M(\alpha + \xi_1) \frac{l_i r_{,j}}{r^2} \right], \quad (17a)$$

$$d_{ij}^2(r) = \frac{1}{\alpha_2^2} \left[\lambda \frac{r_{,j} l_i}{r^2} + \mu \frac{2l_i r_{,j} + l_j r_{,i} + \delta_{ij} r_{,m} l_m - 6r_{,i} r_{,j} r_{,m} l_m}{r^2} - \alpha M(\alpha + \xi_2) \frac{l_i r_{,j}}{r^2} \right], \quad (17b)$$

$$d_{ij}^3(r) = \frac{2}{\beta^2} \left[\lambda \frac{r_{,j} l_i}{r^2} + \mu \frac{l_i r_{,j} + l_j r_{,i} + \delta_{ij} r_{,m} l_m - 3r_{,i} r_{,j} r_{,m} l_m}{r^2} \right], \quad (17c)$$

$$e_{ij}^1(r) = \frac{1}{\alpha_1^3} \left[(\lambda_c + \alpha M \xi_1) \frac{r_{,j} l_i}{r^2} + 2\mu \frac{r_{,i} r_{,j} r_{,m} l_m}{r} \right], \quad (17d)$$

$$e_{ij}^2(r) = \frac{1}{\alpha_2^3} \left[(\lambda_c + \alpha M \xi_2) \frac{r_{,j} l_i}{r^2} + 2\mu \frac{r_{,i} r_{,j} r_{,m} l_m}{r} \right], \quad (17e)$$

$$e_{ij}^3(r) = \frac{1}{\beta^3} \mu \left(\frac{2r_{,i} r_{,j} r_{,m} l_m - \delta_{ij} r_{,m} l_m - l_j r_{,i}}{r} \right), \quad (17f)$$

$$f_{ij}(r) = 2\lambda \frac{l_i r_{,j}}{r^3} + \mu \left(\frac{6r_{,i} r_{,j} r_{,m} l_m - \delta_{ij} r_{,m} l_m - l_j r_{,i}}{r^3} \right), \quad (17g)$$

$$h_{ij}(r) = 6\mu \left(\frac{l_i r_{,j} + l_j r_{,i} + \delta_{ij} r_{,m} l_m - 5r_{,i} r_{,j} r_{,m} l_m}{r^4} \right). \quad (17h)$$

2 时域边界积分方程解答

如忽略介质体积变化,初始为0的式(10)和(11)边值积分方程可写为

$$\begin{aligned} c(\mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}, t) = & \int_0^t \iint_S [t_i(\boldsymbol{\zeta}, \tau) \dot{G}_{ij}(\mathbf{x}/\boldsymbol{\zeta}, t - \tau) - \sigma_{ij}(\mathbf{x}/\boldsymbol{\zeta}, t - \tau) \dot{u}_i(\boldsymbol{\zeta}, \tau)] ds d\tau - \\ & \int_0^t \iint_S [p(\boldsymbol{\zeta}, \tau) \xi_n G_{(n)ij}(\mathbf{x}/\boldsymbol{\zeta}, t - \tau) n_i - \\ & G_{4j}(\mathbf{x}/\boldsymbol{\zeta}, t - \tau) \xi_n u_{(n)i}(\boldsymbol{\zeta}, \tau) n_i] ds d\tau, \quad (18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -c(\mathbf{x})p(\mathbf{x},t) = & \int_0^t \iint_S [t_i(\boldsymbol{\zeta},\tau)\dot{G}_{i4}(\mathbf{x}/\boldsymbol{\zeta},t-\tau) - \sigma_{i4}(\mathbf{x}/\boldsymbol{\zeta},t-\tau)\dot{u}_i(\boldsymbol{\zeta},\tau)] dsd\tau - \\
 & \int_0^t \iint_S [p(\boldsymbol{\zeta},\tau)\xi_n G_{(n)i4}(\mathbf{x}/\boldsymbol{\zeta},t-\tau)n_i - \\
 & G_{44}(\mathbf{x}/\boldsymbol{\zeta},t-\tau)\xi_n u_{(n)i}(\boldsymbol{\zeta},\tau)n_i] dsd\tau. \tag{19}
 \end{aligned}$$

式(18)和(19)中 u_i 和 t_i 分别代表固相位移和面力的 i 向分量;代表流相相对位移 i 向分量的 w_i 已通过换元公式 $f(w_i) = f(\xi_{(n)} u_{i(n)})$ (式(7)和(8)的综合)由固相位移替换.各 Green 函数物理意义分别为 τ 时刻沿 j 方向于源点 $\boldsymbol{\zeta}$ 的单位力作用或单位体积流体的注入,在 t 时刻场点 \mathbf{x} 处沿 i 方向产生的固相位移、力(如应力 σ_{ij}) 以及孔压值. n_i 表示边界处单位外法线向量的 i 向分量.

以 BEM 求解边值积分式(18)和(19),需将边界上的未知量(如位移、应力、孔压)离散.就时间域,可将总时间 t 离散成 n_t 个等时步;就空间域,可将表面 Γ 离散成 m 个单元.如此,任意点 \mathbf{x} 在任意时刻 τ 的位移、力、孔压用相关节点的位移、应力、孔压插值就是

$$u_i = \sum_q \sum_m \varphi^q(r)\eta^m(\tau)u_i^{mq} = \sum_q \sum_m \varphi^q(r)\eta^m(\tau)(u_{1i}^{mq} + u_{2i}^{mq}), \tag{20}$$

$$t_i = \sum_q \sum_m \psi^q(r)\nu^m(\tau)t_i^{mq}, \tag{21}$$

$$P = \sum_q \sum_m \phi^q(r)\chi^m(\tau)p^{mq}, \tag{22}$$

式中 u_i^{mq} 和 t_i^{mq} 分别表示第 q 个插值节点在第 m 个时间步($t_m = m\Delta t$) 时的固相位移与面力的 i 向分量; p^{mq} 则表示第 q 个插值节点在第 m 个时间步时的孔压; $u_{1i}^{mq} = \lambda_1 u_i^{mq}$ 和 $u_{2i}^{mq} = \lambda_2 u_i^{mq}$ 是第 q 个插值节点第 m 个时间步时与固相位移 u_i^{mq} 对应的快纵波与慢纵波值.函数 $\varphi^q(r)$, $\psi^q(r)$ 和 $\phi^q(r)$ 分别为边界固相位移、应力以及孔压的空间插值函数;函数 $\eta^m(\tau)$, $\nu^m(\tau)$ 和 $\chi^m(\tau)$ 则分别为边界固相位移、力以及孔压的时间插值函数.而流相相对位移 w_i 为

$$w_i = \xi_{n^*} u_{i(n^*)}, \quad n^* = 1, 2, 3, \tag{23}$$

$$u_i = \sum_{n=1}^3 u_{in^*}, \quad i = 1, 2, 3, \tag{24}$$

这里 n^* 等于 1, 2, 3.当 $n^* = 1, 2$, 分别代表快、慢纵波(P_1 波和 P_2 波); $n^* = 3$ 代表横波(S波), ξ_1, ξ_2 还如式(9),而 ξ_3 如式(7),即 $\xi_3 = -\rho_l/\gamma$;它仅表示横波在相应方向的影响.这样方程(18)、(19)可离散化为

$$\begin{aligned}
 cu_j^{n_t R} = & \sum_{m=1}^{n_t} \sum_{q=1}^Q \left\{ \left[\iiint_{\Gamma} \left(\int_{\Delta t_m} \nu^m \dot{G}_{ij} d\tau \right) \psi^q ds \right] t_i^{mq} - \right. \\
 & \left[\iiint_{\Gamma} \left(\int_{\Delta t_m} \eta^m \sigma_{ij} d\tau \right) \varphi^q ds \right] \dot{u}_i^{mq} - \left[\iiint_{\Gamma} \left(\int_{\Delta t_m} \chi^m \xi_{n^*} G_{(n^*)ij} d\tau \right) \phi^q n_i ds \right] p^{mq} + \\
 & \left. \left[\iiint_{\Gamma} \left(\int_{\Delta t_m} \eta^m G_{4j} d\tau \right) \varphi^q ds \right] n_i \xi_{n^*} u_{(n^*)i}^{mq} \right\}, \tag{25}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -cp^{n_t R} = & \sum_{m=1}^{n_t} \sum_{q=1}^Q \left\{ \left[\iiint_{\Gamma} \left(\int_{\Delta t_m} \nu^m \dot{G}_{i4} d\tau \right) \psi^q ds \right] t_i^{mq} - \right. \\
 & \left[\iiint_{\Gamma} \left(\int_{\Delta t_m} \eta^m \sigma_{i4} d\tau \right) \varphi^q ds \right] \dot{u}_i^{mq} - \left[\iiint_{\Gamma} \left(\int_{\Delta t_m} \chi^m \xi_{n^*} G_{(n^*)i4} d\tau \right) \phi^q n_i ds \right] p^{mq} + \\
 & \left. \left[\iiint_{\Gamma} \left(\int_{\Delta t_m} \eta^m G_{44} d\tau \right) \varphi^q ds \right] n_i \xi_{n^*} u_{(n^*)i}^{mq} \right\}, \tag{26}
 \end{aligned}$$

式中 Q 代表边界节点总数, Γ_j 代表第 q 个源点所属单元,上标 R 表示场点节点编号.式(18)与(19)中的时间导数,在式(25)与(26)中以其所在单元中值代表.这样对时间域积分可记为

$$G_{ij}^{n,m} = \int_{\Delta t_m} \nu^m \dot{G}_{ij} d\tau, \quad (27a)$$

$$G_{4j}^{n,m} = \int_{\Delta t_m} \eta^m G_{4j} d\tau, \quad (27b)$$

$$G_{i4}^{n,m} = \int_{\Delta t_m} \nu^m \dot{G}_{i4} d\tau, \quad (27c)$$

$$G_{44}^{n,m} = \int_{\Delta t_m} \eta^m G_{44} d\tau, \quad (27d)$$

$$H_{ij}^{n,m} = \int_{\Delta t_m} \eta^m \sigma_{ij} d\tau, \quad (27e)$$

$$H_{i4}^{n,m} = \int_{\Delta t_m} \eta^m \sigma_{i4} d\tau, \quad (27f)$$

$$K_{ij}^{n,m} = K_{(1)ij}^{n,m} + K_{(2)ij}^{n,m} = \int_{\Delta t_m} \chi^m \xi_n G_{(n)ij} d\tau = \int_{\Delta t_m} \chi^m (\xi_1 G_{(1)ij} + \xi_2 G_{(2)ij}) d\tau, \quad (27g)$$

$$K_{i4}^{n,m} = K_{(1)i4}^{n,m} + K_{(2)i4}^{n,m} = \int_{\Delta t_m} \chi^m \xi_n G_{(n)i4} d\tau = \int_{\Delta t_m} \chi^m (\xi_1 G_{(1)i4} + \xi_2 G_{(2)i4}) d\tau. \quad (27h)$$

因此,将式(27)代入方程(25)、(26),可以得到

$$cu_j^{n,R} = \sum_{m=1}^{n_t} \sum_{q=1}^Q \left\{ \left[\int_{I_j} G_{ij}^{n,m} \psi^q ds \right] t_i^{mq} - \left[\int_{I_j} H_{ij}^{n,m} \varphi^q ds \right] u_i^{mq} - \left[\int_{I_j} K_{ij}^{n,m} \phi^q ds \right] n_i p^{mq} + \left[\int_{I_j} G_{4j}^{n,m} \varphi^q ds \right] n_i \xi_{n^*} u_{(n^*)i}^{mq} \right\}, \quad (28)$$

$$-cp^{n,R} = \sum_{m=1}^{n_t} \sum_{q=1}^Q \left\{ \left[\int_{I_j} G_{i4}^{n,m} \psi^q ds \right] t_i^{mq} - \left[\int_{I_j} H_{i4}^{n,m} \varphi^q ds \right] u_i^{mq} - \left[\int_{I_j} K_{i4}^{n,m} \phi^q ds \right] n_i p^{mq} + \left[\int_{I_j} G_{44}^{n,m} \varphi^q ds \right] n_i \xi_{n^*} u_{(n^*)i}^{mq} \right\}. \quad (29)$$

如对空间域积分,记为

$$G_{ij}^{n,mRq} = \int_{I_j} G_{ij}^{n,m} \psi^q ds, \quad (30a)$$

$$G_{4j}^{n,mRq} = \int_{I_j} G_{4j}^{n,m} \varphi^q ds, \quad (30b)$$

$$G_{ij}^{n,mRq} = \int_{I_j} G_{i4}^{n,m} \psi^q ds, \quad (30c)$$

$$G_{44}^{n,mRq} = \int_{I_j} G_{44}^{n,m} \varphi^q ds, \quad (30d)$$

$$H_{ij}^{n,mRq} = \int_{I_j} H_{ij}^{n,m} \varphi^q ds, \quad (30e)$$

$$H_{i4}^{n,mRq} = \int_{I_j} H_{i4}^{n,m} \varphi^q ds, \quad (30f)$$

$$K_{ij}^{n,mRq} = \int_{I_j} K_{ij}^{n,m} \phi^q ds, \quad (30g)$$

$$K_{i4}^{n,mRq} = \int_{I_j} K_{i4}^{n,m} \phi^q ds. \quad (30h)$$

将式(30)代入式(28)和(29)中,最终原始边界积分方程可离散化为

$$cu_j^{n,R} = \sum_{m=1}^{n_t} \sum_{q=1}^Q (G_{ij}^{n,mRq} t_i^{mq} - H_{ij}^{n,mRq} u_i^{mq} - K_{ij}^{n,mRq} n_i p^{mq} + G_{4j}^{n,mRq} n_i \xi_{n^*} u_{(n^*)i}^{mq}), \quad (31)$$

$$-cp^{n,R} = \sum_{m=1}^{n_i} \sum_{q=1}^Q (G_{i4}^{n,mRq} t_i^{mq} - H_{i4}^{n,mRq} u_i^{mq} - K_{i4}^{n,mRq} n_i p^{mq} + G_{44}^{n,mRq} n_i \xi_n^* u_{(n^*)i}^{mq}), \quad (32)$$

式(31)与(32)中 $G_{ij}^{n,mRq}$, $G_{i4}^{n,mRq}$ 分别为6阶与5阶张量,是边界面 q 点 m 时刻沿 j 方向单位力对场点 R 在 n_i 时刻分别通过固相介质与通过流相孔隙所产生在 i 方向上位移的影响大小.而 $K_{ij}^{n,mRq}$, $K_{i4}^{n,mRq}$ 分别为力与流体对孔压的影响,它们分别是6阶与5阶张量,可用矩阵表示; $H_{ij}^{n,mRq}$, $H_{i4}^{n,mRq}$ 表示力与流体对位移影响,也可用矩阵表示.而 $G_{4j}^{n,mRq}$, $G_{44}^{n,mRq}$ 却是边界面 q 点 m 时刻 j 方向的单位流相相对位移对场点 R 在 n_i 时刻分别通过固相介质与流相孔隙所产生在 i 方向的孔压影响.一旦上述所有影响求出,结合体系边界条件,积分方程(18)、(19)能够转化为代数方程(31)和(32),得到解答.本文以 MATLAB 编程实现.

3 基本解公式的 u_i - p 表达

为了计算 $G_{ij}^{n,mRq}$, $H_{ij}^{n,mRq}$ 等一系列影响矩阵,本文选择相应 δ 集中力作用的孔隙动力时域问题的全空间 u_i - p 表达式(33)~(38).式(33)~(38)来自文献[39],作者经过仔细核对,对公式已做了必要的订正:

$$G_{ij}(\mathbf{x}/\boldsymbol{\zeta}, t) = \frac{1}{4\pi r} D_0 \left\{ r_{,i} r_{,j} \left[\frac{\lambda_1}{\alpha_1^2} \delta \left(t - \frac{r}{\alpha_1} \right) - \frac{\lambda_2}{\alpha_2^2} \delta \left(t - \frac{r}{\alpha_2} \right) - \frac{1}{\beta^2} \delta \left(t - \frac{r}{\beta} \right) \right] + \frac{\delta_{ij}}{\beta^2} \delta \left(t - \frac{r}{\beta} \right) + \left(\frac{3r_{,i} r_{,j} - \delta_{ij}}{r^2} \right) \left[\lambda_1 t \text{H} \left(t - \frac{r}{\alpha_1} \right) - \lambda_2 t \text{H} \left(t - \frac{r}{\alpha_2} \right) - t \text{H} \left(t - \frac{r}{\beta} \right) \right] \right\}, \quad (33)$$

$$\xi_n G_{(n)ij}(\mathbf{x}/\boldsymbol{\zeta}, t) = \frac{1}{4\pi r} D_0 \left\{ r_{,i} r_{,j} \left[\frac{\xi_1 \lambda_1}{\alpha_1^2} \delta \left(t - \frac{r}{\alpha_1} \right) - \frac{\xi_2 \lambda_2}{\alpha_2^2} \delta \left(t - \frac{r}{\alpha_2} \right) - \frac{\xi_3}{\beta^2} \delta \left(t - \frac{r}{\beta} \right) \right] + \frac{\xi_3 \delta_{ij}}{\beta^2} \delta \left(t - \frac{r}{\beta} \right) + \left(\frac{3r_{,i} r_{,j} - \delta_{ij}}{r^2} \right) \left[\xi_1 \lambda_1 t \text{H} \left(t - \frac{r}{\alpha_1} \right) - \xi_2 \lambda_2 t \text{H} \left(t - \frac{r}{\alpha_2} \right) - \xi_3 t \text{H} \left(t - \frac{r}{\beta} \right) \right] \right\}, \quad (34)$$

$$G_{i4}(\mathbf{x}/\boldsymbol{\zeta}, t) = \frac{M\lambda_1(\alpha + \xi_1 - \xi_1 T)}{4\pi r} \times \frac{r_{,i}}{\alpha_1^2} D_0 \left[\frac{1}{r} \text{H} \left(t - \frac{r}{\alpha_1} \right) + \frac{1}{\alpha_1} \delta \left(t - \frac{r}{\alpha_1} \right) - \frac{1}{r} \text{H} \left(t - \frac{r}{\alpha_2} \right) - \frac{1}{\alpha_2} \delta \left(t - \frac{r}{\alpha_2} \right) \right], \quad (35)$$

$$\xi_n G_{(n)i4}(\mathbf{x}/\boldsymbol{\zeta}, t) = \frac{M\lambda_1(\alpha + \xi_1 - \xi_1 T)}{4\pi r} \times \frac{r_{,i}}{\alpha_1^2} D_0 \left[\frac{\xi_1}{r} \text{H} \left(t - \frac{r}{\alpha_1} \right) + \frac{\xi_1}{\alpha_1} \delta \left(t - \frac{r}{\alpha_1} \right) - \frac{\xi_2}{r} \text{H} \left(t - \frac{r}{\alpha_2} \right) - \frac{\xi_2}{\alpha_2} \delta \left(t - \frac{r}{\alpha_2} \right) \right], \quad (36)$$

$$G_{4i}(\mathbf{x}/\boldsymbol{\zeta}, t) = \frac{M\lambda_1(\alpha + \xi_1 - \xi_1 T)}{4\pi r} \times \frac{r_{,i}}{\alpha_1^2} D_0 \left[\frac{1}{r} \delta \left(t - \frac{r}{\alpha_1} \right) + \frac{1}{\alpha_1} \dot{\delta} \left(t - \frac{r}{\alpha_1} \right) - \frac{1}{r} \delta \left(t - \frac{r}{\alpha_2} \right) - \frac{1}{\alpha_2} \dot{\delta} \left(t - \frac{r}{\alpha_2} \right) \right], \quad (37)$$

$$G_{44}(\mathbf{x}/\boldsymbol{\zeta}, t) = \frac{M^2(\alpha + \xi_1 - \xi_1 T)}{4\pi r} \times \frac{1}{\alpha_1^2} D_0 \left[\frac{\alpha + \xi_1}{\alpha_1^2} \delta\left(t - \frac{r}{\alpha_1}\right) - \frac{\alpha + \xi_2}{\alpha_2^2} \delta\left(t - \frac{r}{\alpha_2}\right) \right] + \frac{M}{4\pi r} \left(\frac{1}{\alpha_2} - \frac{1}{\alpha_1} \right) \delta\left(t - \frac{r}{\alpha_2}\right). \quad (38)$$

在式(35)~(38)中,有

$$T = r(1/\alpha_2 - 1/\alpha_1). \quad (39)$$

式(33)~(38)是孔隙介质在 δ 集中力作用下,快、慢纵波解耦的全空间时域简明 Green 函数 u_{i-p} 表达。

4 数值积分处理

4.1 时间积分与空间积分

由于快、慢纵波,横波都已解耦,方程(30)中的积分核包含3部分,分别独立地代表着孔隙介质中存在的3类波作用:一是以 α_1 速率传播的 P_1 波作用,二是以 α_2 速率传播的 P_2 波作用,三是以 β 速率传播的 S 波作用.3部分中的任意一部分对于给定单元,仅在该单元内的部分区域上不为0.这些区域处于每一种波各自影响范围,如对时间是 $(n-m)\Delta t \leq t \leq [n-(m-1)]\Delta t$,相应影响区域边界对源点的半径应为 $r_m = c(n-m)\Delta t \leq r \leq r_{m+1} = c[n-(m-1)]\Delta t$,其中 c 分别为 α_1 , α_2 或 β .式(31)中所有的边界单元上的空间积分可采用简单的 Gauss 数值积分计算.显然计算中需要对积分单元所在的区域进行有效识别,判断是否处于波的影响范围之内,否则要产生错误。

本文采用四边形4节点一次单元计算.单元划分上,单元长度 l 应满足 $c\Delta t \geq l$.这样只有当且仅当 $n = m$ 以及源点包含在积分单元内时出现奇异性,这时位移基本解及孔压基本解是 $1/r$ 型弱奇异性.它处理较为简单:即以奇异点为顶点重划两个三角形单元,奇异性由 Jacobi 映射行列式消除.而应力基本解是 $1/r^2$ 型的强奇异性.对一个特定单元的强奇异积分,其形式是 $A \int_{r_j} 1/r^2 (A$ 为系数),可以利用 Cauchy 主值积分的刚体位移法解决。

只对单元中心点处在基本解的影响范围内的单元进行空间积分是问题的因果原则.如单元中心点不在基本解的影响范围内,这意味着在这个时间段基本解中所包含的波已经离开或者说是尚未到达该单元,积分值应为0.计算采用标准的 2×2 Gauss 积分,它能满足一定的精度要求。

4.2 数值算例

算例采用半无限空间孔隙介质表面受点荷 $P = P_0 H(t)$ 作用的动力反应完成,这里 $H(t)$ 是 Heaviside 函数.Heaviside 集中力作用下,时域全空间快、慢纵波解耦的 Green 函数 u_{i-p} 表达可见附录。

1) 算例1 图1所示的是 12×12 的半无限空间表面方形区域,点荷载 P 作用的坐标原点位于区域中点.相关的材料参数取值如下^[37-38]:

$$\lambda = 2.74 \times 10^9 \text{ N/m}^2, \kappa = 8.0 \times 10^{-13} \text{ m}^4/(\text{N}\cdot\text{s}), \alpha = 0.779,$$

$$\mu = 5.85 \times 10^9 \text{ N/m}^2, M = 9.71 \times 10^9 \text{ N/m}^2, \rho = 2.27 \times 10^3 \text{ kg/m}^3, \varphi = 0.195.$$

参数依文献[37-38]无量纲化,这里: $\rho_f^* = \rho_f/\rho, \rho^* = 1, \lambda^* = \lambda/(\lambda + 2\mu + \alpha^2 M), \mu^* = \mu/(\lambda + 2\mu + \alpha^2 M), M^* = M/(\lambda + 2\mu + \alpha^2 M), \kappa^* = 1, m^* = m_b/\rho$.因此各材料参数无量纲值是: $\lambda^* = 0.3007, \rho^* = 1, \rho_f^* = 0.4325, \alpha^* = 0.779, m^* = 2.3006, M^* = 0.3742, \kappa^* = 1$.无量纲波速

应是: $\alpha_1^* = 1.0054$, $\alpha_2^* = 0.3679$, $\beta^* = 0.5721$. 为满足关系式 $c\Delta t \geq l$, 取无量纲的时间步长为 $\Delta t^* = 1$.

首先求取式(31)和(32)中各影响矩阵, 取距集中力作用点(原点)无量纲半径为5的场点分析, 图2~7显示了各影响矩阵标准化的时间曲线. 图中可以发现当 $\tau \approx 0.5$ 时 P_1 波到达, 当 $\tau \approx 1$ 时 S 波到达, S 波与 P_1 反相; 当 $\tau \approx 1.4$ 时 P_2 波到达该点, 振相与 S 波一致. 此是 Biot 1956 年的预见. 此外, 对于 G_{41} , G_{44} 等孔压影响矩阵, 由于孔压不受剪切波的影响, 其时间曲线只反映两类纵波的影响, 振幅图中清晰表明: P_1 波影响大, P_2 波影响小.

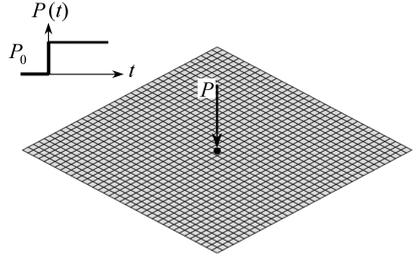


图1 半空间离散化模型

Fig. 1 Discretization model in semi-space

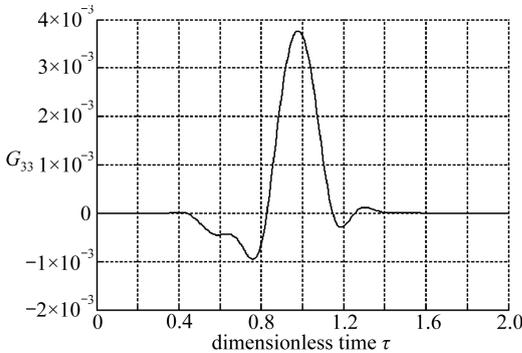


图2 $r^* = 5$ 处影响矩阵 G_{33}^{n,mi_j} 时间曲线

Fig. 2 The curve of influence matrix G_{33}^{n,mi_j} vs. time for $r^* = 5$

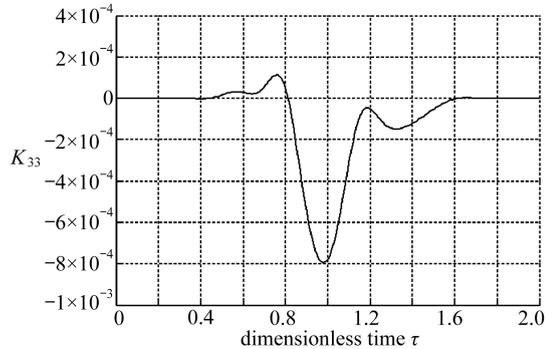


图3 $r^* = 5$ 处影响矩阵 K_{33}^{n,mi_j} 时间曲线

Fig. 3 The curve of influence matrix K_{33}^{n,mi_j} vs. time for $r^* = 5$

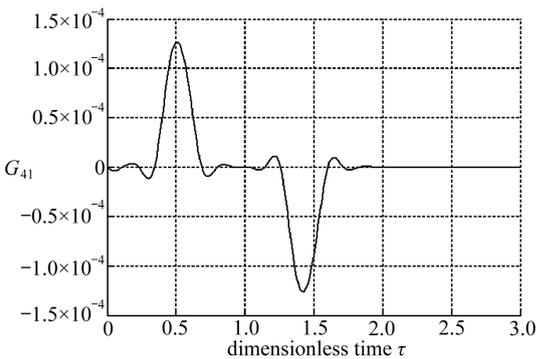


图4 $r^* = 5$ 处影响矩阵 G_{41}^{n,mi_j} 时间曲线

Fig. 4 The curve of influence matrix G_{41}^{n,mi_j} vs. time for $r^* = 5$

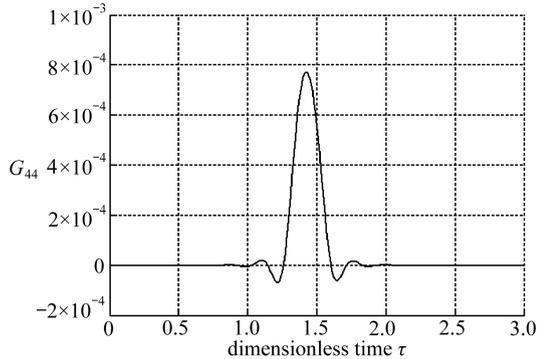


图5 $r^* = 5$ 处影响矩阵 G_{44}^{n,mi_j} 时间曲线

Fig. 5 The curve of influence matrix G_{44}^{n,mi_j} vs. time for $r^* = 5$

其次, 同样取 $r^* = 5$ 的场点对位移及孔压分析, 其时间曲线分别在图8、图9中. 在图8可以看到当 $\tau \approx 0.5$ 时, P_1 波到达; 而当 $\tau \approx 1$ 时 S 波到达, 产生反向初动位移, 继而达峰值; 当 $\tau \approx 1.4$ 时, P_2 波到达, P_2 初动位移影响小, 图中不显著. 在图9中还可以发现, 当 P_1 波到达, 孔压

开始增大后逐渐趋于稳定。

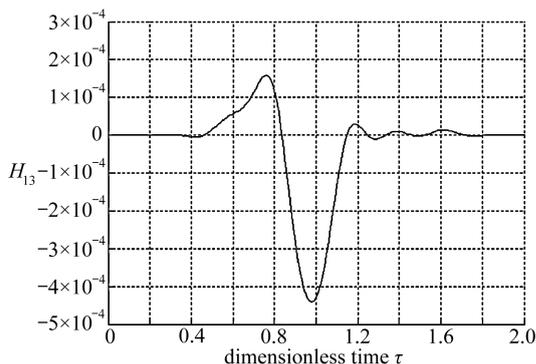


图 6 $r^* = 5$ 处影响矩阵 $H_{13}^{n,mij}$ 时间曲线

Fig. 6 The curve of influence matrix $H_{13}^{n,mij}$ vs. time for $r^* = 5$

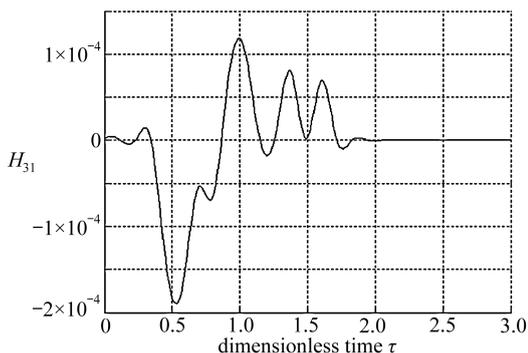


图 7 $r^* = 5$ 处影响矩阵 $H_{31}^{n,mij}$ 时间曲线

Fig. 7 The curve of influence matrix $H_{31}^{n,mij}$ vs. time for $r^* = 5$

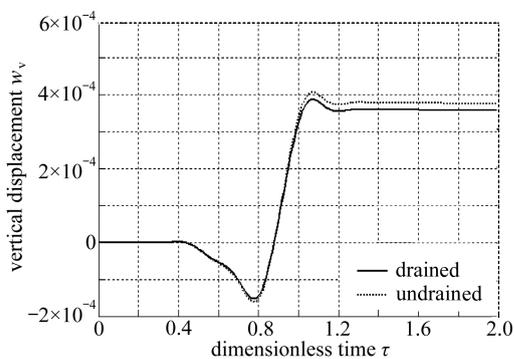


图 8 排水与不排水状态下竖向位移时间曲线

Fig. 8 The curves of drained and undrained displacement vs. time

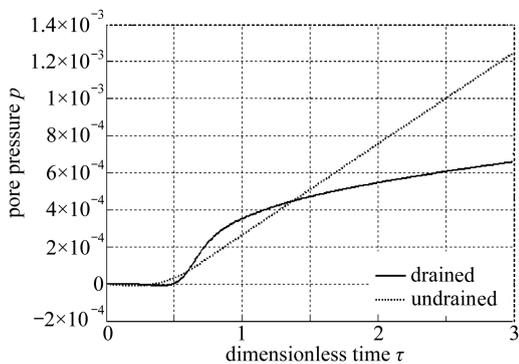


图 9 排水与不排水状态下孔压时间曲线

Fig. 9 The curves of drained and undrained pore pressure vs. time

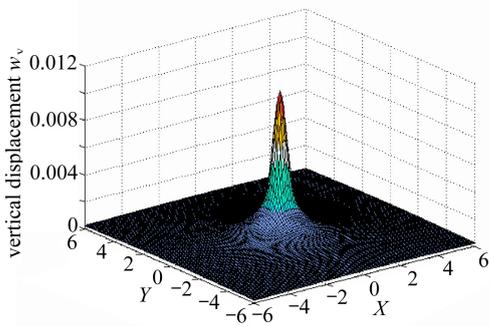


图 10 $\tau^* = 2$ 时竖向位移 3D 图

Fig. 10 The 3D plot of vertical displacement for $\tau^* = 2$

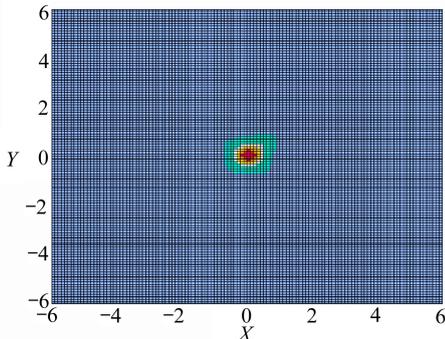


图 11 $\tau^* = 2$ 时竖向位移等高线图

Fig. 11 The contour plot of vertical displacement for $\tau^* = 2$

此外,图 10~13 是 $\tau^* = 2$ 时计算区域的竖向与水平位移的 3D 图与等高线图,图中可清楚发现集中力作用下竖向位移关于原点中心对称,而水平位移关于原点反对称。

图 14、15 分别是 Dirac 函数作用下孔压与位移,这里 P_1 波, S 波, P_2 波到时清晰。

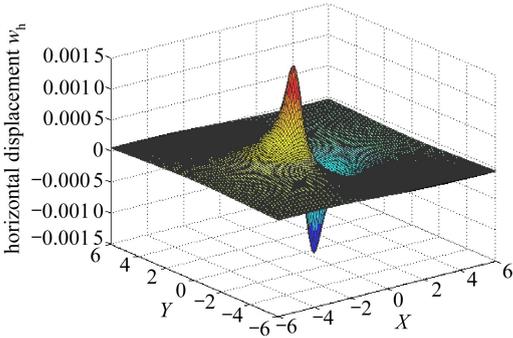


图 12 $\tau^* = 2$ 时水平位移 3D 图

Fig. 12 The 3D plot of horizontal displacement for $\tau^* = 2$

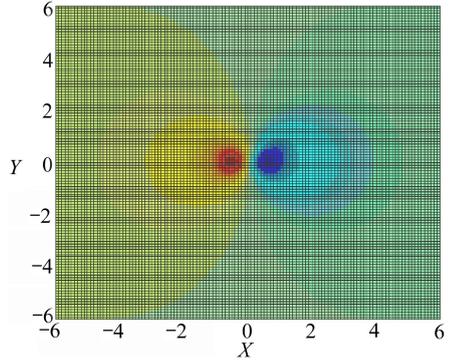


图 13 $\tau^* = 2$ 时水平位移等高线图

Fig. 13 The contour plot of horizontal displacement for $\tau^* = 2$

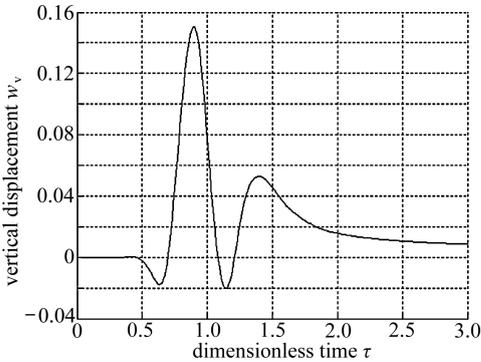


图 14 δ 函数下时竖向位移时间曲线

Fig. 14 The curve of vertical displacement vs. time under Dirac force

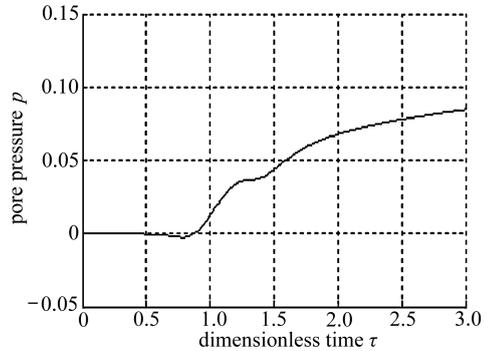


图 15 δ 函数下时孔压时间曲线

Fig. 15 The curve of pore pressure vs. time under Dirac force

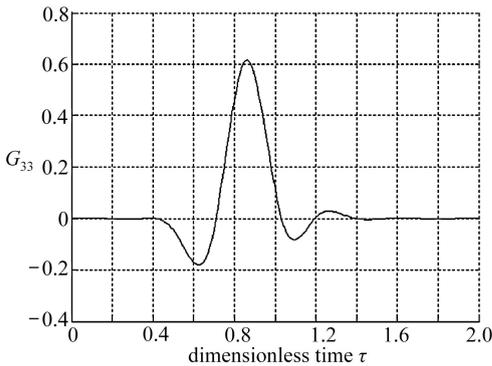


图 16 $r^* = 500$ 处影响矩阵 $G_{33}^{n,mij}$ 时间曲线

Fig. 16 The curve of influence matrix $G_{33}^{n,mij}$ vs. time for $r^* = 500$

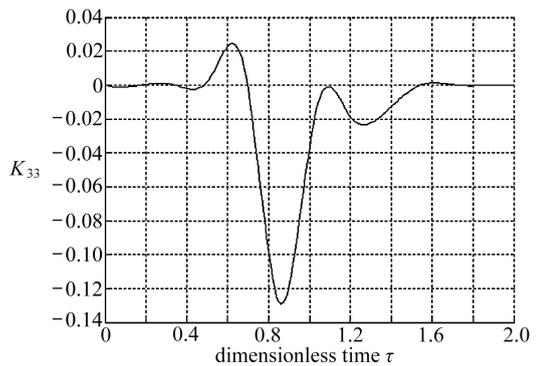


图 17 $r^* = 500$ 处影响矩阵 $K_{33}^{a,mij}$ 时间曲线

Fig. 17 The curve of influence matrix $K_{33}^{a,mij}$ vs. time for $r^* = 500$

2) 算例 2 这里计算区域为 $1\,000 \times 1\,000$, 受力情况和材料参数同算例 1. 单元格比算例 1 稍大, 时间步长为 $\Delta t^* = 15$. 图 16 ~ 21 所示是 $r^* = 500$ 处的各影响矩阵标准化的时间曲线, 曲线形状与算例 1 基本对应相似.

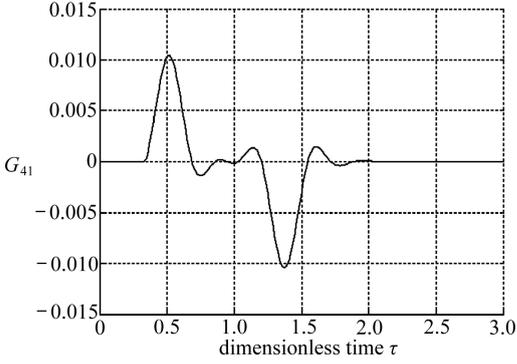


图 18 $r^* = 500$ 处影响矩阵 $G_{41}^{n,mij}$ 时间曲线

Fig. 18 The curve of influence matrix $G_{41}^{n,mij}$ vs. time for $r^* = 500$

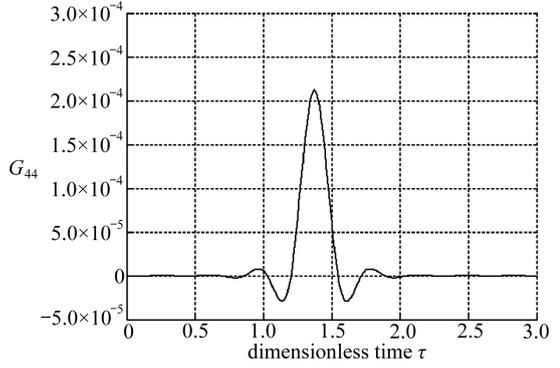


图 19 $r^* = 500$ 处影响矩阵 $G_{44}^{n,mij}$ 时间曲线

Fig. 19 The curve of influence matrix $G_{44}^{n,mij}$ vs. time for $r^* = 500$

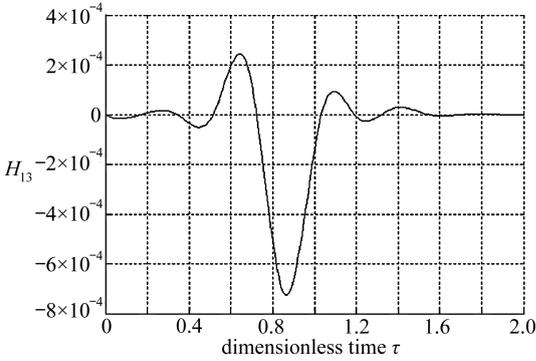


图 20 $r^* = 500$ 处影响矩阵 $H_{13}^{n,mij}$ 时间曲线

Fig. 20 The curve of influence matrix $H_{13}^{n,mij}$ vs. time for $r^* = 500$

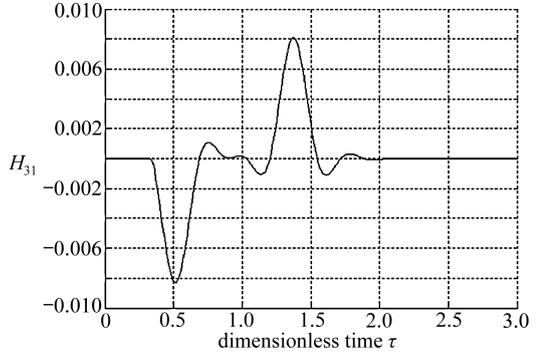


图 21 $r^* = 500$ 处影响矩阵 $H_{31}^{n,mij}$ 时间曲线

Fig. 21 The curve of influence matrix $H_{31}^{n,mij}$ vs. time for $r^* = 500$

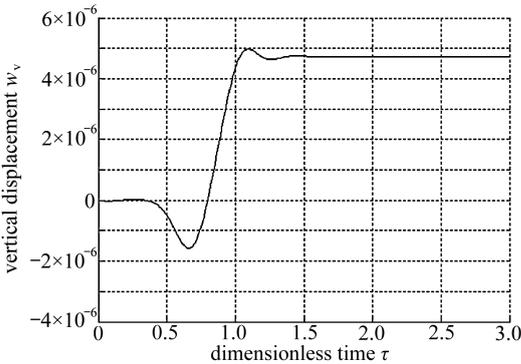


图 22 $r^* = 500$ 处竖向位移时间曲线

Fig. 22 The curve of vertical displacement vs. time for $r^* = 500$

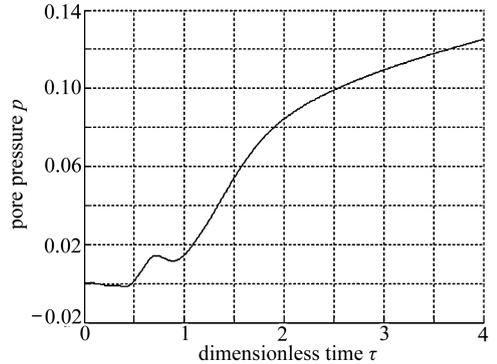


图 23 $r^* = 500$ 处孔压时间曲线

Fig. 23 The curve of pore pressure vs. time for $r^* = 500$

图 22、23 所示是 $r^* = 500$ 处的位移以及孔压的时间曲线,该曲线的主要形状特征也与算例 1 基本相似。

同样地,如将 $\tau^* = 4$ 时全区域的竖向、水平位移与孔压的 3D 图与等高线图分别示于图 24

~29 中,从中可以更加清楚地了解波传播的特性。

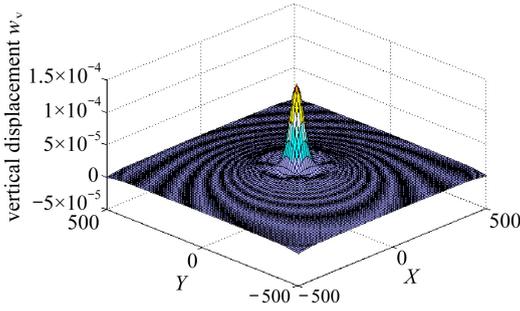


图 24 $\tau^* = 4$ 时竖向位移三维立体图
Fig. 24 The 3D plot of vertical displacement for $\tau^* = 4$

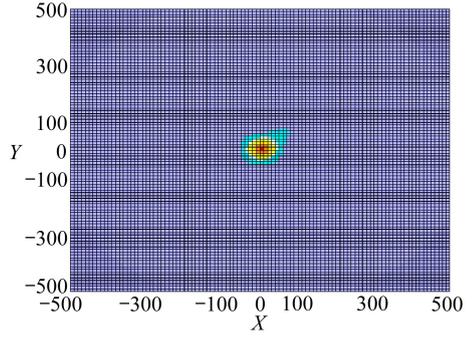


图 25 $\tau^* = 4$ 时竖向位移等高线图
Fig. 25 The contour plot of vertical displacement for $\tau^* = 4$

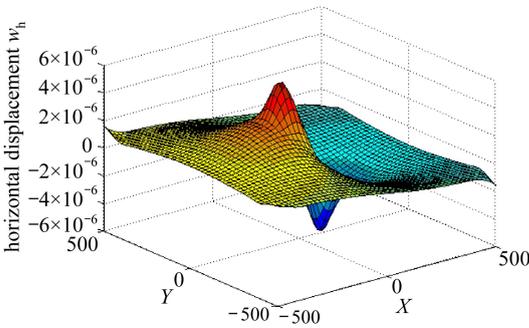


图 26 $\tau^* = 4$ 时水平位移三维立体图
Fig. 26 The 3D plot of horizontal displacement for $\tau^* = 4$

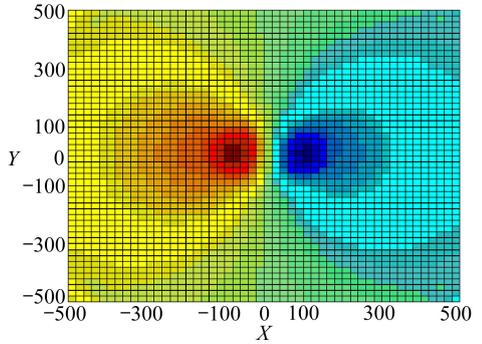


图 27 $\tau^* = 4$ 时水平位移等高线图
Fig. 27 The contour plot of horizontal displacement for $\tau^* = 4$

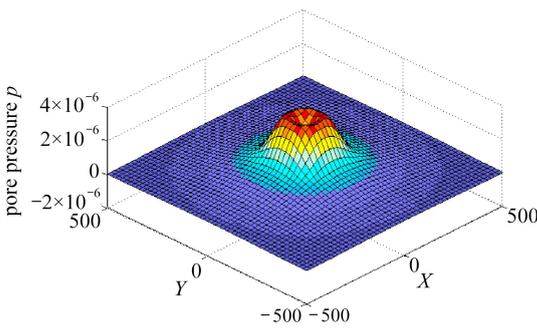


图 28 $\tau^* = 4$ 时孔压三维立体图
Fig. 28 The 3D plot of the pore pressure for $\tau^* = 4$

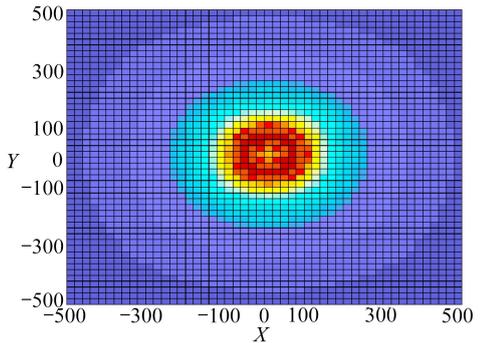


图 29 $\tau^* = 4$ 时孔压等高线图
Fig. 29 The contour plot of the pore pressure for $\tau^* = 4$

4.3 优化与改进

由于荷载响应存在对称性,可以取 1/4 区域计算,但边界条件需重新定义。全区域计算时,采用的边界条件仅为原点受有单位竖向荷载。在取 1/4 区域计算时,相关 1/4 区域边界的水平位移存在约束。也就是说,在 1/4 区域计算的情况下,其边界条件不再仅是原点受集中力作用,

而且也受到了边界处的水平向约束,在编程计算中需引入这一条件,以保证计算的准确性.表 1 是全区域与 1/4 区域计算用时比较.

需要说明的是在取 1/4 区域计算时,为了提高精度,已将单元进一步细分,因此机时有多一些消耗.不过从表 1 还是可以看出,采取 1/4 区域计算时,机时消耗会有明显的改善,有益于 BEM 计算的完善与提效.

表 1 全区域与 1/4 区域计算用时比较

Table 1 Comparison of computation time between integration over whole area and 1/4 area

influence matrix	type	
	whole area	1/4 area
G_{33}	118.024 s	65.786 s
G_{41}	42.314 s	29.171 s
G_{42}	40.647 s	31.074 s
G_{44}	26.544 s	18.980 s
K_{33}	126.458 s	89.628 s
H_{13}	65.024 s	46.134 s
H_{23}	65.411 s	50.314 s
H_{31}	206.163 s	146.252 s
H_{32}	205.169 s	145.411 s
H_{34}	126.422 s	77.064 s
main program	314.88 s	206.735 s

5 结 论

在孔隙介质的时域 BEM 计算中,由于相关 Green 函数过于复杂及计算过程中奇异性处理基本无法可循,孔隙介质的时域 BEM 计算一直未见诸文献.本文根据 Biot 饱和孔隙介质的动力学方程,结合快、慢纵波解耦以及 Stokes 状态转换得到时域 Green 函数.以 BEM 完成了外力作用下饱和孔隙介质的动力响应,并采用无量纲材料参数进行了数值计算.结果表明:

- 1) 借助纵波解耦与 Stokes 状态转换求得的 Biot 孔隙动力方程,快、慢纵波与横波独立的时域 Green 函数 u_i-p 表达能方便地用于孔隙介质边值问题的 BEM 计算.
- 2) Stokes 状态在经典弹性动力学中具有丰富的研究成果^[28].BEM 配点位移与应力的 $1/r$ 型弱奇异及 $1/r^2$ 型强奇异的处理等都已有了成熟的结果.孔隙动力学基本解答以相应的 Stokes 状态表达.参照已有成果,可以方便地解决计算中的奇异性问题.
- 3) 在孔隙动力学问题计算中,利用合适的几何或物理特性可明显改善机时消耗.
- 4) 上述方法和结果会对两相饱和和介质动力响应等相关问题研究提供一些新的途径.

附 录

订正后的 Heaviside 力作用的流相 Green 函数

$$\begin{aligned}
 G_{ij} = & \frac{1}{4\pi} D_0 \left\{ \frac{r_{,i}r_{,j}}{r} \left[\lambda_1 H\left(t - \frac{r}{\alpha_1}\right) - \lambda_2 H\left(t - \frac{r}{\alpha_2}\right) - H\left(t - \frac{r}{\beta}\right) \right] + \right. \\
 & \left. \frac{\delta_{ij}}{r} H\left(t - \frac{r}{\beta}\right) + 3 \frac{r_{,i}r_{,j}}{r^3} \left[\alpha_1^2 \lambda_1 \frac{1}{2} \left(t^2 - \frac{r^2}{\alpha_1^2}\right) - \alpha_2^2 \lambda_2 \frac{1}{2} \left(t^2 - \frac{r^2}{\alpha_2^2}\right) - \beta^2 \frac{1}{2} \left(t^2 - \frac{r^2}{\beta^2}\right) \right] \right\}, \quad (A1) \\
 G_{4i} = & \frac{M}{4\pi} D_0 \left\{ \lambda_1 (\alpha + \xi_1 - \xi_1 T) \frac{r_{,i}}{r^2} H\left(t - \frac{r}{\alpha_1}\right) - \lambda_2 (\alpha + \xi_2 - \xi_2 T) \frac{r_{,i}}{r^2} H\left(t - \frac{r}{\alpha_2}\right) + \right.
 \end{aligned}$$

$$\lambda_1(\alpha + \xi_1 - \xi_1 T) \frac{1}{\alpha_1} \frac{r_{,i}}{r} \delta\left(t - \frac{r}{\alpha_1}\right) - \lambda_2(\alpha + \xi_2 - \xi_2 T) \frac{1}{\alpha_2} \frac{r_{,i}}{r} \delta\left(t - \frac{r}{\alpha_2}\right) -$$

$$[\lambda_1(\alpha + \xi_1 - \xi_1 T) - \lambda_2(\alpha + \xi_2 - \xi_2 T)] \frac{r_{,i}}{r^2} \text{H}\left(t - \frac{r}{\alpha_2}\right) -$$

$$\frac{1}{\alpha_2} [\lambda_1(\alpha + \xi_1 - \xi_1 T) - \lambda_2(\alpha + \xi_2 - \xi_2 T)] \frac{r_{,i}}{r} \delta\left(t - \frac{r}{\alpha_2}\right) \left. \right\}, \quad (\text{A2})$$

$$G_{i4} = \frac{M}{4\pi} D_0 \left\{ \lambda_1(\alpha + \xi_1 - \xi_1 T_1) \frac{r_{,i}}{r^2} \left(t - \frac{r}{\alpha_1}\right) \text{H}\left(t - \frac{r}{\alpha_1}\right) -$$

$$\lambda_2(\alpha + \xi_2 - \xi_2 T) \frac{r_{,i}}{r^2} \left(t - \frac{r}{\alpha_2}\right) \text{H}\left(t - \frac{r}{\alpha_2}\right) +$$

$$\lambda_1(\alpha + \xi_1 - \xi_1 T) \frac{1}{\alpha_1} \frac{r_{,i}}{r} \text{H}\left(t - \frac{r}{\alpha_1}\right) - \lambda_2(\alpha + \xi_2 - \xi_2 T) \frac{1}{\alpha_2} \frac{r_{,i}}{r} \text{H}\left(t - \frac{r}{\alpha_2}\right) -$$

$$[\lambda_1(\alpha + \xi_1 - \xi_1 T) - \lambda_2(\alpha + \xi_2 - \xi_2 T)] \frac{r_{,i}}{r^2} \left(t - \frac{r}{\alpha_2}\right) \text{H}\left[t - \frac{r}{\alpha_2}\right] -$$

$$\frac{1}{\alpha_2} [\lambda_1(\alpha + \xi_1 - \xi_1 T) - \lambda_2(\alpha + \xi_2 - \xi_2 T)] \frac{r_{,i}}{r} \text{H}\left(t - \frac{r}{\alpha_2}\right) +$$

$$\lambda_2 \xi_2 \frac{1}{\alpha_2^2} r_{,i} \text{H}\left(t - \frac{r}{\alpha_2}\right) + \lambda_2(\alpha + \xi_2) \frac{1}{\alpha_2} \frac{r_{,i}}{r} \text{H}\left(t - \frac{r}{\alpha_2}\right) \left. \right\}. \quad (\text{A3})$$

参考文献 (References):

- [1] Biot M A. General theory of three-dimensional consolidation[J]. *Journal of Applied Physics*, 1941, **12**(2): 155-164.
- [2] Frenkel J. On the theory of seismic and seismoelectric phenomena in a moist soil[J]. *Journal of Physics*, 1944, **13**(4): 230-241.
- [3] Biot M A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid—1: low frequency range[J]. *J Acoust Soc Am*, 1956, **28**(2): 168-178.
- [4] Biot M A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid—2: higher frequency range[J]. *J Acoust Soc Am*, 1956, **28**(2): 179-191.
- [5] Biot M A, Willis D G. The elastic coefficients of the theory of consolidation[J]. *J Appl Mech*, 1957, **24**: 594-601.
- [6] Biot M A. Generalized theory of acoustic propagation in porous dissipative media[J]. *J Acoust Soc Am*, 1962, **34**(5): 1254-1264.
- [7] Bowen R M. Incompressible porous media models by use of the theory of mixtures[J]. *Int J Engng Sci*, 1980, **18**(9): 1129-1148.
- [8] Bowen R M. Compressional porous media models by use of the theory of mixtures[J]. *Int J Engng Sci*, 1982, **20**(6): 697-735.
- [9] Plona T J. Observation of a second bulk compressional wave in a porous medium at ultrasonic frequencies[J]. *Appl Phys Lett*, 1980, **36**(4): 259-261.
- [10] 丁伯阳. 含裂隙介质受压破裂前地震波特性的综合实验研究与理论分析[J]. 西北地震学报, 1983, **5**(5): 21-33. (DING Bo-yang. Experimental study and theoretical analysis of seismic wave characteristics before the cracks and pore medium[J]. *Northwestern Seismological Journal*, 1983, **5**(5): 21-33. (in Chinese))
- [11] Plona T J, Johnson D L. Acoustic properties of porous systems—I: phenomenological description[C]//*Physics and Chemistry of Porous Media*. New York; Johnson D L, Sen P N,

- 1984; 89-104.
- [12] Burrigge R, Vargas C A. The fundamental solution in dynamic poroelasticity[J]. *Geophys J Roy Astron Soc*, 1979, **58**(1): 61-90.
- [13] Manolis G D, Beskos D E. Integral formulation and fundamental solutions of dynamic poroelasticity and thermoelasticity[J]. *Acta Mechanica*, 1989, **76**(1/2): 89-104.
- [14] Manolis G D, Beskos D E. Errata in integral formulation and fundamental solutions of dynamic poroelasticity and thermoelasticity[J]. *Acta Mechanica*, 1990, **83**(3/4): 223-226.
- [15] Norris A N. Radiation from a point source and scattering theory in a fluid saturated porous solid[J]. *J Acoust Soc Am*, 1985, **77**(6): 2012-2023.
- [16] Nowacki W. *Dynamics Problems of Thermoelasticity*[M]. Noordhoff, 1975.
- [17] Senjuntichai T, Rajapakse R K N D. Dynamic Green's functions of homogeneous poroelastic half-plane[J]. *Journal Engineering Mechanics, ASCE*, 1994, **120**(11): 2381-2464.
- [18] Halpern M R, Christiano P. Response of poroelastic half space to steady-state harmonic surface tractions[J]. *Int J Numer Anal Meth Geomech*, 1986, **10**(6): 609-632.
- [19] Kaynia A M, Banerjee P K. Fundamental solutions of Biot's equation of dynamic poroelasticity[J]. *Int J Engng Sci*, 1993, **31**(5): 817-830.
- [20] Auriault J L, Borne L, Chambon R. Dynamics of porous saturated media, checking of the generalized law of Darcy[J]. *J Acoust Soc Am*, 1985, **77**(5): 1641-1650.
- [21] Auriault J L. Dynamic behaviour of a porous medium saturated by a Newtonian fluid[J]. *Int J Engng Sci*, 1980, **18**(6): 775-785.
- [22] Cleary M P. Fundamental solutions for a fluid-saturated porous solid[J]. *Int J Solid Struct*, 1977, **13**(9): 785-806.
- [23] Philippacopoulos A J. Waves in a partially saturated layered half-space analytic formulation [J]. *Bull Seism Soc Am*, 1987, **77**(5): 1838-1853.
- [24] Philippacopoulos A J. Lamb's problem for fluid-saturated porous media[J]. *Bull Seism Soc Am*, 1988, **78**(2): 908-923.
- [25] Bonnet G. Basic singular solutions for a poroelastic medium in the dynamic range [J]. *J Acoust Soc Am*, 1987, **82**(5): 1758-1762.
- [26] Cheng A H D, Badmus T, Beskos D E. Integral equation for dynamic poroelasticity in frequency domain with BEM solution[J]. *Journal Engineering Mechanics*, 1991, **117**(5): 1136-1157.
- [27] Cheng A H D, Detournay E. On singular integral equations and fundamental solutions of poroelasticity[J]. *Int J Solids Struct*, 1998, **35**(34/35): 4521-4555.
- [28] Erigen A C, Suhubi E S. *Elastodynamics—II; Linear Theory*[M]. New York: Academic, 1975.
- [29] Cheng A H D, Detournay E. A direct boundary element method for plane strain poroelasticity [J]. *Int J Numer Anal Meth Geomech*, 1988, **12**(5): 551-572.
- [30] Manolis G D. A comparative study on three boundary element method approaches to problems in elastodynamics[J]. *Int J Numer Meth Engng*, 1983, **19**(1): 73-91.
- [31] Banerjee P K, Ahmad S, Manolis G D. Transient elastodynamic analysis of three-dimensional problems by boundary element method[J]. *Earthquake Engng Struct Dyn*, 1986, **14**(6): 933-949.
- [32] Dominguez J. *Boundary Elements in Dynamics*[M]. Southampton/London: Computational Mechanics Publications/Elsevier, 1993.
- [33] Dominguez J, Marrero M. Numerical behavior of time domain BEM for three-dimensional

- transient elastodynamic problems[J]. *Engng Analysis With Boundary Elements*, 2003, **27**(1): 39-48.
- [34] 姚振汉, 王海涛. 边界元法[M]. 北京: 高等教育出版社, 2010. (YAO Zhen-han, WANG Hai-tao. *Boundary Element Methods*[M]. Beijing: Higher Education Press, 2010. (in Chinese))
- [35] Ariza M P, Saez A, Dominguez J. A singular element for three dimensional fracture mechanics analysis[J]. *Engng Anal Bound Elem*, 1997, **20**(4): 275-285.
- [36] Chen J. Time domain fundamental solutions to Biot's complete equations of dynamic poroelasticity—part I: two-dimensional solution[J]. *Int J Solid Struct*, 1994, **31**(10): 1447-1490.
- [37] Chen J. Time domain fundamental solutions to Biot's complete equations of dynamic poroelasticity—part II: three-dimensional solution[J]. *Int J Solid Struct*, 1994, **31**(2): 169-202.
- [38] DING Bo-yang, Alexander H D Cheng, CHEN Zhang-long. Fundamental solutions of poroelastodynamics in frequency domain based on wave decomposition[J]. *J Appl Mech*, 2013, **80**(5): 061021(1)-061021(12).
- [39] Ding B Y, Yuan J H. Dynamic Green's functions of a two-phase saturated medium subjected to a concentrated force[J]. *Int J Solids Struct*, 2011, **48**(16/17): 2288-2303.
- [40] 丁伯阳, 党改红, 袁金华. 伴有排水的两相饱和介质动力问题的 LAMB 积分公式[J]. 应用数学和力学, 2010, **31**(9): 1066-1074. (DING Bo-yang, DANG Gai-hong, YUAN jin-hua. Lamb's integral formulas of two-phase saturated medium for soil dynamic with drainage[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2010, **31**(9): 1066-1074. (in Chinese))

Time-Domain BEM Calculation for Porodynamics

DING Bo-yang, JIANG Jia-qi

(College of Civil Engineering, Zhejiang University of Technology,
Hangzhou 310014, P.R.China)

Abstract: The boundary element method (BEM) in time domain was employed for the dynamic analysis of saturated porous media subjected to external forces. Based on Biot's porodynamic equations, the U-P formulation of Green's function obtained through decoupling of the fast and slow dilational waves, the transformation of Stokes' state as well as Somigliana's representation, the discretization forms of the boundary integration equations in time domain were discussed in detail. Specially, with the aid of achievement for a single-phase medium, the singularity in the integration of the BEM for a porous medium was successfully treated in numerical implementation. Finally, in several examples, the response results of the displacements and pore pressures from numerical calculation with dimensionless material parameters were presented. Since the time-domain BEM calculation is hardly found in porodynamics as yet, the proposed method makes a new way for the research of dynamic response of 2-phase saturated porous media.

Key words: BEM in time domain; saturated porous medium; dynamic response; Green's function; singularity treatment

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11172268;51478435)