

无限深水中具有指数密度变率的 周期性永形内波渐进解析解*

邹丽^{1,2}, 宗智^{1,2}, 王振^{3,4}, 赵勇⁵, 梁辉^{1,2}

- (1. 工业装备结构分析国家重点实验室(大连理工大学), 辽宁 大连 116024;
2. 大连理工大学 船舶工程学院, 辽宁 大连 116024;
3. 大连理工大学 数学科学学院, 辽宁 大连 116024;
4. 伦敦大学学院 机械工程学院, 英国 伦敦;
5. 大连海事大学 交通运输装备与海洋工程学院, 辽宁 大连 116026)

摘要: 采用同伦分析方法研究了一系列有限振幅的周期深水驻波问题,水密度在垂直方向的分布可以是变化的,假设为指数连续分布.提出一种新形式的偏微分方程作为辅助方程,获得解的新的表达形式来满足底部的边界条件和无限大的刚性假设.给出了解的表达式中系数的递推关系和周期海洋内波形成的永久驻波的显式表达式.得到垂直方向和水平方向的全局收敛解,揭示了密度变率和内波幅度间的关系.同伦分析方法对求解具有指数密度率周期性的永形波解是一致有效的.

关键词: 内波; 深水波; 非线性; 指数密度

中图分类号: O242.1 **文献标志码:** A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2015.01.009

引 言

海浪大致可分为表面波和内波.表面波产生于流体密度剧烈变化的海洋和空气的交界处.表面波一经形成,其运动就受重力支配.除非研究对象的空间尺寸比典型的波长大多或者研究对象的时间跨度比典型波周期长得多,否则液体的粘性带来的影响可忽略不计.表面扰动随深度而衰减,在水表面一个波长处变得可以忽略不计.在这个深度范围内,液体的密度变化可以忽略.鉴于此,表面波的运动由 Laplace(拉普拉斯)方程和非线性动力学以及自由表面的运动学边界条件而定.对一般的表面波,决定参数是水深、波长、波高,而频率通常和波数有关.参数的不同产生了各种各样的海浪.

内波产生因密度随深度的变化,在水下密度不再是常数.内波的研究历史不长,部分原因是内波不像表面波那样容易观察到.大多数对内波的兴趣开始于与海洋设备有关的事件、应用数学和遥感测量等领域.特别地,随着海洋工程的逐渐深入,必须考虑内波特性.

* 收稿日期: 2014-10-14; 修订日期: 2014-12-17

基金项目: 国家重点基础研究发展计划(973计划)(2013CB036101);国家自然科学基金(51109031; 51379033; 51221961; 51309040; 51279030; 51239002)

作者简介: 邹丽(1981—),女,辽宁盘锦人,副教授,博士(通讯作者. Tel: +86-411-84706373; E-mail: lizou@dlut.edu.cn).

一般来说,内波可以像表面波理论一样,分为孤立波和周期波.迄今为止,在孤立波领域开展了很多工作.Keulegan^[1]和 Long^[2]通过摄动法第一次研究了具有固定边界的双流体系统. Peters 和 Stoker^[3], Ter-Krikorov^[4]基于自由上表面和连续变化密度处理了相似的问题. Bona, Bose 和 Turner^[5]给出了分层流体中关于孤立重力内波的确切理论. Benjamin^[6]给出了永久内部孤波的一个完整物理应用分类. Benjamin^[7]给出了诸如 $f(x) = a\lambda^2/(x^2 + \lambda^2)$ 形式的一类新孤立内波的一般理论处理方法,文中还探讨了3种不同密度分布下的解法. King, Carr 和 Dritschel^[8]对具有固定边界的分层流体的大振幅孤立内波进行了稳态研究. Helfrich 和 Melville^[9]对孤立内波的稳态特性进行了综述.

周期内波相比孤立波受到关注较少. Lamb^[10], Benjamin^[6-7]使用和孤立波相同的方法研究了极深流体里的椭圆余弦波. Camassa, Rusas, Saxena 和 Tiron^[11]研究了双流体系统里的完全非线性周期内波. Broeck 和 Turner^[12]发现长周期波在由密度连续变化的区域所隔开的包含常值密度的隧道内传播. Turner^[13]研究了快速变化的密度下的孤立波和周期波.

在本文中,第1节阐述了所要解决的问题.第2节里通过同伦分析法(homotopy analysis method,以下简称HAM)加以解决.第3节给出了包括分布关系,压力场和流速场的结果.第4节对该问题作了总结.

1 物理问题的数学描述

假设有限振幅的内波产生在具有刚性水平底部的理想流体,在底部建立直角坐标系 Oxy .

只处理具有永久形式的行波,也就是说当观察者以与波的相速度一致的速度运动时,波形相对观察者是平稳的.一般流动方向为从左到右.假设流体不可压,这意味着密度 ρ 满足

$$\frac{d\rho}{dt} = u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y}, \quad (1)$$

其中 u, v 分别是 x, y 方向上的速度分量.注意到由于只考虑运动系统里的静态情形,方程中并不含 $d\rho/dt$, 系统的连续性方程和动量方程为

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2)$$

$$\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p - \rho \nabla gy, \quad (3)$$

其中 $\mathbf{u} = ui + vj$ 是速度向量, p 是压力, g 是重力加速度.运动的边界方程为

$$\begin{cases} v = 0, & y = 0, \\ u = 0, & y = \infty. \end{cases} \quad (4)$$

方便起见,引入符号 ψ , 定义为

$$\psi_y = u, \quad \psi_x = -v. \quad (5)$$

式(1)中,当 ψ 为常值时, ρ 也是常值.这意味着 $\rho = \rho(\psi)$. 根据式(5)的定义知,式(2)自动满足.对式(3)引入 Dubreil-Jacotin 变换^[14-16], 给出 Dubreil-Jacotin-Long 方程:

$$\nabla^2 \psi + \frac{\rho_\psi}{\rho} \left[gy + \frac{1}{2} (\nabla \psi)^2 \right] = \frac{1}{\rho} \frac{dQ}{d\psi},$$

其中

$$Q(\psi) = p + \frac{\rho}{2}(u^2 + v^2) + \rho gy$$

是 Bernoulli(伯努利)常数.假设远在 $x = x_0$ 之前,流体未受扰.在运动系统里 $u = c, v = 0, \psi = cy$

在 $x = x_0, c$ 是波速, 有

$$Q = p_0 + \frac{\rho c^2}{2} + \rho g \frac{\psi}{c}, \quad (6)$$

其中 $p_0 = - \int \rho g dy = - \frac{g}{c} \int \rho d\psi$ 代表静压. 给出

$$\frac{dQ}{d\psi} = \frac{d\rho}{d\psi} \left(\frac{g\psi}{c} + \frac{c^2}{2} \right). \quad (7)$$

注意方程(7)在 ψ 是常值的线上是有效的, 式(6)可写作

$$\nabla^2 \psi + \frac{\rho_\psi}{\rho} \left[g \left(y - \frac{\psi}{c} \right) + \frac{1}{2} (\psi_x^2 + \psi_y^2 - c^2) \right] = 0. \quad (8)$$

式(4)的边界条件变成

$$\begin{cases} \psi = 0, & y = 0, \\ \psi_y = c, & y = \infty, \end{cases} \quad (9)$$

其中取附加常数为 0, $x = x_0$ 时, 流体未受扰, 有 $\rho = \rho(\psi) = \rho(cy)$, 这表明密度只在竖直方向变化. 对稳定运动, 这需要 $\rho_y \leq 0$ ^[17]. 这里考虑密度按指数变化:

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 e^{-\beta\psi}, \quad \beta > 0. \quad (10)$$

如图 1 所示, 式(6)看似简洁, 但由于要满足式(10), 其实是很复杂的. 当没有逆流, 也就是说对给定的 x, ψ 是垂直坐标系上的单调函数. 选择不同流线的高度 y 作为独立变量, 让它作为 x 和 ψ 的函数, 或者 $y = y(x, \psi)$, 则速度 u 和 v 有下式:

$$u = \psi_y = \frac{1}{y_\psi}, \quad v = -\psi_x = \frac{y_x}{y_\psi}. \quad (11)$$

这里给出

$$\begin{cases} \psi_{xx} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \psi_x \frac{\partial}{\partial \psi} \right) \left(\frac{y_x}{y_\psi} \right) = -\frac{y_{xx}}{y_\psi} + \frac{2y_x y_{x\psi}}{y_\psi^2} - \frac{y_x^2 y_{\psi\psi}}{y_\psi^3}, \\ \psi_{yy} = \psi_y \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{1}{y_\psi} \right) = -\frac{y_{\psi\psi}}{y_\psi^3}. \end{cases} \quad (12)$$

将式(11)、(12)代入到式(8), 得到关于 y 和 ψ 的新关系式:

$$(1 + y_x^2) y_{\psi\psi} - 2y_x y_{x\psi} y_\psi + y_{xx} y_\psi^2 = \frac{\rho_\psi}{\rho} \left[y_\psi^3 g \left(y - \frac{\psi}{c} \right) + \frac{1}{2} y_\psi (y_x^2 - y_\psi^2 c^2 + 1) \right], \quad (13)$$

式(10)里对应的边界条件可写作

$$\begin{cases} y = 0, & \psi = 0, \\ y \rightarrow \frac{\psi}{c}, & \psi \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (14)$$

惯例采用无量纲变量, 对波长为 λ 的周期波, $k = 2\pi/\lambda$ 是波数. 定义如下的无量纲变量:

$$x^* = kx, \quad y^* = ky, \quad \psi^* = \frac{k}{c} \psi.$$

式(13)和(14)变为

$$\frac{c^2}{c_0^2} \left[(1 + y_x^2) y_{\psi\psi} - 2y_x y_{x\psi} y_\psi + y_{xx} y_\psi^2 \right] = \frac{\rho_\psi}{\rho} \left[y_\psi^3 (y - \psi) + \frac{c^2}{2c_0^2} y_\psi (y_x^2 - y_\psi^2 + 1) \right], \quad (15)$$

$$\begin{cases} y = 0, & \psi = 0, \\ y \rightarrow \psi, & \psi \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (16)$$

其中 $c_0^2 = g/k$, 这里为简便起见去掉了上标*. 对式(10), 进一步定义如下参数:

$$x \rightarrow \frac{1}{\beta'} x, \quad y \rightarrow \frac{1}{\beta'} y, \quad \psi \rightarrow \frac{1}{\beta'} \psi, \quad \gamma \rightarrow \beta' \gamma, \quad (17)$$

其中 $\beta' = \beta c/k$. 式(15)和(16)将返回原格式. 式(10)中的密度可写作

$$\rho = 1 + \varepsilon e^{-\psi}, \quad (18)$$

其中 $\varepsilon = \rho_1/\rho_0$, 这里指定 $\varepsilon = 0.5$.

如果设扰动流场和沿流线的未扰动区的 Bernoulli 常数相同, 用 $\rho_1 c^2$ 无量纲化后, 可得

$$\begin{aligned} p - p_0 = \rho \left[\frac{1}{2} (1 - \psi_x^2 - \psi_y^2) + \gamma (\psi - y) \right] = \\ \rho \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{y_\psi^2} - \frac{y_x^2}{y_\psi^2} \right) + \frac{c_0^2}{c^2} (\psi - y) \right], \end{aligned} \quad (19)$$

γ 和 ρ 分别在式(17)和(18)中定义.

2 解的构造

如上所述, 本文试图求取 x 方向上的周期解, 经过无量纲化后, 周期为 2π . 选择沿着 $\psi = 1$ 流线的波高:

$$H = y(0, 1) - y(\pi, 1). \quad (20)$$

对给定的 H 求解方程. 解的 x 项可扩展成余弦级数形式. 基于边界条件式(15), 可写成关于 ψ 的多项式:

$$y = \psi + (1 - e^{-\psi}) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \alpha_{n,m,s} \psi^s e^{-\sqrt{n^2+1}\psi} \cos(mx).$$

接下来就是利用 HAM^[18] 通过式(15)求取未知系数 $\alpha_{n,m}$. HAM 方法求解首先是对解的一个近似估计, 可取为

$$y_0(x, \psi) = \psi + H(1 - e^{-\sqrt{2}\psi}) e^{-\sqrt{2}\psi} \cos(x). \quad (21)$$

上式满足式(19)的边界条件, 但是不满足式(15). 通过 HAM 将构造一个函数将式(19)转化为式(15)的解.

令 $q \in [0, 1]$, h 是非零辅助参数, 构建 HAM 衍化方程为(其中 $\Gamma(q)$ 是 q 的函数)

$$(1 - q)L[Y(x, \psi; q) - y_0(x, \psi)] = hqN[Y(x, \psi; q), \Gamma(q)]. \quad (22)$$

边界条件为

$$\begin{cases} Y(x, \psi; q) = 0, & \psi = 0, \\ Y(x, \psi; q) \rightarrow \infty, & \psi \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (23)$$

约束条件为

$$H = Y(0, 1; q) - Y(\pi, 1; q). \quad (24)$$

定义如下的非线性算子:

$$\begin{aligned} N[Y(x, \psi; q), \Gamma(q)] = \rho \Gamma \left[(1 + Y_x^2) Y_{\psi\psi} - 2Y_x Y_{x\psi} Y_\psi + Y_{xx} Y_\psi^2 \right] - \\ \rho_\psi \left[Y_\psi^3 (Y - \psi) + \frac{\Gamma}{2} Y_\psi (Y_x^2 - Y_\psi^2 + 1) \right]. \end{aligned}$$

L 是线性算子,且 $L[0] = 0$,当 q 从 0 变到 1, $Y(x,\psi;q)$ 从

$$Y(x,\psi;0) = y_0(x,\psi), \Gamma(0) = F_0$$

变到

$$Y(x,\psi;1) = y(x,\psi), \Gamma(1) = \frac{c^2}{c_0^2}.$$

此为式(15)的解.将 Y 和 c^2/c_0^2 相对 q 在 $q = 0$ 处作 Taylor(泰勒)展开:

$$Y(x,\psi;q) = \sum_{n=0}^{\infty} q^2 y_n(x,\psi), \Gamma(q) = \sum_{n=0}^{\infty} q^2 F_n. \quad (25)$$

将式(23)代入到式(20),可得

$$L[y_n - \chi_n y_{n-1}] = \hbar R_n, \quad n \geq 1, \quad (26)$$

以及

$$\begin{cases} y_n = 0, & \psi = 0, \\ y_n \rightarrow \infty, & \psi \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (27)$$

其中

$$\chi_n = \begin{cases} 0, & n \leq 1, \\ 1, & n > 1, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} R_n = & \rho \sum_{i=0}^{n-1} F_i \frac{\partial^2 y_{n-i-1}}{\partial \psi^2} + \rho \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^i \sum_{k=0}^j F_{n-i-1} \frac{\partial^2 y_{i-j}}{\partial \psi^2} \frac{\partial y_{j-k}}{\partial x} \frac{\partial y_k}{\partial x} - \\ & \rho \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^i \sum_{k=0}^j F_{n-i-1} \left(2 \frac{\partial y_{i-j}}{\partial x} \frac{\partial^2 y_{j-k}}{\partial x \partial \psi} - \frac{\partial^2 y_{i-j}}{\partial x^2} \frac{\partial y_{j-k}}{\partial \psi} \right) \frac{\partial y_k}{\partial \psi} - \\ & \rho \psi \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^i \sum_{k=0}^j \frac{\partial y_{n-i-1}}{\partial \psi} \frac{\partial y_{i-j}}{\partial \psi} \left(\frac{\partial y_{j-k}}{\partial \psi} y_k - \psi \frac{\partial y_j}{\partial \psi} \right) - \\ & \frac{\rho \psi}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^i \sum_{k=0}^j F_{n-i-1} \frac{\partial y_{i-j}}{\partial \psi} \frac{\partial y_{j-k}}{\partial x} \frac{\partial y_k}{\partial x} + \\ & \frac{\rho \psi}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^i \sum_{k=0}^j F_{n-i-1} \frac{\partial y_{i-j}}{\partial \psi} \frac{\partial y_{j-k}}{\partial \psi} \frac{\partial y_k}{\partial \psi} - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} F_{n-i-1} \frac{\partial y_i}{\partial \psi}, \end{aligned}$$

y_n 的限制条件为

$$y_n(0,1) - y_n(\pi,1) = 0. \quad (28)$$

注意到式(27)包含调控式(26)中级数收敛性的参数 \hbar .如果 \hbar 选择得当,两个级数都会在 $q = 1$ 处收敛.它们的形式如下:

$$y(x,\psi) = Y(x,\psi;1) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x,\psi), \frac{c^2}{c_0^2} = \Gamma(1) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n. \quad (29)$$

总的来说,以上求解过程开始于初始解,这使得式(24)的等号右边存在非齐次项.式(24)的解可以拆开分为两项,使得同类型方程也可按此流程进行.注意到非齐次项包含 $e^{-\sqrt{n^2+1}\psi} \cos(mx)$, $n, m = 0, 1, 2, \dots$, 因此选择线性化算子 L :

$$L[\phi(x,\psi;q)] = \frac{\partial^2 \phi(x,\psi;q)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi(x,\psi;q)}{\partial \psi^2} - \phi(x,\psi;q). \quad (30)$$

注意到线性化算子的一般解允许如下独立变量形式:

$$\phi(x, \psi; q) = \sum_{m=0}^{+\infty} C_m e^{-\sqrt{m^2+1}\psi} \cos(mx), \tag{31}$$

其中 C_m 是常数,所以式(26)的一般解可写作

$$y_n(x, \psi) = X_n y_{n-1}(x, \psi) + y_n^*(x, \psi) + \sum_{m=0}^M C_{n,m} e^{-\sqrt{m^2+1}\psi} \cos(mx), \tag{32}$$

其中 $y_n^*(x, \psi)$ 代表非齐次项的特解,可以表示成

$$y_n^*(x, \psi) = \hbar L^{-1}[R_n],$$

这里 L^{-1} 是 L 算子的逆,给出

$$\left\{ \begin{aligned} L^{-1}[e^{-\sqrt{n^2+1}\psi} \cos(mx)] &= \frac{e^{-\sqrt{n^2+1}\psi} \cos(mx)}{n^2 - m^2}, & m \neq n, \\ L^{-1}[e^{-\sqrt{n^2+1}\psi} \sin(mx)] &= \frac{e^{-\sqrt{n^2+1}\psi} \sin(mx)}{n^2 - m^2}, & m \neq n, \\ L^{-1}[e^{-\sqrt{n^2+1}\psi} \cos(nx)] &= \frac{\psi e^{-\sqrt{n^2+1}\psi} \cos(nx)}{2\sqrt{n^2+1}}, & m = n, \\ L^{-1}[e^{-\sqrt{n^2+1}\psi} \sin(nx)] &= \frac{\psi e^{-\sqrt{n^2+1}\psi} \sin(nx)}{2\sqrt{n^2+1}}, & m = n. \end{aligned} \right. \tag{33}$$

为了满足式(28)和式(29)中的底部和限制边界条件的偏微分方程,需要限制解的表达式中的 F_n 和 $C_{n,m}$:

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{m=0}^M C_{n,m} \cos(mx) &= - \sum_{m=0}^{3n+1} \delta_{n,m} (F_{n-1}) \cos(mx), \\ y_n(0, 1) - y_n(\pi, 1) &= 0. \end{aligned} \right. \tag{34}$$

比较两边的系数,可得

$$M = 3n + 1, C_{n,m} = -\delta_{n,m} (F_{n-1}), \quad 0 \leq m \leq 3n + 1,$$

以及

$$y_n^*(0, 1) - y_n^*(\pi, 1) + \sum_{m=0}^{3n+1} C_{n,m} e^{-m} - \sum_{m=0}^{3n+1} (-1)^m C_{n,m} e^{-m} = 0.$$

对 n 阶方程而言,一般需要确定 $3n + 3$ 个常数,同时需要 $3n + 3$ 个不相干方程,所以方程是封闭的.

3 结果分析

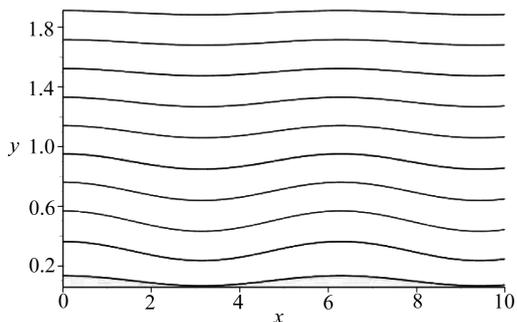
下面的结果是通过在式(29)里截断可忽略的级数项而来.由于 $\gamma = g/\beta'kc^2$, 分布关系可表示为

$$c^2 = \frac{g}{k} \sum_{n=0}^{+\infty} F_n.$$

当 $H = 0.25, 0.4, 0.65$ 时,在不同 ψ 上流线变形的波动形式如图 1, 2, 3 所示.需要说明的是图中不含 y 展开式中的 ψ 项.

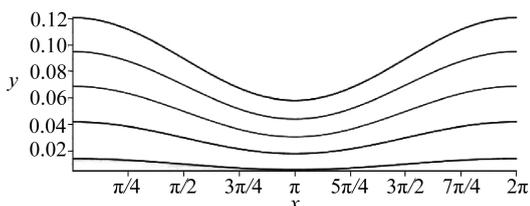
沿着每条流线,波浪的 y 的部分解形式如下:

$$y = a_0 + a_1 \cos(x) + a_2 \cos(2x) + a_3 \cos(3x) + \dots \tag{35}$$



(a) 具体结构 $\psi = 0 \sim 1$

(a) The detailed structure for $\psi = 0 \sim 1$

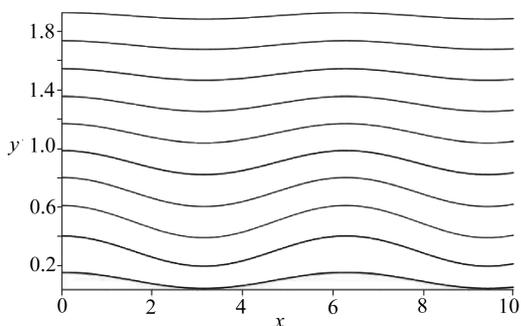


(b) 放大图

(b) The zoomed area

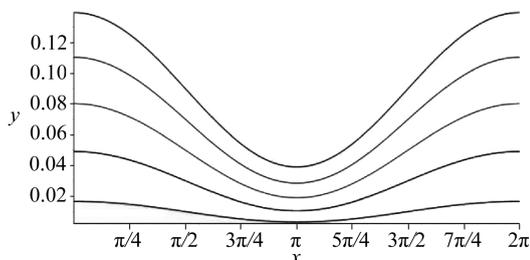
图 1 $H = 0.25, \phi = 1$ 时的流线

Fig. 1 The streamline of the wave height $H = 0.25$ at $\phi = 1$



(a) 具体结构 $\psi = 0 \sim 1$

(a) The detailed structure for $\psi = 0 \sim 1$

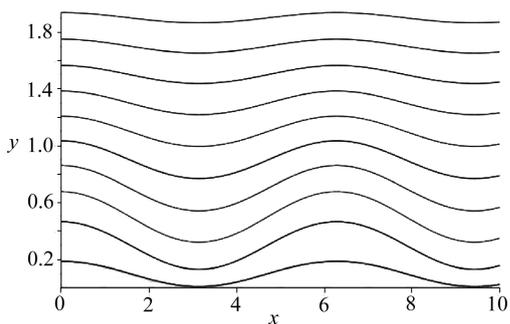


(b) 放大图

(b) The zoomed area

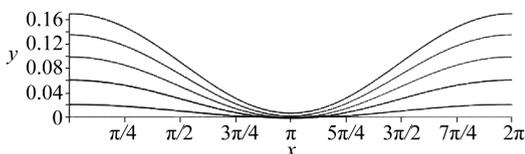
图 2 $H = 0.4, \phi = 1$ 时的流线

Fig. 2 The streamline of the wave height $H = 0.4$ at $\phi = 1$



(a) 具体结构 $\psi = 0 \sim 1$

(a) The detailed structure for $\psi = 0 \sim 1$



(b) 放大图

(b) The zoomed area

图 3 $H = 0.65, \phi = 1$ 时的流线

Fig. 3 The streamline of the wave height $H = 0.65$ at $\phi = 1$

3.1 动压力

由式(21)得到沿流线的动压力见图 4、图 5 和图 6.从这 3 个图中可知,一个周期内在 $\psi = 0.1$ 处出现了两倍压力.我们可以看到底部的压力分布比上部区域的差异大.但是总体来说,波

的高度越大,压力就越大.根据图中曲线知,压力比例依赖于波高,两条曲线具有很小的差异,这意味着即使控制方程是非线性的,线性化在这个问题中也起了关键作用.

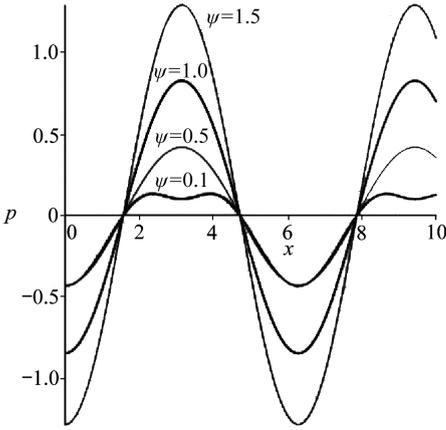


图4 $H = 0.25, \psi = 0.1, 0.5, 1.0, 1.5, \phi = 1$ 时沿流线的动压分布

Fig. 4 The dynamic pressure along streamlines for $H = 0.25, \psi = 0.1, 0.5, 1.0, 1.5, \phi = 1$

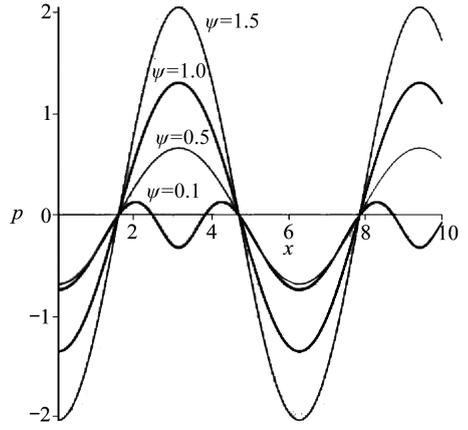


图5 $H = 0.4, \psi = 0.1, 0.5, 1.0, 1.5, \phi = 1$ 时沿流线的动压分布

Fig. 5 The dynamic pressure along streamlines for $H = 0.4, \psi = 0.1, 0.5, 1.0, 1.5, \phi = 1$

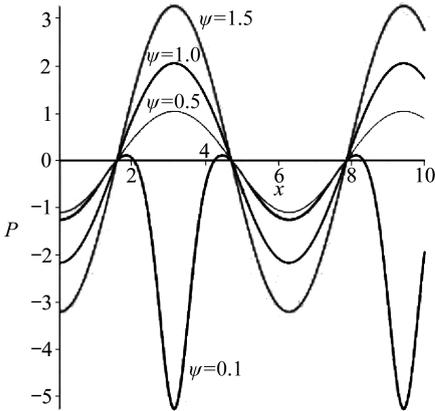


图6 $H = 0.65, \psi = 0.1, 0.5, 1.0, 1.5, \phi = 1$ 时沿流线的动压分布

Fig. 6 The dynamic pressure along streamlines for $H = 0.65, \psi = 0.1, 0.5, 1.0, 1.5, \phi = 1$

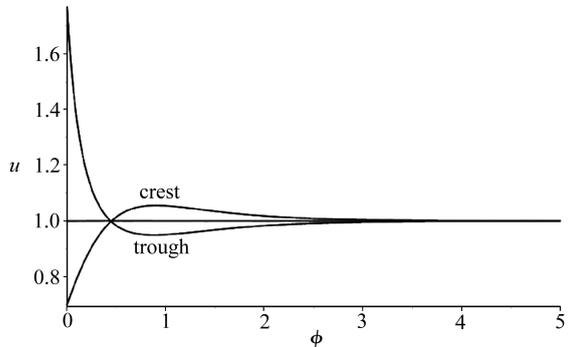


图7 $H = 0.25$ 时水平粒子在波峰和波谷的速度

Fig. 7 The horizontal particle velocity at crest and trough for $H = 0.25$

3.2 流场

根据流线的定义,速度的水平分量为

$$u = \frac{1}{y_\psi}$$

显然,这是从一个移动的参考坐标系观察的相对速度,绝对速度的水平分量为 $u_a = u - 1$. 图 7, 8, 9 分别为当 H 取 0.25, 0.4 和 0.65 时,在 $x = 0$ 和 $x = \pi$ 处的绝对水平速度.显然,水平速度随波高的增大显著上升,同时,沿着深度很快下降.图 10 给出了 a_0 相对 ψ 的曲线,表明了在内波下位置的移动与波高相比是很小的.

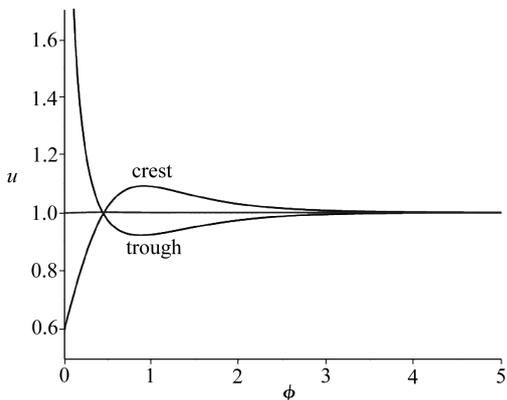


图 8 $H = 0.4$ 时水平粒子在波峰和波谷的速度

Fig. 8 The horizontal particle velocity at crest and trough for $H = 0.4$

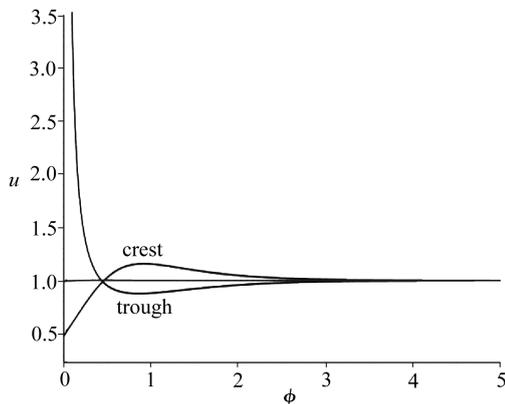


图 9 $H = 0.65$ 时水平粒子在波峰和波谷的速度

Fig. 9 The horizontal particle velocity at crest and trough for $H = 0.65$

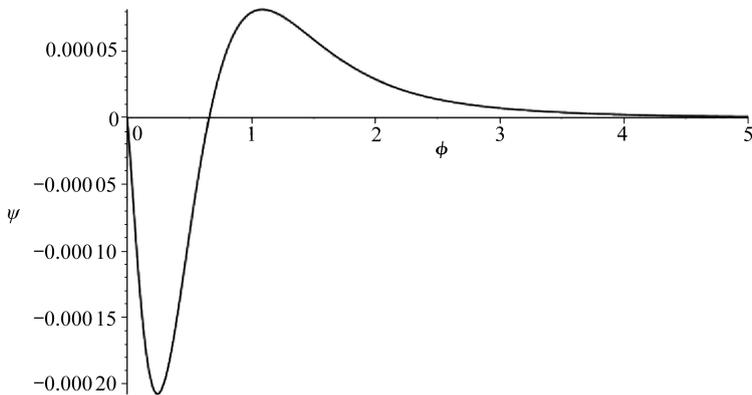


图 10 流线

Fig. 10 The streamline

4 结 论

内波有很长的研究历史,但和孤立波一样,大多数研究集中在固定边界或自由上边界的双流体系统.本文研究了具有指数密度剖面的无限深流体的周期波.给出了不同波高,包括长波高的波形.同时考虑了分布关系,流速场以及动压.在表面波理论中,已经有两种波的判断标准.一个是最高波峰夹角 120° ,一个是波高与波长之比 $(A/\lambda)_{\max} = 0.1417^{[19]}$.可能在以后的工作中会发现周期内波类似的判断标准.这里限定密度为指数分布,以后的工作会探讨其它的密度分布情况.

参考文献 (References):

[1] Keulegan G H. Characteristics of internal solitary waves[J]. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, 1953, **51**(3): 133-140.
 [2] Long R R. Solitary waves in the one- and two-fluid systems[J]. *Tellus*, 1956, **8**(4): 460-471.

- [3] Peters A S, Stoker J J. Solitary waves in liquids having non-constant density[J]. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1960, **13**(1) : 115-164.
- [4] Ter-Krikorov A M. Théorie exact des ondes longues stationnaires dans un liquide hétérogène [J]. *J Mécanique*, 1963, **2**: 351-376.
- [5] Bona J L, Bose D K, Turner R E L. Finite amplitude steady waves in stratified fluids [J]. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 1983, **62**(4) : 389-439.
- [6] Benjamin T B. Internal waves of finite amplitude and permanent form [J]. *J Fluid Mech*, 1966, **25**(2) : 241-270.
- [7] Benjamin T B. Internal waves of permanent form in fluids of great depth [J]. *J Fluid Mech*, 1967, **29**(3) : 559-592.
- [8] King S E, Carr M, Dritschel D G. The steady-state form of large-amplitude internal solitary waves [J]. *J Fluid Mech*, 2011, **666**: 477-505.
- [9] Helfrich K R, Melville W K. Long nonlinear internal waves [J]. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 2006, **38**: 395-425.
- [10] Lamb H. *Hydrodynamics* [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1932.
- [11] Camassa R, Rusàs P O, Saxena A, Tiron R. Fully nonlinear periodic internal waves in a two-fluid system of finite depth [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2010, **652**: 259-298.
- [12] Broeck V J M, Turner R E L. Long periodic internal waves [J]. *Phys Fluids A*, 1929, **4**(9) : 1929-1935.
- [13] Turner R E L. Internal waves in fluids with rapidly varying density [J]. *Annali Della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze*, 1981, **8**(4) : 513-573.
- [14] Cheng J, Cang J, Liao S J. On the interaction of deep water waves and exponential shear currents [J]. *Z Angew Math Phys*, 2009, **60**(3) : 450-478.
- [15] Long R R. Some aspects of the flow of stratified fluids [J]. *Tellus*, 1953, **5**(1) : 42-57.
- [16] Dubreil-Jacotin M L. Sur les théorèmes d'existence relatifs aux ondes permanents périodiques à deux dimensions dans les liquides hétérogènes [J]. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 1937, **19**: 43-67.
- [17] Abarbanel H D I, Holm D D, Marsden J E, Ratiu T. Richardson number criterion for the non-linear stability of three-dimensional stratified flow [J]. *Physical Review Letters*, 1984, **52** (26) : 2352-2355.
- [18] Liao S J. *Beyond Perturbation: Introduction to the Homotopy Analysis Method* [M]. London: Chapman & Hall/ CRC Press, 2003.
- [19] Schwartz L W. Computer extension and analytic continuation of Stoke's expansion for gravity waves [J]. *J Fluid Mech*, 1974, **62**(3) : 553-578.

Analytical Solutions of Periodic Stationary Internal Waves in Infinitely Deep Water With Exponential Vertical Density Distribution

ZOU Li^{1,2}, ZONG Zhi^{1,2}, WANG Zhen^{3,4}, ZHAO Yong⁵, LIANG Hui^{1,2}

(1. *State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment (Dalian University of Technology), Dalian, Liaoning 116024, P.R.China;*

2. *School of Naval Architecture, Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116024, P.R.China;*

3. *School of Mathematical Sciences, Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116024, P.R.China;*

4. *Department of Mechanical Engineering, University College London, London WC1E 6BT, UK;*

5. *Transportation Equipment & Ocean Engineering College, Dalian Maritime University, Dalian, Liaoning 116026, P.R.China)*

Abstract: A train of periodic deep water stationary waves with finite amplitudes were investigated analytically with the homotopy analysis method. The vertical distribution of water density was considered as variable in a continuous exponential trend. A new form of partial differential equations were proposed as the auxiliary equations and the new-form solution expressions were obtained in order to match the level boundary condition at the bottom and the hypothetical infinitely rigid condition. The detailed recursive relation of the coefficient in the solution expression was given and the explicit expressions of the permanent stationary periodic internal waves were presented. The convergent series solutions were obtained for the global domain both in vertical and horizontal directions. The relation between the density variable and the internal wave amplitude was revealed.

Key words: internal wave; deep water wave; nonlinearity; exponential density

Foundation item: The National Basic Research Program of China (973 Program) (2013CB036101); The National Natural Science Foundation of China (51109031; 51379033; 51221961; 51309040; 51279030; 51239002)