

辐射流体力学 Lagrange 方程组 一类人为解构造方法*

余云龙¹, 林忠¹, 王瑞利¹, 刘全¹, 陈星玳²

(1. 北京应用物理与计算数学研究所, 北京 100094;
2. 北京工商大学理学院, 北京 100037)

摘要: 针对一维 Lagrange 辐射流体力学方程组, 基于物理量在 Euler 空间和 Lagrange 空间的微分关系, 提出了一种人为解构造方法, 并构造了一类一维 Lagrange 辐射流体力学方程组人为解。构造的人为解在整个计算区域光滑可微, 质量方程无源项, 将构造的人为解应用至二维辐射流体力学 Lagrange 程序中, 从数值误差、收敛阶方面验证了程序的正确性, 展示了人为解的可行性和适用性。

关键词: 辐射流体力学方程组; 人为解; Lagrange(拉格朗日)坐标; 程序验证

中图分类号: O302 **文献标志码:** A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2015.01.010

引言

在科学与工程领域许多问题都是多物理耦合的问题, 如高速流体运动与高温辐射过程耦合的辐射流体力学问题, 辐射流体力学与中子输运、核反应耦合的核反应辐射流体力学问题。描述这些多物理过程的数学模型往往是强非线性、强刚性的偏微分方程组, 很难得到解析解, 利用计算机进行数值求解是重要的研究手段。数值求解主要是用某种离散近似方法, 如有限差分、有限元、有限体积和谱方法等求解偏微分方程。数值求解是否正确求解了方程, 以及模拟结果能否再现真实的物理过程, 需要对数值模拟程序进行验证与确认 (verification and validation, V&V)^[1-2]。对求解方程和程序实施的正确性验证涉及软件质量保证、算法验证和解验证, 人为构造解方法^[3]是一种比精确解方法应用更广泛、更容易的检验程序的替代技术。

人为解方法是一种逆向思维的程序验证方法, 其核心思想是针对程序求解的方程, 人为假定一个可达解, 将该解代入方程, 确定为了使方程成立所必须添加的源项和初边值条件。在这样的源项和初边值条件下, 数值求解原来的偏微分方程。通过将数值解与假设的精确解比较, 以及运用网格收敛分析比较离散格式的理论阶与数值收敛阶等方式, 来判断代码是否有错误, 以达到验证程序正确性的目的。

人为解方法最初由 Steinberg 和 Roache(1984)^[4]提出, 后来被广泛应用至计算流体动力学 (CFD) 程序的验证中^[3-14]。Salari 和 Knupp^[3]对一般人为解方法的发展历史、研究状况、研究内

* 收稿日期: 2014-03-27; 修订日期: 2014-12-04

基金项目: 国家自然科学基金(11372051; 11201035; 11401015); 北京市教委科研计划面上项目(KM20130011006); 北京市教师队伍建设青年英才计划(YETP1445)

作者简介: 余云龙(1983—), 男, 湖北人, 博士(通讯作者。E-mail: yyliapcm@hotmail.com)。

容进行了分析,提出了构造人为解的基本原则和要求,并将人为解方法应用至可压缩和不可压缩 NS 方程.2003 年他们的专著出版^[6],在人为解应用领域被广泛引用.Roy^[7]详细叙述了人为解方法的构造过程,讨论了截断误差和迭代收敛误差,分析了估计离散误差的后验方法优势和局限性,重点强调了 Richardson 外推法在误差估计中的应用.近年来,国内许多学者也对人为解方法进行了大量研究^[8-13],针对 Euler 坐标系下流体力学方程组人为解的构造提出了很多方法,并应用至大型 Euler 程序的验证中,对抛物型辐射方程解析解以及人为解验证方面也有很多工作^[13-14],取得了很好的效果.但对求解辐射流体力学方程组的 Lagrange 程序的验证,一直以来由于其精确解有限较难进行.

本文针对一维 Lagrange 辐射流体力学方程组,提出了一种人为解构造方法.该方法首先引入 Lagrange 坐标,然后人为给定坐标解函数和温度解函数,最后根据各物理量在 Euler 空间与 Lagrange 空间的微分关系,推导出所求解的一维 Lagrange 辐射流体力学方程组的源项和其他解函数.通过该方法构造了一类一维辐射流体力学人为解模型,并应用于辐射流体力学程序的正确性考核,得到了很好的效果.

1 一维 Lagrange 辐射流体力学方程组人为解构造

1.1 一维辐射流体力学方程组 Lagrange 形式

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (1)$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + s_u, \quad (2)$$

$$\frac{de}{dt} = -p \frac{dV}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right) + s_e, \quad (3)$$

其中,Lagrange 随体导数:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial t} + u \frac{\partial z}{\partial x}, \quad z = \rho, u, e, \quad (4)$$

式中 (x, t) 为 Euler 时空坐标, ρ 为密度, $V = 1/\rho$ 为比容, $u = dx/dt$ 为流体速度, e 为内能, p 为压力, T 为温度, κ 为导热系数, s_u, s_e 分别为动量方程源项和内能方程源项.

假定源项已知,上述方程组(1)~(3)包含 6 个未知量 ρ, u, e, p, T 和 κ , 但只有 3 个方程,为了保证计算模型的封闭性,需要添加 3 个材料状态方程.

状态方程:

$$p = p(\rho, T), \quad e = e(\rho, T), \quad \kappa = \kappa(\rho, T). \quad (5)$$

1.2 物理量在 Euler 空间和 Lagrange 空间的微分关系

为了方便人为解的构造,引入 Lagrange 坐标系 (x_0, τ) , 该坐标系与 Euler 空间坐标系 (x, t) 的变换关系记为

$$x = x(x_0, \tau), \quad (6)$$

$$t = \tau. \quad (7)$$

其微分关系式为

$$dx = J dx_0 + u d\tau, \quad (8)$$

$$dt = d\tau, \quad (9)$$

其中

$$J(x_0, \tau) = \frac{\partial x(x_0, \tau)}{\partial x_0} > 0 \quad (10)$$

为坐标变换的 Jacobi(雅可比)系数;

$$u(x_0, \tau) = \frac{\partial x(x_0, \tau)}{\partial \tau} \quad (11)$$

为流体速度.函数 $u(x_0, \tau)$ 与函数 $J(x_0, \tau)$ 应满足如下相容关系:

$$\frac{\partial u(x_0, \tau)}{\partial x_0} = \frac{\partial J(x_0, \tau)}{\partial \tau}. \quad (12)$$

设 f 为物理变量 z 在 Euler 空间关于坐标 (x, t) 的函数关系, g 为物理变量 z 在 Lagrange 空间关于坐标 (x_0, τ) 的函数关系,联系到式(6)、(7),即有

$$z = f(x, t) = f(x(x_0, \tau), \tau) = g(x_0, \tau). \quad (13)$$

于是

$$\frac{\partial z}{\partial \tau} = \frac{\partial g(x_0, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial f(x(x_0, \tau), \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \frac{\partial x(x_0, \tau)}{\partial \tau} = \frac{df}{dt},$$

即, Euler 空间的 Lagrange 随体导数就等于 Lagrange 空间的时间导数:

$$\frac{dz(x, t)}{dt} = \frac{\partial z(x_0, \tau)}{\partial \tau}. \quad (14)$$

再有

$$\frac{\partial z}{\partial x_0} = \frac{\partial g(x_0, \tau)}{\partial x_0} = \frac{\partial f(x(x_0, \tau), \tau)}{\partial x_0} = \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \frac{\partial x(x_0, \tau)}{\partial x_0} = J(x_0, \tau) \frac{\partial f(x, t)}{\partial x},$$

即

$$\frac{\partial z(x, t)}{\partial x} = \frac{1}{J(x_0, \tau)} \frac{\partial z(x_0, \tau)}{\partial x_0}. \quad (15)$$

1.3 一维 Lagrange 辐射流体力学人为解构造方法

针对 Lagrange 辐射流体力学方程(1)~(3)及状态方程(5),其人为解构造流程如下:人为给定坐标解函数 $x = x(x_0, \tau)$ 和温度解函数 $T = T(x_0, \tau)$,根据上小节给出的微分关系,推导出其他未知解函数 $\rho(x_0, \tau)$, $u(x_0, \tau)$, $e(x_0, \tau)$ 以及动量方程源项 s_u 和能量方程源项 s_e .下面给出具体推导过程:

1) 根据式(10)、(11),由坐标解函数 $x = x(x_0, \tau)$ 可计算出 $J(x_0, \tau)$, $u(x_0, \tau)$.

2) 推导密度解函数 $\rho(x_0, \tau)$.

将式(14)、(15)代入一维辐射流体力学方程组(1),得到

$$\frac{1}{\rho(x_0, \tau)} \frac{\partial \rho(x_0, \tau)}{\partial \tau} = - \frac{1}{J(x_0, \tau)} \frac{\partial u(x_0, \tau)}{\partial x_0}. \quad (16)$$

根据相容关系(12),可得

$$\frac{1}{\rho(x_0, \tau)} \frac{\partial \rho(x_0, \tau)}{\partial \tau} = - \frac{1}{J(x_0, \tau)} \frac{\partial J(x_0, \tau)}{\partial \tau}. \quad (17)$$

直接求解式(17),可以计算出密度解函数 $\rho(x_0, \tau)$ 的精确表达式:

$$\rho(x_0, \tau) = \frac{\rho_0(x_0) J_0(x_0)}{J(x_0, \tau)}, \quad (18)$$

其中 $\rho_0(x_0) = \rho(x_0, 0)$, $J_0(x_0) = J(x_0, 0)$.

3) 进一步给定温度解函数 $T = T(x_0, \tau)$, 推导动量方程源项 s_u 和能量方程源项 s_e 。

由动量方程(2),

$$s_u = \frac{du}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (19)$$

根据式(14)、(15), 可得

$$s_u = \frac{\partial u(x_0, \tau)}{\partial \tau} + \frac{1}{\rho(x_0, \tau) J(x_0, \tau)} \frac{\partial p(x_0, \tau)}{\partial x_0}. \quad (20)$$

由式(18), 可得

$$s_u = \frac{\partial u(x_0, \tau)}{\partial \tau} + \frac{1}{\rho_0(x_0) J_0(x_0)} \frac{\partial p(x_0, \tau)}{\partial x_0}. \quad (21)$$

其中由状态方程(5), $p(x_0, \tau) = p(\rho(x_0, \tau), T(x_0, \tau))$ 。

由内能方程(3), 可得

$$s_e = \frac{de}{dt} + p \frac{dV}{dt} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \frac{de}{dt} + p \frac{dV}{dt} - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \kappa}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right), \quad (22)$$

根据式(14)、(15)、(18), 可得

$$s_e = \frac{\partial e}{\partial \tau} + p(x_0, \tau) \frac{\partial v(x_0, \tau)}{\partial \tau} - \frac{1}{\rho_0(x_0) J_0(x_0)} \left(\frac{1}{J(x_0, \tau)} \frac{\partial \kappa(x_0, \tau)}{\partial x_0} \frac{\partial T(x_0, \tau)}{\partial x_0} + \kappa(x_0, \tau) \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{1}{J(x_0, \tau)} \frac{\partial T(x_0, \tau)}{\partial x_0} \right) \right), \quad (23)$$

其中由状态方程(5)

$$e(x_0, \tau) = e(\rho(x_0, \tau), T(x_0, \tau)), \quad \kappa(x_0, \tau) = \kappa(\rho(x_0, \tau), T(x_0, \tau)).$$

4) 构造的人为解。

为方便考虑, 后面采用符号 t 表示 Lagrange 空间的时间 τ 。根据上述人为解构造步骤, 选择不同的坐标解函数和温度解函数, 可以得到不同的人为解。在人为解的构造过程中, 尽量选择那些满足物理条件的解, 即要求对任意的 $(x_0, t) \in (x_L, x_R) \times \mathbf{R}_+$, 都有 $J(x_0, t) > 0, \rho(x_0, t) > 0, T(x_0, t) > 0, e(x_0, t) > 0, x_L, x_R$ 分别为计算区域的左右边界。

根据上述要求, 构造一个具有一定物理意义的人为解: 两端固定, 流体来回流动, 物理空间温度分布定常, 流体压力恒为 0, 温度变化与流体压力无关, 具体如下。

给定:

计算区域

$$0 \leq x_0 \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

状态方程

$$p = 0, \quad e = T, \quad \kappa = 1,$$

坐标解函数

$$x(x_0, t) = x_0 + x_0(1 - x_0) b \sin(2\pi t), \quad 0 < b < 1,$$

温度解函数

$$T(x_0, t) = 2 + \sin(2\pi(x_0 + x_0(1 - x_0) b \sin(2\pi t))) = 2 + \sin(2\pi x),$$

初始密度

$$\rho_0(x_0) = 1.$$

导出:

密度解函数

$$\rho(x_0, t) = \frac{1}{1 + (1 - 2x_0)b\sin(2\pi t)},$$

速度解函数

$$u(x_0, t) = 2\pi x_0(1 - x_0)b\cos(2\pi t),$$

压力解函数

$$p(x_0, t) = 0,$$

内能解函数

$$e(x_0, t) = 2 + \sin(2\pi(x_0 + x_0(1 - x_0)b\sin(2\pi t))),$$

动量方程源

$$s_u(x_0, t) = -4\pi^2 x_0(1 - x_0)b\sin(2\pi t),$$

能量方程源

$$s_e(x_0, t) = 4\pi^2 x_0(1 - x_0)b\cos(2\pi(x_0 + x_0(1 - x_0)b\sin(2\pi t)))\cos(2\pi t) + 4\pi^2 \sin(2\pi x) [1 + (1 - 2x_0)b\sin(2\pi t)].$$

值得注意的是,通过设定流体压力恒为 0 这一特殊的状态方程,内能方程退化为纯扩散方程,此时,所有纯扩散模型都可以按照上述人为解构造方法移植到动态网格上,形成辐射流体力学人为解模型.

2 人为解在程序验证中的应用

下面利用构造的人为解,对应用程序 LAD2D (Lagrangian adaptive hydrodynamics code in two dimension) 进行验证.LAD2D 是一个二维 Lagrange 辐射流体力学数值模拟程序,本文使用该二维程序计算一维人为解模型.

LAD2D 程序中辐射和流体采用分裂计算,即先求解不带扩散项的流体力学方程组,再针对能量方程的扩散项求解一个纯扩散方程.流体计算采用经典的 von Neumann-Richtmyer Lagrange 流体力学格式^[15],扩散计算采用积分内插法构造的隐式有限体积格式^[14].

针对一维流体力学方程组 Lagrange 形式(1)、(2)和不带辐射项的能量方程:

$$\frac{de}{dt} = -p \frac{dV}{dt} + s_e. \quad (24)$$

von Neumann-Richtmyer 格式为

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t [(p_{j+1/2}^n + q_{j+1/2}^n) - (p_{j-1/2}^n + q_{j-1/2}^n)]}{[\rho_{j+1/2}^n(x_{j+1}^n - x_j^n) + \rho_{j-1/2}^n(x_j^n - x_{j-1}^n)]/2} + \Delta t s_u^n, \quad (25)$$

$$x_j^{n+1} = x_j^n + u_j^{n+1} \Delta t, \quad (26)$$

$$\rho_{j+1/2}^{n+1} = \rho_{j+1/2}^n \frac{x_{j+1}^n - x_j^n}{x_{j+1}^{n+1} - x_j^{n+1}} = \frac{1}{V_{j+1/2}^{n+1}}, \quad (27)$$

$$e_{j+1/2}^{n+1} = e_{j+1/2}^n - \left[\frac{1}{2}(p_{j+1/2}^{n+1} + p_{j+1/2}^n) + q_{j+1/2}^n \right] (V_{j+1/2}^{n+1} - V_{j+1/2}^n) + \Delta t s_e^n, \quad (28)$$

$$p_{j+1/2}^{n+1} = p(\rho_{j+1/2}^n, e_{j+1/2}^n), \quad (29)$$

$$q_{j+1/2}^{n+1} = \begin{cases} \frac{\lambda_2}{V_{j+1/2}^{n+1} + V_{j+1/2}^n} (u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1})^2 - \frac{\lambda_1}{V_{j+1/2}^{n+1} + V_{j+1/2}^n} (u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}), & u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1} < 0, \\ 0, & u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1} \geq 0, \end{cases} \quad (30)$$

其中 λ_1 和 λ_2 分别为一次粘性系数和二次粘性系数, 本文构造的人为解没有激波, 因此 λ_1 和 λ_2 都取 0.

针对一维扩散方程:

$$\frac{de}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right). \quad (31)$$

采用的纯隐式有限体格式为

$$\frac{e_{j+1/2}^{n+1} - e_{j+1/2}^n}{\Delta t} = \frac{1}{\rho_{j+1/2}^{n+1} (x_{j+1}^{n+1} - x_j^{n+1})} \left(\kappa_{j+1}^{n+1} \frac{T_{j+3/2}^{n+1} - T_{j+1/2}^{n+1}}{x_{j+3/2}^{n+1} - x_{j+1/2}^{n+1}} - \kappa_j^{n+1} \frac{T_{j+1/2}^{n+1} - T_{j-1/2}^{n+1}}{x_{j+1/2}^{n+1} - x_{j-1/2}^{n+1}} \right), \quad (32)$$

$$e_{j+1/2}^{n+1} = e(\rho_{j+1/2}^{n+1}, T_{j+1/2}^{n+1}), \quad (33)$$

$$\kappa_j^{n+1} = 1. \quad (34)$$

初始条件: 密度 $\rho(x_0, 0) = 1$, 速度 $u(x_0, 0) = \pi x_0(1 - x_0)$, 温度 $T(x_0, 0) = \sin(2\pi x_0)$; 边界条件: 流体边界为四周都是固壁, 热学边界 $T(0, t) = T(1, t) = 2.0$.

计算区域均匀划分为 32 个网格, 人为解中参数 $b = 0.5$, $\Delta t = 6.25 \times 10^{-4}$, 计算至 1.0 时刻. 由隐式格式 (32) 形成关于温度 T 的非线性方程组, 通过 Newton (牛顿) 线性化, 形成线性代数方程组, 再采用 BiCGSTAB 方法求解^[14].

数值模拟结果如下, 其中图 1、图 2、图 3(a) 中曲线表示精确解, 点表示数值解, 图 3(b) 中曲线为数值解.

从图 1 可以看出, 计算过程中网格是处于移动状态的, 温度扩散是基于该动态网格进行计算的. 从密度、网格节点速度的数值解 $\rho_{\text{numerical}}$, $u_{\text{numerical}}$ 与人为精确解 ρ_{exact} , u_{exact} 的对比图 (图 2) 可以看出, 两者基本一致, 验证了程序的正确性.

根据构造的人为解 $T = 2 + \sin(2\pi x) = 2 + \sin(2\pi(x_0 + x_0(1 - x_0)b\sin(2\pi t)))$, 从 Lagrange 空间来看, 温度场随时间变化而变化, 从物理空间来看, 温度场随时间变化而保持不变. 图 3 显示, 数值结果满足精确解的这一性质.

考察人为解的数值收敛阶, 在不同网格规模下, 保持 $\Delta t/\Delta x^2 = 0.64$ 不变, 计算至 1.0 时刻, 温度的误差和收敛阶见下表 1.

表 1 中 N 表示 x 方向网格数, L_2 , L_∞ 分别表示 L_2 , L_∞ 误差, p_2 , p_∞ 表示在 L_2 , L_∞ 误差下的收敛阶. 表 1 结果显示, 温度收敛阶达到二阶, 与扩散格式的理论结果完全一致, 说明程序是

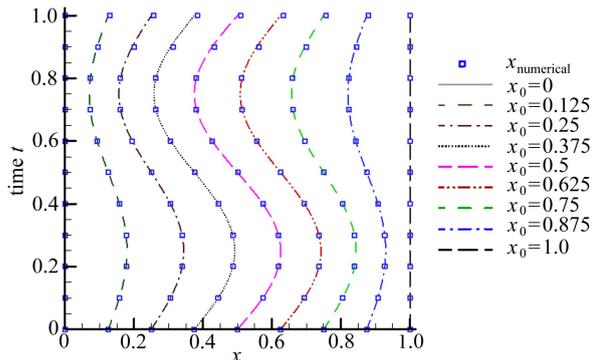


图 1 网格节点位置随时间变化图

Fig. 1 Change of the grid nodes' positions with time

正确的.

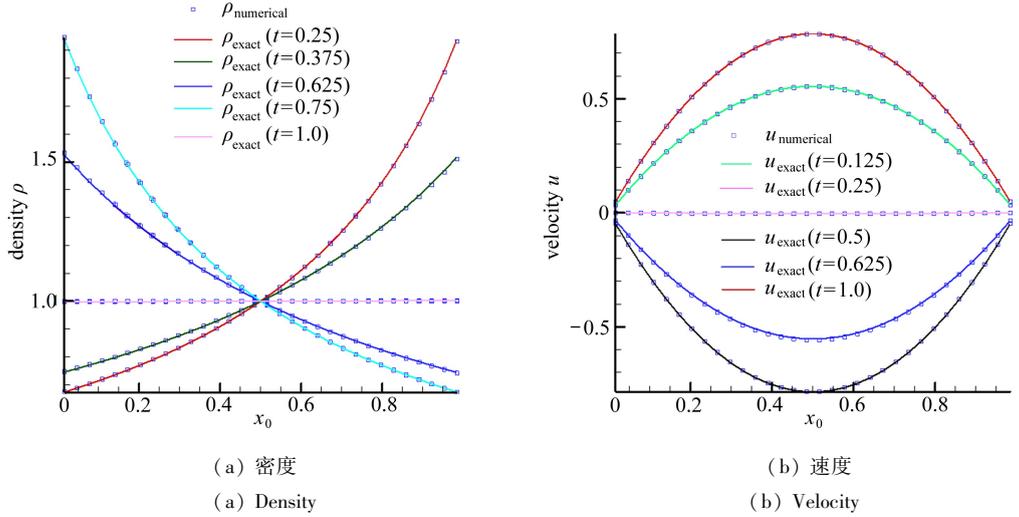


图2 不同时刻密度、速度数值解与精确解对比图

Fig. 2 Comparison between the numerical solutions and the exact solutions of density and velocity at different times

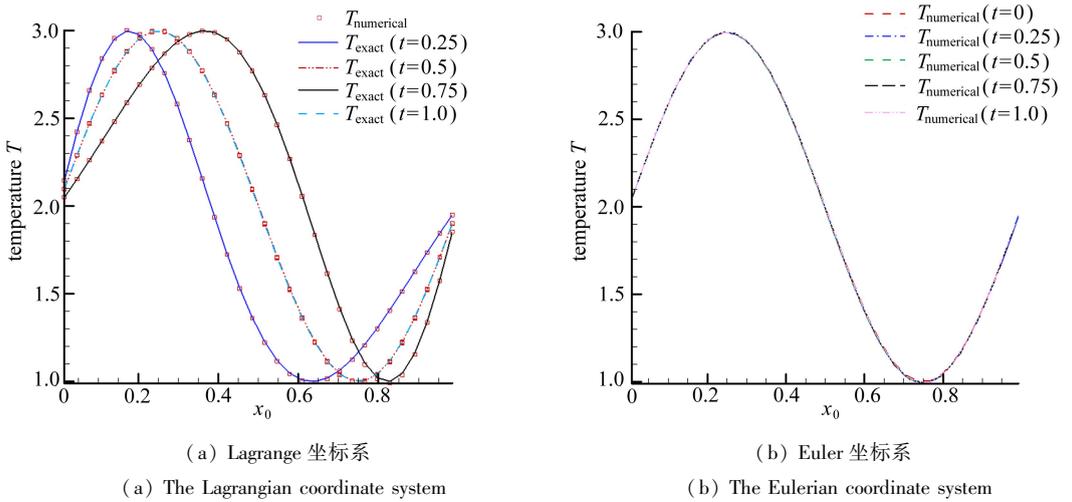


图3 不同时刻不同坐标系下的温度场

Fig. 3 The temperature fields based on the Lagrangian and Eulerian coordinate systems at different times

表1 温度收敛误差及收敛阶

Table 1 The errors and convergence orders of temperature

N	8	16	32	64	128
L_2	1.97E-2	5.33E-3	1.36E-3	3.42E-4	8.57E-5
p_2		1.88	1.97	1.99	1.99
L_∞	2.45E-2	6.92E-3	1.78E-3	4.48E-4	1.12E-4
p_∞		1.82	1.95	1.99	2.00

3 结 论

本文针对一维 Lagrange 辐射流体力学方程组,提出了一种人为解构造方法,并给出具体的构造流程.基于该方法,构造了一类光滑人为解,该人为解保证质量方程源项为 0.在人为解的

构造中,通过设定特殊形式的状态方程,可将所有定态网格的纯扩散模型移植到动态网格上,为更多复杂扩散格式及其程序的验证提供了有力的工具。

将人为解应用至二维辐射流体力学 Lagrange 程序,通过数值解与人为解的对比和误差分析,为程序正确性的定量考核提供了一种有效的验证手段。

参考文献(References):

- [1] Oberkampf W L, Roy C J. *Verification and Validation in Scientific Computing*[M]. New York: Cambridge University Press, 2010.
- [2] 王瑞利, 林忠, 袁国兴. 科学计算程序的验证与确认[J]. 北京理工大学学报, 2010, **30**(3): 353-356, 360.(WANG Rui-li, LIN Zhong, YUAN Guo-xing. Verification and validation in scientific computing code[J]. *Transactions of Beijing Institute of Technology*, 2010, **30**(3): 353-356, 360.(in Chinese))
- [3] Salari K, Knupp P. *Code Verification by the Method of Manufactured Solutions*[M]. Albuquerque, New Mexico: Sandia National Laboratories, 2000.
- [4] Steinberg S, Roache P J. Symbolic manipulation and computational fluid dynamics[J]. *AIAA Journal*, 1984, **22**(10): 1390-1394.
- [5] Roache P J. Verification of codes and calculations[J]. *AIAA Journal*, 1998, **36**(5): 696-702.
- [6] Knupp P, Salari K. *Verification of Computer Codes in Computational Science and Engineering*[M]. Boca Raton, FL: Chapman and Hill/CRC, 2003.
- [7] Roy C J. Review of code and solution verification procedures for computational simulation[J]. *Journal of Computational Physics*, 2005, **205**(1): 131-156.
- [8] 杨振虎. CFD 程序验证的虚构解方法及其边界精度匹配问题[J]. 航空计算技术, 2007, **37**(6): 5-9.(YANG Zhen-hu. CFD code verification via the method of manufactured solution and its boundary accuracy match problem[J]. *Aeronautical Computing Technique*, 2007, **37**(6): 5-9.(in Chinese))
- [9] 曾现洋, 刘睿, 刘希强. 人为解与人为解方法[J]. 聊城大学学报(自然科学版), 2010, **23**(1): 71-74.(ZENG Xian-yang, LIU Rui, LIU Xi-qiang. The method of manufactured solution[J]. *Journal of Liaocheng University(Natural Science Edition)*, 2010, **23**(1): 71-74.(in Chinese))
- [10] 张涵信, 查俊. 关于 CFD 验证确认中的不确定度和真值估算[J]. 空气动力学学报, 2010, **28**(1): 39-45.(ZHANG Han-xin, ZHA Jun. The uncertainty and truth value assessment in the verification and validation of CFD[J]. *Acta Aerodynamica Sinica*, 2010, **28**(1): 39-45.(in Chinese))
- [11] 王瑞利, 刘全, 刘希强, 魏兰. 人为解方法及其在流体力学程序验证中的应用[J]. 计算机应用与软件, 2012, **29**(11): 4-7.(WANG Rui-li, LIU Quan, LIU Xi-qiang, WEI Lan. Artificial solution and its application in verifying hydrodynamic program[J]. *Computer Applications and Software*, 2012, **29**(11): 4-7.(in Chinese))
- [12] 刘全, 王瑞利, 刘希强, 魏兰. 流体力学方程组一类人为解构造方法[J]. 数学的实践与认识, 2013, **43**(8): 176-182.(LIU Quan, WANG Rui-li, LIU Xi-qiang, WEI Lan. One method of manufactured solutions to 2D hydrodynamics Euler equations[J]. *Mathematics in Practice and Theory*, 2013, **43**(8): 176-182.(in Chinese))
- [13] YANG Rong, HANG Xu-deng, LI Jing-hong. A two-dimensional cylindrical symmetric radiative transfer benchmark model and code tests[J]. *Chinese Journal of Computational Physics*,

- 2010, **27**(4): 533-540.
- [14] 刘学哲, 余云龙, 王瑞利, 林忠. 非结构任意多边形网格辐射扩散方程有限体积格式[J]. 数值计算与计算机应用, 2010, **31**(4): 259-270. (LIU Xue-zhe, YU Yun-long, WANG Rui-li, LIN Zhong. A cell-centered finite volume scheme for discretizing diffusion equation on unstructured arbitrary polygonal meshes[J]. *Journal on Numerical Methods and Computer Applications*, 2010, **31**(4): 259-270. (in Chinese))
- [15] 水鸿寿. 一维流体力学差分方法[M]. 北京: 国防工业出版社, 1998. (SHUI Hong-shou. *Difference Method for One-Dimensional Computational Fluid Dynamics*[M]. Beijing: National Defence Industry Press, 1998. (in Chinese))

A Method of Manufacturing Solutions for Verification of Lagrangian Radiation Hydrodynamic Codes

YU Yun-long¹, LIN Zhong¹, WANG Rui-li¹, LIU Quan¹, CHEN Xing-ding²

(1. *Institute of Applied Physics and Computational Mathematics*,
Beijing 100094, P.R.China;

2. *School of Science, Beijing Technology and Business University*,
Beijing 100037, P.R.China)

Abstract: According to the derivative relation of physic variables between the Lagrangian space and Eulerian space, a new method of manufacturing solutions was proposed for the verification of Lagrangian radiation hydrodynamic codes. With this method, the manufactured solutions to the 1D Lagrangian radiation hydrodynamic equations were given to be smooth and differentiable in the whole computational domain, without source term in the mass equation. Then the manufactured solutions were applied to verify the correctness of the 2D Lagrangian radiation hydrodynamic codes. The numerical results show the effectiveness of the presented method.

Key words: radiation hydrodynamic equation; manufactured solution; Lagrangian coordinate; verification of codes

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (11372051; 11201035; 11401015)