

基于 L-D 流动法则模糊弹粘塑性的有限变形分析*

王喜刚^{1,2}, 扶名福¹

(1. 南昌大学 工程力学研究所, 南昌 330031;
2. 辽宁科技学院 资源与土木工程学院, 辽宁 本溪 117004)

摘要: 为了进行岩土材料有限变形的动力分析,采用 Green 应变和第二类 Kirchoff 应力描述材料的几何非线性,将隶属度函数引入到屈服函数中,并采用 L-D 屈服准则,得到了基于 L-D 流动法则的模糊弹粘塑性本构模型,应用非线性有限元原理,得到了土样动三轴实验有限变形的数值结果,并与小变形的数值结果和土样的动三轴实验结果进行了对比,通过对比发现有限变形的结果更加接近动三轴的实验结果,且模糊弹粘塑性模型能很好地反映循环荷载作用下岩土的动力性质,是岩土动力分析的一种有效方法。

关键词: 隶属度函数; 模糊弹粘塑性; L-D 流动法则; 有限变形; 动三轴实验

中图分类号: TU435 **文献标志码:** A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2015.02.002

引言

有限变形理论最早起源于 19 世纪末,最早用于分析金属、橡胶等材料.Hill (1959, 1978)^[1-2]初步讨论了有限变形问题,给出了二维非稳定运动的弹塑性分析,提出了应力、应变组成共轭对的概念,进而提出了广义 Lagrange 应变和 Euler 应变的概念,给出了各种应变之间的描述关系;在国内,郭仲衡 (1980)^[3]应用张量分析了有限变形的理论以及有限变形的本构关系,之后 (1984, 1992)^[4-5]探讨了 Hill 理论在固体力学中的应用以及应力、应变张量不变的共轭形式;谢永利^[6]编写的《大变形固结理论及其有限元法》介绍了大变形的基本理论,并结合 Biot 固结理论编写了有限元程序;刘学军等 (2000, 2001)^[7-8]给出了基于对数应变的有限变形弹塑性理论并提出了有限元一致性算法;韩昌瑞^[9]将岩土工程中常用的 Mohr-Coulomb 准则与有限变形有机地结合在一起,并通过有限元得到了实现。

本文在前人研究基础上,讨论了有限变形的应力、应变关系,建立了 Green 应变和第二类 Kirchoff 应力表示的 L-D 屈服准则,并将隶属度函数引入到弹塑性本构关系中,建立了基于有限变形的模糊弹粘塑性本构模型.该模型能有效解决弹性和塑性不连续的问题,对于动力分析是非常适合的.基于非线性有限元原理编制了有限变形模糊弹粘塑性的有限元程序,得到了循

* 收稿日期: 2014-04-02; 修订日期: 2014-11-22

基金项目: 国家自然科学基金 (11362016); 教育部博士学科点专项科研基金 (20123601110001)

作者简介: 王喜刚 (1981—), 男, 吉林长岭人, 讲师, 博士 (通讯作者. E-mail: fx.wxg@163.com).

环荷载作用下有限变形的数值解,并与小变形结果和动三轴实验结果进行了对比分析.发现有限变形结果与实测结果吻合较好,优于小变形结果,模糊弹粘塑性模型能方便地反映岩土材料在循环荷载作用下的动力特性.

1 有限变形的应力与应变

小变形分析假定物体所发生的位移远小于物体自身的几何尺度,在此前提下建立结构或微元体的平衡条件时不考虑物体的位置和形状的变化,因此分析中不必区分变形前和变形后的构形,在加载和变形过程中的应变可用一阶微量的线性应变进行度量,即应变与位移成一阶线性关系.

有限变形分析放弃了小变形的假定,变形前的构形称为初始构形,变形后的构形称为现实构形.在初始构形上(t_0 时刻)建立的坐标系称为物质坐标系,也叫 Lagrange 坐标系;在现实构形上建立(t_1 时刻)的坐标系称为空间坐标系,也称为 Euler 坐标系.在有限变形分析中必须保持应力和应变是在同一参考坐标系中定义的,如果应力是采用初始坐标表示的,则要求与之对应的应变是在变形前构形中定义的.为了有限元分析方便,还必须保证应力张量的对称性.于是在有限变形分析中应力张量有多种定义,主要包括 Euler 应力、Lagrange 应力和 Kirchoff 应力.

Euler 应力张量 τ_{ij} 表示现实状态上的应力,是真实应力.但在有限变形几何非线性问题中,现实状态的边界尚未确定,只有当问题完全解毕后才能确定,所以采用 Euler 应力求解几何非线性问题是有困难的.

Lagrange 应力张量 λ_{ij} 是建立在初始构形上的应力,它是在初始构形中选取微元体,并采用变形后现实构形中的力矢量 T_i 求得的,因此它不可能是一个真实的应力张量,而只能是一个名义应力张量,也叫做第一类 Kirchoff 应力张量.Lagrange 应力张量 λ_{ij} 一般情况是不对称的,这对于有限元分析是极为不利的.它与 Euler 应力张量 τ_{ij} 之间的关系为

$$\lambda_{im} = J \frac{\partial X_m}{\partial x_j} \tau_{ij}, \quad (1)$$

其中, J 为变形梯度矩阵对应的 Jacobi 行列式; X_m 为初始构形中定义的坐标; x_j 为现实构形中定义的坐标.Lagrange 应力张量 λ_{ij} 虽然是不对称的,但它是在初始构形中定义的,问题的边界条件是完全可以确定的,给非线性问题的求解带来了有利的一面.为了克服其应力张量不对称的缺点,提出了第二类 Kirchoff 应力 s_{ij} , 表示为

$$s_{im} = \frac{\partial X_l}{\partial x_i} \lambda_{lm} = J \frac{\partial X_l}{\partial x_i} \frac{\partial X_m}{\partial x_j} \tau_{lj}. \quad (2)$$

表面上看 Kirchoff 应力张量是 Lagrange 应力张量左乘 $\partial X_l / \partial x_i$ 而得,仅仅是解决后者的不对称性而引入的一个应力张量,而实际上并非完全如此,它也存在物理意义和一些重要性质,这也是得到广泛认可和应用的基础.

在有限变形分析中不同构形下的应变是要加以区分的,以初始构形为参考系,以现实 t_1 时刻状态的微元作为研究对象,得到的应变为 Green 应变,其表达式为

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_k}{\partial X_i} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} - \delta_{ij} \right). \quad (3)$$

在物质描述下:

$$x_i(X_j, t) = u_i(X_j, t) + X_i. \quad (4)$$

将式(4)代入到式(3)中可以得到用位移梯度表示的 Green 应变:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right). \quad (5)$$

若以现实构形为参考系,以现实 t_1 时刻状态的微元作为研究对象,得到的应变为 Almansi 应变,其表达式为

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\delta_{ij} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} \right). \quad (6)$$

同理在现实构形状态下, Almansi 应变的位移梯度表达式为

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right). \quad (7)$$

小变形中的 Cauchy 应变 ε_{ij} 是在不区分变形前和变形后构形的前提下得到的,即在式(5)和式(7)中忽略最右端的高阶项得到的.

在进行有限变形分析时,应当采用对构形加以区分的 Green 应变和 Almansi 应变,而我们熟悉的 Cauchy 应变不再适用.

Green 应变 E_{ij} 和第二类 Kirchoff 应力 s_{ij} 是一对功共轭的应力、应变对,可以进行有限变形分析,以下都采用 Green 应变 E_{ij} 和第二类 Kirchoff 应力 s_{ij} 进行分析,在 ABAQUS 中进行有限变形分析时,第二类 Kirchoff 应力 s_{ij} 要通过对数应变进行转化^[10].

2 模糊弹塑性理论

2.1 模糊屈服函数

屈服函数 ($f=0$) 是材料从弹性进入塑性的判断准则,设传统屈服面内的区域为一个模糊集 C ,这个模糊集代表了屈服面内的弹性区域,设弹性区域构成论域 Σ .

设 C 是屈服面内弹性区域 Σ 的一个模糊子集,则对于任意的 $\sigma \in \Sigma$,总有一个隶属函数 $\mu_c(\sigma) \in [0,1]$,称 $\mu_c(\sigma)$ 为 σ 对 C 的隶属程度,其映射关系为

$$\mu_c: \Sigma \rightarrow [0,1]. \quad (8)$$

称 μ_c 为模糊集 C 的隶属函数,它表示了材料应力状态弹性行为的隶属程度, μ_c 在整个应力范围内为一连续函数,在模糊域上任意 σ 总有一与其相关的隶属函数 $\mu_c(\sigma) \in [0,1]$.当 σ 落在屈服面以内($f < 0$) 时, $\mu_c(\sigma) \in (0,1)$, $\mu_c(\sigma)$ 的大小表明了该应力点隶属于弹性区域的程度;当 σ 落在屈服面以上或者屈服面以外($f = 0$) 时,此时 $\mu_c(\sigma) = 0$,说明该应力点隶属于弹性区域的程度为 0,即此时应力状态进入了塑性区域^[11-12].

设传统屈服函数的屈服极限为 k ,则模糊屈服极限函数可写为 $k^* = k^* [k, \mu_c(\sigma)]$,并满足下列条件:

$$k^* [k, 1] = 0, \quad k^* [k, 0] = k. \quad (9)$$

相应的屈服函数 $f^* = f^*(\sigma, k^*)$ 称为模糊屈服函数.当 $\mu_c(\sigma) = \lambda$ 时,相应的模糊屈服函数为

$$f_\lambda^* = f^*(\sigma, k^* [k, \lambda]), \quad (10)$$

f_λ^* 表示弹性隶属程度为 λ 的屈服函数,它的屈服函数曲面为 $f_0^* = 0$ 和 $f_1^* = 1$ 两个曲面之间的一个曲面. $f_0^* = 0$ 是通常定义的屈服面,此时 σ 在屈服面上,对于任意的 $\lambda \in (0,1)$, σ 落在模糊屈服面 $f_\lambda^* = 0$ 上.

为了使模糊集 C 更加清楚地显现其本质,利用上述截集的概念,令

$$C_\lambda = \{\boldsymbol{\sigma} \mid \mu_C(\boldsymbol{\sigma}) \geq \lambda\}, \quad (11)$$

称 C_λ 为模糊集 C 的 λ 截集,显而易见, C_λ 与模糊屈服函数 f_λ^* 是一一对应的。

对于任意的 $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]$, 如果 $\lambda_1 < \lambda_2$, 则模糊屈服函数 $f_{\lambda_1}^* = 0$ 所形成的区域包含模糊屈服函数 $f_{\lambda_2}^* = 0$ 所形成的区域, λ 在区间 $[0, 1]$ 上变化, 表征了模糊屈服函数 $f_\lambda^* = 0$ 所围成区域的变化, 这种变化使得 $f_\lambda^* = 0$ 成为一个可变的、运动的曲面, 它反映了弹性区域或塑性区域的归属关系, 给出了整个受力物体弹性或塑性的隶属程度, 其模糊屈服面变化如图 1 所示。

2.2 应变率效应

最早研究考虑应变率效应本构模型的是 Hohenemser 和 Prager (1961)^[13], 他们利用粘塑性材料的比拟方法得出了如下关系式:

$$2\eta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij}^p = 2k \langle \bar{f} \rangle \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{ij}}, \quad (12)$$

其中, η 为粘性系数; $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij}^p$ 为非弹性应变分量; k 为材料屈服极限; $\boldsymbol{\sigma}_{ij}$ 为应力分量。

若考虑弹性分量, 则率形式本构模型可表示为

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij} = \mathbf{A} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{2k}{2\eta} \langle \bar{f} \rangle \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{ij}}, \quad (13)$$

其中, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij}$ 为总应变率, \mathbf{A} 为弹性系数张量, $\boldsymbol{\sigma}$ 为应力张量。

在此研究基础上, 波兰学者 Perzyna 将上述理论进行了改进^[14], 其关系式如下:

$$2\eta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij}^p = 2k \langle \Phi(\bar{f}) \rangle \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{ij}}. \quad (14)$$

$\Phi(\bar{f})$ 满足以下条件:

$$\langle \Phi(\bar{f}) \rangle = \begin{cases} 0, & \bar{f} < 0, \\ \Phi(\bar{f}), & \bar{f} \geq 0. \end{cases} \quad (15)$$

函数 $\Phi(\bar{f})$ 的形式一般根据实验来确定, 常用的主要形式有

$$\Phi(\bar{f}) = \begin{cases} \bar{f}, \\ \bar{f}^\alpha, \\ \exp(\bar{f} - 1). \end{cases} \quad (16)$$

在非弹性应变速度中, 便于考虑应变率效应对本构模型的影响, 并且使得计算更加简单, 因此在塑性动力学中得到了广泛应用。

2.3 模糊弹粘塑性本构方程

由于岩土材料和金属材料的不同, 这里采用考虑了在静水压力下能发生屈服、计及中间主应力影响、屈服曲面光滑便于计算的 L-D 屈服准则, L-D 准则的屈服函数 f 和 \bar{f} 为

$$\begin{cases} f = \frac{I_1^2}{I_3} - k, \\ \bar{f} = \frac{I_1^3}{k I_3} - 1, \end{cases} \quad (17)$$

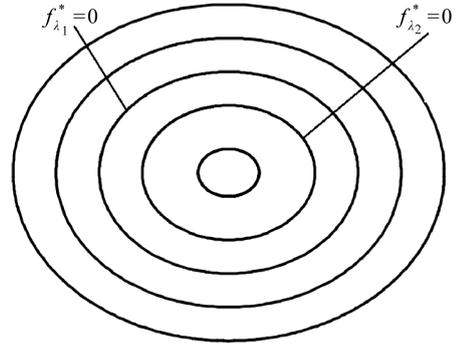


图 1 模糊塑性屈服面

Fig. 1 The fuzzy plastic yield surfaces

其中, I_1, I_3 为应力张量的第一、第三不变量.

为了满足式(9), 模糊屈服极限 k^* 可取为

$$k^* [k, \mu_c(\boldsymbol{\sigma})] = [\mu_c(\boldsymbol{\sigma})] k, \quad (18)$$

式中, $\boldsymbol{\sigma}$ 为应力张量.

在模糊弹粘塑性理论中, 根据式(10), 模糊屈服函数 f_λ^* 和 \bar{f}_λ^* 分别为

$$\begin{cases} f_\lambda^* = \frac{(I_1)_\lambda^3}{(I_3)_\lambda} - k^* = \frac{(I_1)_\lambda^3}{(I_3)_\lambda} - [\mu_c(\boldsymbol{\sigma})] k, \\ \bar{f}_\lambda^* = \frac{(I_1)_\lambda^3}{k^* (I_3)_\lambda} - 1 = \frac{(I_1)_\lambda^3}{[\mu_c(\boldsymbol{\sigma})] k (I_3)_\lambda} - 1, \end{cases} \quad (19)$$

其中, $(I_1)_\lambda, (I_3)_\lambda$ 表示 $\mu_c(\boldsymbol{\sigma}) = \lambda$ 应力状态时的应力第一、三不变量, 不同的 λ 值对应不同的应力状态.

隶属函数 $\mu_c(\boldsymbol{\sigma}_\lambda)$ 的取法应符合式(1) 以及上述模糊理论, 这里取 $\mu_c(\boldsymbol{\sigma}_\lambda)$ 为下式:

$$\mu_c(\boldsymbol{\sigma}_\lambda) = \frac{(I_1)_\lambda^3}{k (I_3)_\lambda}. \quad (20)$$

上式的定义是合理的, 当选择传统意义下的最大屈服面(破坏面), 此时 $\mu_c(\boldsymbol{\sigma}_\lambda) = 1$, 对应的模糊屈服极限 $k^* [k, \mu_c(\boldsymbol{\sigma})] = k$, 模糊屈服函数为通常意义下的屈服函数, $f_{\lambda=1}^* = f$. 从这里也可以看出, 模糊屈服函数 f_λ^* 包含传统意义下的屈服函数 f , 传统意义下的屈服函数 f 只是模糊屈服函数 f_λ^* 的一个特例. 实际上 $\mu_c(\boldsymbol{\sigma}_\lambda)$ 的选取有多种形式.

为了获得模糊弹粘塑性本构关系, 将式(19)代入到式(14)中, 可以得到

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = 2k \left\langle \Phi \left(\frac{(I_1)_\lambda^3}{[\mu_c(\boldsymbol{\sigma})] k (I_3)_\lambda} - 1 \right) \right\rangle \frac{\partial \left(\frac{(I_1)_\lambda^3}{(I_3)_\lambda} - [\mu_c(\boldsymbol{\sigma})] k \right)}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (21)$$

若考虑弹性部分, 则本构模型可表示为

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \mathbf{A} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + 2k \left\langle \Phi \left(\frac{(I_1)_\lambda^3}{[\mu_c(\boldsymbol{\sigma})] k (I_3)_\lambda} - 1 \right) \right\rangle \frac{\partial \left(\frac{(I_1)_\lambda^3}{(I_3)_\lambda} - [\mu_c(\boldsymbol{\sigma})] k \right)}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (22)$$

式(22)便是模糊弹粘塑性本构方程, 若函数 $\langle \Phi(\bar{f}) \rangle$ 取为 \bar{f} 形式, 则相应的模糊弹粘塑性本构方程为

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \mathbf{A} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + 2k \left\{ \frac{(I_1)_\lambda^3}{[\mu_c(\boldsymbol{\sigma})] k (I_3)_\lambda} - 1 \right\} \frac{\partial \left(\frac{(I_1)_\lambda^3}{(I_3)_\lambda} - [\mu_c(\boldsymbol{\sigma})] k \right)}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (23)$$

式(23)即为基于 L-D 屈服准则的模糊弹粘塑性本构方程, $\mu_c(\boldsymbol{\sigma}_\lambda)$ 按式(20)计算.

2.4 有限变形的模糊弹粘塑性模型

在小变形模糊弹粘塑性本构方程(23)的基础上, 用 Green 应变 E_{ij} 和第二类 Kirchoff 应力 s_{ij} 替换上述小变形情况下的工程应变 ε_{ij} 和 Cauchy 应力 σ_{ij} , 同时取代相应的主应力不变量 I_1 和 I_3 , 可以得到有限变形模糊弹粘塑性本构方程为

$$\dot{E}_{ij} = \mathbf{A} : \dot{\mathbf{s}} + 2k \left\{ \frac{(I_1^d)_\lambda^3}{[\mu_c(\mathbf{s}_\lambda)] k (I_3^d)_\lambda} - 1 \right\} \frac{\partial \left(\frac{(I_1^d)_\lambda^3}{(I_3^d)_\lambda} - [\mu_c(\mathbf{s}_\lambda)] k \right)}{\partial s_{ij}}, \quad (24)$$

式中, \dot{E}_{ij} 为 Green 应变率; \dot{s} 为第二类 Kirchoff 应力率; I_1^d 为第二类 Kirchoff 应力表示的应力第一不变量; I_3^d 为第二类 Kirchoff 应力表示的应力第三不变量; $\mu_c(s_\lambda)$ 为第二类 Kirchoff 应力表示的材料塑性隶属度函数。

3 有限变形增量形式有限元分析

3.1 基本关系

3.1.1 几何方程

在有限变形分析中要考虑变形前后物体的构形变化,应变与位移的关系是非线性的,且岩土材料的物理关系也是非线性的,所以岩土材料有限变形弹塑性问题是非线性的问题.在求解问题时就需要我们求解一组偏微分方程组,一般采用迭代法或增量法^[15].

在 Lagrange 物质描述方法中,有限元剖分后,在初始构形单元中任意点的坐标和位移通过形函数 N 插值得到.

$$\mathbf{X} = \mathbf{N}\mathbf{X}^e, \quad (25)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{u}^e, \quad (26)$$

式中, \mathbf{X} 表示任意点的坐标, \mathbf{u} 表示任意点的位移, \mathbf{X}^e 表示单元节点坐标, \mathbf{u}^e 表示单元节点位移.

有限变形中, Green 应变写成两部分, \mathbf{E}_L 表示 Green 应变的线性部分, \mathbf{E}_N 表示 Green 应变的非线性部分.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_L + \mathbf{E}_N, \quad (27)$$

其中

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{ijL} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right), \\ \mathbf{E}_{ijN} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial X_j} \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \right). \end{cases} \quad (28)$$

Green 应变 \mathbf{E} 与单元节点位移 \mathbf{u}^e 之间的关系可以写成

$$\mathbf{E} = \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}^e. \quad (29)$$

Green 应变 \mathbf{E} 与单元节点位移 \mathbf{u}^e 之间的关系是非线性的,其中 $\bar{\mathbf{B}}$ 表示 Green 应变与单元节点位移之间的非线性转换矩阵, $\bar{\mathbf{B}}$ 由两部分组成,可以表示为

$$\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{B}_L + \mathbf{B}_N, \quad (30)$$

式中, \mathbf{B}_L 是 Green 应变线性部分 \mathbf{E}_L 与单元节点位移 \mathbf{u}^e 之间的转换矩阵,而 \mathbf{B}_N 是 Green 应变非线性部分 \mathbf{E}_N 与单元节点位移 \mathbf{u}^e 之间的转换矩阵.

Green 应变 \mathbf{E} 与单元节点位移 \mathbf{u}^e 之间的增量关系可以写成

$$d\mathbf{E} = \mathbf{B}d\mathbf{u}^e, \quad (31)$$

其中, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_L + 2\mathbf{B}_N$.通过式(29)和(31)对比可以发现 Green 应变与单元节点位移之间的转换矩阵 $\bar{\mathbf{B}}$ 和 Green 应变增量与单元节点位移增量之间的转换矩阵 \mathbf{B} 不一样,这一点和小变形情况是不同的.

3.1.2 平衡方程

根据虚功原理,建立单元的平衡方程:

$$\int_{V_0} d\mathbf{E}^T \mathbf{S} dV = \int_{V_0} d\mathbf{u}^T \mathbf{f} dV + \int_{A_0} d\mathbf{u}^T \mathbf{F} dA. \quad (32)$$

根据式(26),位移增量可表示为

$$d\mathbf{u} = N d\mathbf{u}^e. \quad (33)$$

将式(31)和(33)代入到式(32),得到

$$\int_{V_0} \mathbf{B}^T \mathbf{S} dV - \mathbf{R} = \mathbf{0}, \quad (34)$$

其中, $\mathbf{R} = \int_{V_0} N^T \mathbf{f} dV + \int_{A_0} N^T \mathbf{F} dA$, 表示单元的荷载等效节点力矢量, \mathbf{f} 表示单元的体积力, \mathbf{F} 表示作用在单元上的面力, V_0 表示单元的体积, A_0 表示面力对应的单元面积.

应力与应变的增量型本构关系可以写成

$$\mathbf{S} = \mathbf{D} \mathbf{E}. \quad (35)$$

将式(29)代入到式(35),再代入到式(34)可得

$$\mathbf{K} \mathbf{u}^e - \mathbf{R} = \mathbf{0}. \quad (36)$$

式(36)是单元的平衡方程组,其中 $\mathbf{K} = \int_{V_0} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \bar{\mathbf{B}} dV$, 是系统的刚度矩阵,由于 \mathbf{B} 和 $\bar{\mathbf{B}}$ 都是位移的函数,矩阵 \mathbf{D} 也是位移的非线性函数,由本构方程确定.所以方程组是一个非线性方程组,且矩阵 \mathbf{K} 是非对称的,区别于小变形的刚度矩阵.

3.1.3 物理方程

根据式(24),材料的增量型本构关系可表示为

$$d\dot{\mathbf{E}}_{ij} = \mathbf{A} : d\dot{\mathbf{s}} + 2k \left\{ \frac{(dI_1^d)_\lambda^3}{[\mu_c(s_\lambda)] k (dI_3^d)_\lambda} - 1 \right\} \frac{\partial \left(\frac{(dI_1^d)_\lambda^3}{(dI_3^d)_\lambda} - [\mu_c(s_\lambda)] k \right)}{\partial s_{ij}}. \quad (37)$$

应用 Fortran 编写式(37),使其程序化,以便在有限元分析中将其引入.

3.2 动三轴实验与有限元分析

采用 SDT-10 型微机控制电液伺服动态土工三轴测试系统对某土样进行动三轴实验研究,土样参数如表 1 所示.试样尺寸为直径 39.1 mm、高 80 mm 的重塑圆柱土样,试样采用分层湿捣法分 5 层击实得到,确保土样的均匀性^[14].在三轴压力室内通过使用不含气的水、施加反压等方法使土样达到饱和状态,然后土样发生固结,直到 5 min 内土样的体积不发生变化时认为土样固结完成.接下来在土样不排水状况下,在一定的固结应力状态下,在竖直轴向上施加不同幅值的动荷载进行三轴实验.固结压力选用 40 kPa, 80 kPa, 120 kPa 3 组压力,对应的动荷载都采用正弦波形式,振动频率 1 Hz,剪应力比取为 0.25,动荷载幅值分别为 20 kPa, 40 kPa, 60 kPa.

表 1 土样参数表

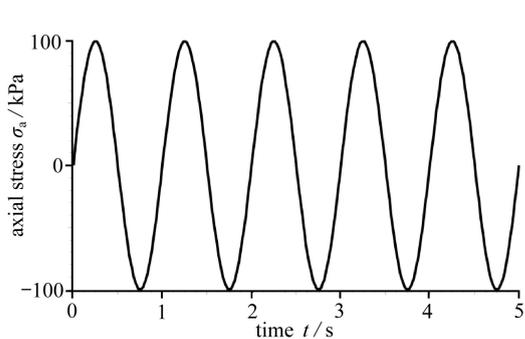
Table 1 The soil parameters

soil	specific density ρ	moisture content v / %	initial void ratio e
sandy soil	2.9	25	0.587

围压 120 kPa、动荷载幅值 60 kPa 的动三轴实验结果如图 2 所示.

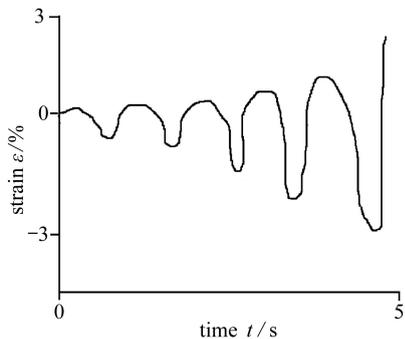
在 ABAQUS 平台上建立动三轴实验模型,采用 Green 应变和第二类 Kirchoff 应力作为应力、应变的度量,应用 ABAQUS 的材料用户子程序 UMAT 将 Fortran 编写的物理方程引入到 ABAQUS 中,这样 ABAQUS 就能按照式(36)和(37)来反映岩土材料的几何非线性和材料非线性,从而可以进行岩土材料的有限变形分析^[16-18].

土动三轴的有限元模型如图 3 所示,材料参数与表 1 相同,三轴模拟结果如图 4 所示.



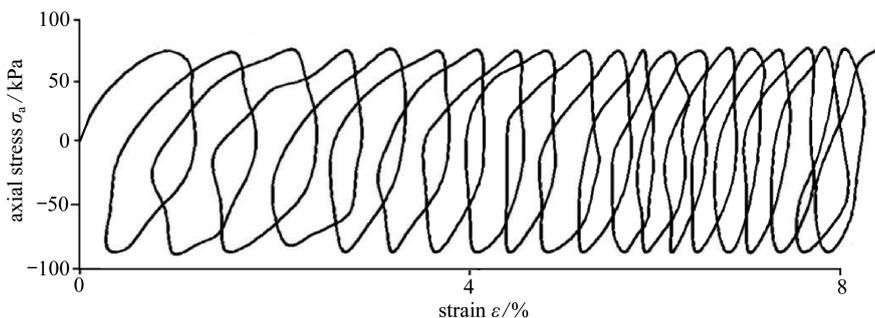
(a) 轴向应力-时间关系

(a) The relationship between axial stress and time



(b) 应变-时间关系

(b) The relationship between strain and time

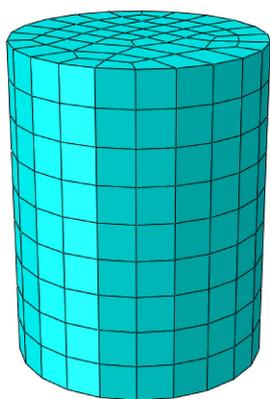


(c) 应力-应变曲线

(c) The relationship between stress and strain

图 2 三轴实验结果

Fig. 2 The dynamic triaxial test results



(a) 有限元网络

(a) The finite element mesh



(b) 边界条件

(b) The boundary conditions

图 3 有限元模型

Fig. 3 The finite element model

3.3 结果对比分析

将三轴实验结果、小变形的模拟结果和有限变形的模拟结果对比分析,其结果如图 4~6 所示。

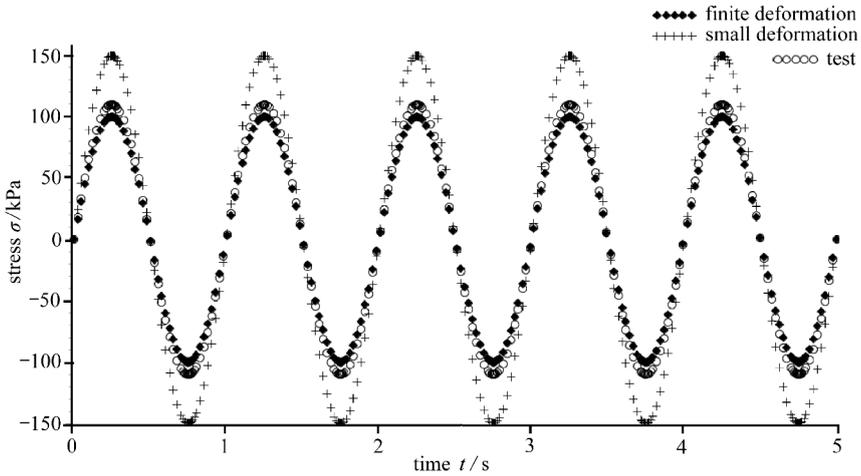


图 4 应力-时间图对比

Fig. 4 Comparison of stress-time curves

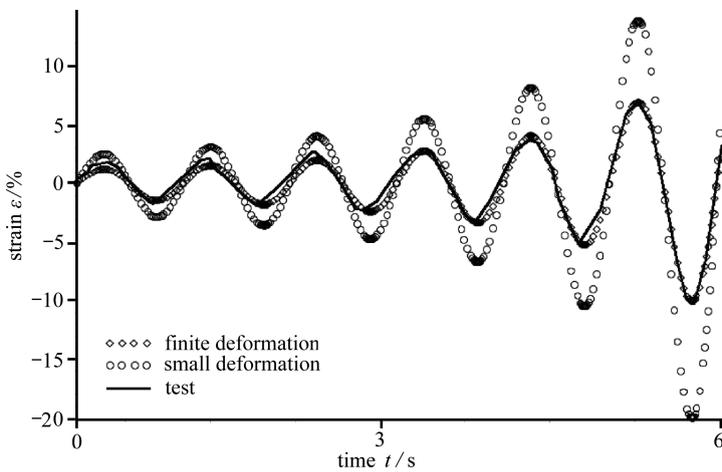


图 5 应变-时间图对比

Fig. 5 Comparison of strain-time curves

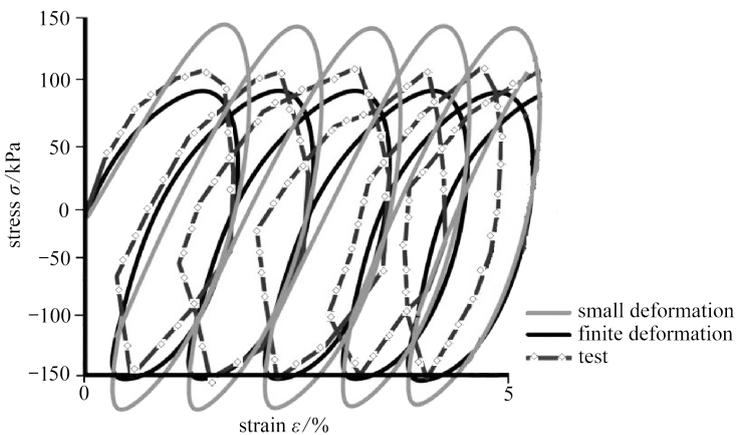


图 6 应力-应变图对比

Fig. 6 Comparison of stress-strain curves

通过图 4~6 可以发现,有限变形模拟的结果更加接近于动三轴实验结果,说明采用有限变形理论分析岩土材料比小变形理论更加合理;且率型模糊弹粘塑性本构模型能很好地反映土样的动力特性,在有限元中容易实现且不出现间断,用较少的数学表达式就能反映循环荷载的加卸载过程。

4 结 论

本文在有限变形框架下,应用模糊弹粘塑性理论对岩土材料进行了动力特性的分析,得到结果如下:

1) 将模糊数学中的隶属度引入到 L-D 屈服准则中,隶属度函数的连续变化能反映岩土材料弹性状态到塑性状态的连续过渡。模糊弹粘塑性理论一受载就产生塑性应变的性质非常适合岩土材料,也可以说岩土材料没有绝对的弹性和塑性,只有弹塑性程度的不同,该理论能有效地反映循环荷载作用下岩土材料的动力性能。

2) 利用 Fortran 将基于 L-D 屈服准则的模糊弹粘塑性本构模型程序化,通过 ABAQUS 用户子程序 UMAT 把该模型引入到 ABAQUS 中。采用 Green 应变和第二类 Kirchoff 应力作为应变和应力的度量,进行岩土材料的有限变形分析,利用有限元模拟得到了有限变形的数值模拟结果。通过与小变形的有限元结果和动三轴实验结果对比发现,有限变形模拟得到的应力、应变结果更加接近于动三轴实验的结果。

3) 通过有限元实现了模糊弹粘塑性动力本构模型,该模型能很好地反映岩土材料循环加卸载过程,数学表达式简单,弹塑性连续过渡,数学导数不间断,便于有限元的开发应用,是一个有前景的动力模型,日后将在模型的塑性应变累积和滞回等特性上做进一步的研究。

参考文献 (References):

- [1] Hill R. Some basic principles in the mechanics of solids without a natural time[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1959, 7(3): 209-225.
- [2] Hill R. Aspects invariance in solid mechanics[J]. *Advances in Applied Mechanics*, 1978, 18: 1-75.
- [3] 郭仲衡. 非线性弹性理论[M]. 北京: 科学出版社, 1980. (GUO Zhong-heng. *Nonlinear Elastic Theory*[M]. Beijing: Science Press, 1980. (in Chinese))
- [4] Guo Z H, Dubey R H. Basic aspects of Hill's method in solid mechanics[J]. *Solid Mechanics Archives*, 1984, 9: 353-380.
- [5] Guo Z H, Man C S. Conjugate stress and tensor equation $\sum_{r=1}^m U^{m-r} X U^{r-1} = C$ [J]. *International Journal of Solid and Structure*, 1992, 29(16): 2063-2076.
- [6] 谢永利. 大变形固结理论及其有限元法[M]. 北京: 人民交通出版社, 1998. (XIE Yong-li. *The Large Deformation Consolidation Theory and Finite Element Method* [M]. Beijing: China Communications Press, 1998. (in Chinese))
- [7] 刘学军, 李明瑞, 黄文彬. 基于对数应变的有限变形弹塑性理论[J]. 中国农业大学学报, 2000, 5(6): 34-39. (LIU Xue-jun, LI Ming-rui, HUANG Wen-bin. Finite deformation elasto-plastic theory based on logarithmic strain and consistent algorithm[J]. *Journal of China Agricultural University*, 2000, 5(6): 34-39. (in Chinese))
- [8] 刘学军, 李明瑞. 基于对数应变的有限变形弹塑性一致性算法[J]. 中国农业大学学报, 2001, 6

- (2): 32-39. (LIU Xue-jun, LI Ming-rui. Finite deformation elasto plastic theory based on logarithmic strain and consistent algorithm[J]. *Journal of China Agricultural University*, 2001, **6**(2): 32-39. (in Chinese))
- [9] 韩昌瑞. 有限变形理论及其在岩土工程中的应用[D]. 博士学位论文. 武汉: 中国科学院, 武汉岩土力学研究所, 2009. (HAN Chang-rui. The theory of finite deformation and its application in geotechnical engineering[D]. PhD Thesis. Wuhan: Institute of Rock and Soil Mechanics, Chinese Academy of Sciences, 2009. (in Chinese))
- [10] 扶名福, 徐秉业, 熊祝华. 模糊弹粘塑性问题及其解的唯一性和存在性[J]. 江西工业大学学报, 1992, **14**(1): 1-11. (FU Ming-fu, XU Bing-ye, XIONG Zhu-hua. Problem of fuzzy elasto-visto-plasticity and uniqueness and existence of the solution[J]. *Journal of Jiangxi Polytechnic University*, 1992, **14**(1): 1-11. (in Chinese))
- [11] 扶名福, 熊祝华, 徐秉业. 球壳的模糊弹粘塑性分析[J]. 工程力学, 1994, **11**(2): 1-7. (FU Ming-fu, XIONG Zhu-hua, XU Bing-ye. Analysis of fuzzy elasto-visto-plasticity for spherical shell[J]. *Engineering Mechanics*, 1994, **11**(2): 1-7. (in Chinese))
- [12] 殷有泉. 非线性有限元基础[M]. 北京: 北京大学出版社, 2007. (YIN You-quan. *Nonlinear Finite Element Basis*[M]. Beijing: Peking University Press, 2007. (in Chinese))
- [13] Hohenemser K, Prager W. *Dynamics of Structures*[M]. Stuttgart: Verlagsgruppe Georg von Holtzbrinck GmbH, 1961.
- [14] Perzyna P. Fundamental problems in viscoplasticity[J]. *Advances in Applied Mechanics*, 1966, **9**(2): 243-377.
- [15] 刘健, 廖红建, 李杭州. 饱和重塑黄土动力反应的数值模拟[J]. 西安交通大学学报, 2008, **42**(1): 101-105. (LIU Jian, LIAO Hong-jian, LI Hang-zhou. Numerical simulation on dynamic response of saturated remolded loess soil[J]. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 2008, **42**(1): 101-105. (in Chinese))
- [16] 王新栋, 邓子辰, 王艳, 冯国春. 基于时间有限元方法的旋转柔性叶片动力学响应分析[J]. 应用数学和力学, 2014, **35**(4): 353-363. (WANG Xin-dong, DENG Zi-chen, WANG Yan, FENG Guo-chun. Dynamic behavior analysis of rotational flexible blades based on time-fomain finite element method[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, **35**(4): 353-363. (in Chinese))
- [17] 刘春梅, 钟柳强, 舒适, 肖映雄. 平面弹性问题自适应有限元方法的收敛性分析[J]. 应用数学和力学, 2014, **35**(9): 969-978. (LIU Chun-mei, ZHONG Liu-qiang, SHU Shi, XIAO Ying-xiong. Convergence of an adaptive finite element method for 2D elasticity problems[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, **35**(9): 969-978. (in Chinese))
- [18] 庄茁. ABAQUS 非线性有限元分析与实例[M]. 北京: 科学出版社, 2005. (ZHUANG Zhuo. *Nonlinear Finite Element Analysis and Examples on ABAQUS*[M]. Beijing: Science Press, 2005. (in Chinese))

Fuzzy Elasto-Visco-Plasticity Analysis of Finite Deformation Based on the L-D Plastic Flow Rule

WANG Xi-gang^{1,2}, FU Ming-fu¹

- (1. *Center of Engineering Mechanical Experiment, Nanchang University, Nanchang 330031, P.R.China;*
2. *College of Resources and Civil Engineering, Liaoning Institute of Science and Technology, Benxi, Liaoning 117004, P.R.China)*

Abstract: To dynamically analyze the finite deformation of rock and soil materials, the Green strain and the 2nd Kirchoff stress were used to describe their geometric nonlinearity. Through introduction of a membership function into the yield function, a fuzzy elasto-visco-plastic constitutive model based on the L-D plastic flow rule was built. According to the principle of non-linear finite element, the numerical finite-deformation results corresponding to the dynamic triaxial soil tests were obtained, and compared with those traditional small-deformation results. The comparison shows that the finite-deformation results were closer to the dynamic triaxial tested results. Moreover, the fuzzy elasto-visco-plastic model well reflects the soil and rock dynamic properties under cyclic loading, and thus makes an effective way for soil and rock dynamic analysis, given its relatively simpler mathematical formulation and more convenience for finite element programming.

Key words: membership function; fuzzy elasto-visco-plasticity; L-D plastic flow rule; finite deformation; dynamic triaxial test

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11362016)