

# 轴对称 Poisson 方程的 Trefftz 有限元解法\*

刘 博<sup>1</sup>, 王克用<sup>1,2</sup>, 王明红<sup>1</sup>

(1. 上海工程技术大学 机械工程学院, 上海 201620;

2. 美国加州大学 机械工程系, 加利福尼亚 河滨 92507, 美国)

**摘要:** 将径向基函数应用到一类轴对称 Poisson 方程的数值求解中,提出了一种 Trefftz 有限元计算格式.非 0 右端项将问题的特解引入 Trefftz 单元域内场,致使单元刚度方程涉及区域积分.利用径向基函数对特解近似处理,可消除区域积分,从而保持 Trefftz 有限元法只含边界积分的优势.为获得特解,选取求解域内所有单元的节点和形心作为基本插值点,而在求解域之外构造一个虚拟边界,在其上布置一定数目的虚拟点作为额外插值点.数值算例验证了该方法的有效性和可行性.

**关键词:** 轴对称 Poisson 方程; Trefftz 有限元法; 径向基函数; 完全椭圆积分

**中图分类号:** O242.21; O242.82      **文献标志码:** A

**doi:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2015.02.003

## 引 言

当含有源汇或体力时,力学和物理中的许多现象如热传导、渗流、柱体扭转、腐蚀场及电磁场,最终均可归结为 Poisson 方程.此类方程通常可借助常规有限元法和边界元法等经典数值方法加以解决.然而,研究者们发现, Trefftz 有限元法 (Trefftz finite element method, TFEM) 具有网格畸变不敏感性、多边形单元构造便捷、单元列式仅含边界积分等特点,其性能在诸多方面优于常规有限元法和边界元法. TFEM 是 Jirousek 和 Leon<sup>[1]</sup> 在研究薄板弯曲问题时提出的一种新型有限元模型,其基本做法是:利用辅助网线位移场或面力场,在一种杂交意义上将单元域内位移场关联起来.单元域内位移场精确满足问题的控制方程,它可表达为控制方程的特解、截断完备解 (即 Trefftz 插值函数) 与待定参数两者乘积之和,而单元间连续性通过网线位移场在一种近似意义上得到满足<sup>[2-3]</sup>.

众所周知, Poisson 方程是一种非齐次方程,非 0 右端项给 Trefftz 有限元法的应用带来障碍,这是因为单元域内场的 Trefftz 插值函数通常是基于齐次方程建立的<sup>[3]</sup>.为了克服这种困难, Wang 等<sup>[4]</sup> 基于 Trefftz 有限元模型和相似方程法,提出用径向基函数 (radial basis functions, RBFs) 对特解作近似处理,研究了极小曲面问题并讨论了 Trefftz 函数项数对计算结果的影响.类似地, Cao 等<sup>[5]</sup>、Fu 等<sup>[6]</sup> 基于径向基函数与 Trefftz 有限元法,研究了功能梯度材料的热传导

\* 收稿日期: 2014-09-09; 修订日期: 2014-11-13

基金项目: 上海高校青年骨干教师国外访问学者计划

作者简介: 刘博 (1990—), 男, 河南南阳人, 硕士生 (E-mail: 708989488@qq.com);

王克用 (1975—), 男, 河北唐山人, 讲师, 博士 (通讯作者. E-mail: keyong.wang@hotmail.com).

问题.笔者<sup>[7]</sup>基于完备解构造单元域内场,采用径向基函数法获得特解表达式,成功应用于正交各向异性位势问题.

然而,上述研究均局限于二维 Poisson 方程,Trefftz 有限元法在轴对称 Poisson 方程中的应用却鲜有报道.为此,本文在前期工作基础上<sup>[8-9]</sup>,利用轴对称径向基函数获得封闭形式的近似特解,结合杂交泛函求得 Trefftz 单元刚度方程求得齐次解,最终通过线性叠加原理获得轴对称 Poisson 方程的全解.

## 1 问题的数学物理方程

考虑型如

$$\frac{\partial^2 u(\boldsymbol{\rho})}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u(\boldsymbol{\rho})}{\partial r} + \frac{\partial^2 u(\boldsymbol{\rho})}{\partial z^2} = f(\boldsymbol{\rho}) \quad (\boldsymbol{\rho} \in \Omega) \quad (1)$$

的 Poisson 方程及 Dirichlet 和 Neumann 边界条件:

$$u(\boldsymbol{\rho}) = \bar{u}(\boldsymbol{\rho}) \quad (\boldsymbol{\rho} \in \Gamma_u), \quad (2)$$

$$q(\boldsymbol{\rho}) = \frac{\partial u(\boldsymbol{\rho})}{\partial r} n_r + \frac{\partial u(\boldsymbol{\rho})}{\partial z} n_z = \bar{q}(\boldsymbol{\rho}) \quad (\boldsymbol{\rho} \in \Gamma_q), \quad (3)$$

式中,  $u(\boldsymbol{\rho})$  为解函数,  $\boldsymbol{\rho} = \{r, z\}^T$ ,  $q(\boldsymbol{\rho})$  为解函数的外法向导数,  $n_r, n_z$  为边界  $\Gamma$  上的外法线方向余弦,  $\bar{u}$  和  $\bar{q}$  为给定解函数和外法向导数,  $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_q$  为求解域  $\Omega$  围成的边界.

一般地,根据线性叠加原理,全解  $u(\boldsymbol{\rho})$  可分解为特解和齐次解两部分:

$$u(\boldsymbol{\rho}) = u_p(\boldsymbol{\rho}) + u_h(\boldsymbol{\rho}). \quad (4)$$

那么,原 Poisson 方程的边值问题就转化为

$$\frac{\partial^2 u_p(\boldsymbol{\rho})}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_p(\boldsymbol{\rho})}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_p(\boldsymbol{\rho})}{\partial z^2} = f(\boldsymbol{\rho}) \quad (\boldsymbol{\rho} \in \Omega), \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 u_h(\boldsymbol{\rho})}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_h(\boldsymbol{\rho})}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_h(\boldsymbol{\rho})}{\partial z^2} = 0 \quad (\boldsymbol{\rho} \in \Omega), \quad (6)$$

$$u_h(\boldsymbol{\rho}) = \bar{u} - u_p(\boldsymbol{\rho}) \quad (\boldsymbol{\rho} \in \Gamma_u), \quad (7)$$

$$q_h(\boldsymbol{\rho}) = \bar{q} - q_p(\boldsymbol{\rho}) \quad (\boldsymbol{\rho} \in \Gamma_q). \quad (8)$$

一旦由式(5)求得特解  $u_p(\boldsymbol{\rho})$ , 就可利用 Trefftz 有限元模型得到式(6)、(7)和(8)对应的齐次解  $u_h(\boldsymbol{\rho})$ .

## 2 径向基函数法及 Trefftz 有限元列式

### 2.1 特解的径向基函数近似

为求特解  $u_p(\boldsymbol{\rho})$ , 式(5)的右端项可近似写成

$$f(\boldsymbol{\rho}) \approx \sum_{k=1}^{L_i+L_e} \alpha_k \varphi_k(\boldsymbol{\rho}), \quad (9)$$

式中,  $\alpha_k$  为待定系数,  $\varphi_k(\boldsymbol{\rho})$  为基函数,  $L_i$  和  $L_e$  分别为求解域内部和外部的插值点总数.至此,寻求特解问题就退化为求解下列方程的解:

$$\frac{\partial^2 \Phi_k(\boldsymbol{\rho})}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_k(\boldsymbol{\rho})}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi_k(\boldsymbol{\rho})}{\partial z^2} = \varphi_k(\boldsymbol{\rho}), \quad (10)$$

式中,  $\Phi_k(\boldsymbol{\rho})$  是对应于右端项  $\varphi_k(\boldsymbol{\rho})$  的一个封闭形式的近似特解<sup>[10]</sup>.

这里,取

$$\varphi_k(\boldsymbol{\rho}) = 4\sqrt{a+b} E(k). \quad (11)$$

将式(11)代入式(10)并求解,可得<sup>[10]</sup>

$$\Phi_k(\boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{9}(a+b)^{3/2}[(k^2-1)K(k) + (4-2k^2)E(k)], \quad (12)$$

式中,  $a = r_i^2 + r^2 + (z_i - z)^2$ ,  $b = 2r_i r$ ,  $k = \sqrt{2b/(a+b)}$ ,  $\boldsymbol{\rho}_i = \{r_i, z_i\}^T$  插值点坐标,  $K(k)$  和  $E(k)$  分别为第一类、第二类完全椭圆积分,其表达式为

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}}, \quad E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta} d\theta. \quad (13)$$

仿照式(9),特解  $u_p(\boldsymbol{\rho})$  也可近似表达为

$$u_p(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{k=1}^{L_i+L_e} \alpha_k \Phi_k(\boldsymbol{\rho}). \quad (14)$$

由于式(5)右端项是已知的,利用奇异值分解法<sup>[3-4]</sup>可由式(9)和(11)求得  $\alpha_k$ ,进而由式(12)和(14)得到特解  $u_p(\boldsymbol{\rho})$ .

类似地,特解  $u_p(\boldsymbol{\rho})$  的外法向导数可表示为

$$q_p(\boldsymbol{\rho}) = \frac{\partial u_p(\boldsymbol{\rho})}{\partial n} = \sum_{k=1}^{L_i+L_e} \alpha_k \frac{\partial \Phi_k(\boldsymbol{\rho})}{\partial n} = \sum_{k=1}^{L_i+L_e} \alpha_k \left[ \frac{\partial \Phi_k(\boldsymbol{\rho})}{\partial r} n_r + \frac{\partial \Phi_k(\boldsymbol{\rho})}{\partial z} n_z \right], \quad (15)$$

式中

$$\frac{\partial \Phi_k(\boldsymbol{\rho})}{\partial r} = (r+r_i) \sqrt{a+b} E(k) + \frac{2r_i}{3k^2} \sqrt{a+b} [(k^2-1)K(k) + (1-2k^2)E(k)], \quad (16)$$

$$\frac{\partial \Phi_k(\boldsymbol{\rho})}{\partial z} = (z-z_i) \sqrt{a+b} E(k). \quad (17)$$

## 2.2 Trefftz 有限元列式

图1为4节点轴对称 Trefftz 单元,其场函数插值模式分为单元域内场和单元边界场(网线场).单元域内插值函数(即 Trefftz 函数)精确满足控制方程,可采用问题的截断完备解构造,而单元边界插值函数(常称为网线函数)近似满足单元间连续条件,一般采用常规有限元法的形函数.下面,我们将推导对应 Laplace(拉普拉斯)方程(6)及边界条件(7)和(8)的 Trefftz 有限元列式.

单元域内场插值模式为

$$u_{eh}(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{j=1}^m N_{ej} c_{ej} = N_e(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{c}_e(\boldsymbol{\rho}) \quad (\boldsymbol{\rho} \in \Omega_e). \quad (18)$$

单元边界网线场插值模式为

$$\tilde{u}_{eh}(\boldsymbol{\rho}) = \tilde{N}_e(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{d}_e(\boldsymbol{\rho}) \quad (\boldsymbol{\rho} \in \Gamma_e), \quad (19)$$

式中,  $N_e(\boldsymbol{\rho})$  为 Trefftz 函数矩阵,由  $m$  个截断完备解构成,  $\mathbf{c}_e$  为待定参数列阵,  $\tilde{N}_e(\boldsymbol{\rho})$  为常规有限元法的形函数矩阵,  $\mathbf{d}_e$  为单元节点自由度列阵.变量上方的“~”用于区分单元域内和边界.为防止零能模式出现并保证单元性能稳定,  $N_e(\boldsymbol{\rho})$  含有的截断完备解数目(即 Trefftz 项数)应满足下列关系式<sup>[10]</sup>:

$$m > m_d - 1, \quad (20)$$

式中,  $m_d$  为单元节点自由度数.

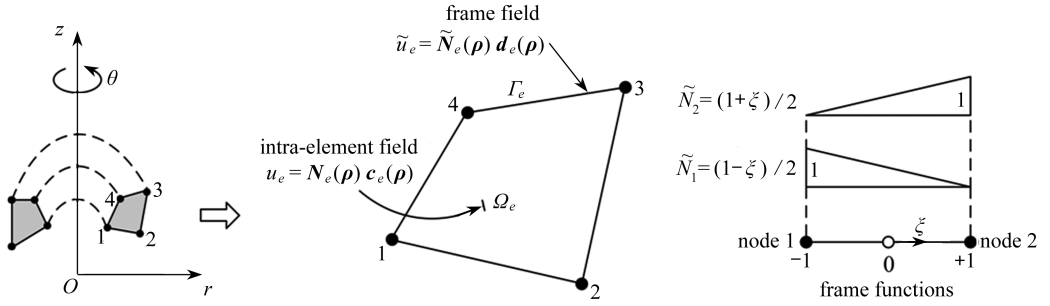


图 1 轴对称 Trefftz 单元及其网线函数

Fig. 1 An axisymmetric Trefftz element and its frame functions

利用式(18),单元边界  $\Gamma_e$  上的外法向导数  $q_{eh}(\boldsymbol{\rho})$  可写成

$$q_{eh}(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{j=1}^m Q_{ej} c_{ej} = \mathbf{A} \mathbf{T}_e(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{c}_e = \mathbf{Q}_e(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{c}_e(\boldsymbol{\rho}), \quad (21)$$

式中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} n_r & 0 \\ 0 & n_z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_e(\boldsymbol{\rho}) = \left\{ \frac{\partial N_e(\boldsymbol{\rho})}{\partial r} \quad \frac{\partial N_e(\boldsymbol{\rho})}{\partial z} \right\}^T. \quad (22)$$

方程(6)的完备解可表达成  $n$  阶准调和多项式

$$T(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{i=0}^n a_i r^{n-i} z^i \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (23)$$

为了确定待定系数  $a_i$ , 将式(23)代入式(6), 可得下列递推公式<sup>[10]</sup>:

$$a_{i+2} = - \frac{(n-i)^2}{(i+1)(i+2)} a_i, \quad (24)$$

式中, 当  $n$  为偶数时,  $a_0 = 1$  和  $a_{2i+1} = 0$ ; 当  $n$  奇数时,  $a_1 = 0, a_{2i} = 0$ .

与轴对称 Laplace 问题等价的杂交泛函为<sup>[10]</sup>

$$\begin{aligned} \Pi_{me} &= \pi \iint_{\Omega_e} (k_r q_{er}^2 + k_z q_{ez}^2) r d\Omega - 2\pi \int_{\Gamma_{eu}} q_{eh} \bar{u}_{eh} r d\Gamma + \\ & 2\pi \int_{\Gamma_{eq}} (\bar{q}_{eh} - q_{eh}) \tilde{u}_{eh} r d\Gamma - 2\pi \int_{\Gamma_{et}} q_{eh} \tilde{u}_{eh} r d\Gamma, \end{aligned} \quad (25)$$

式中,  $q_{er} = \partial u_{eh} / \partial r, q_{ez} = \partial u_{eh} / \partial z$ , 为简洁起见, 泛函中略去了  $(\boldsymbol{\rho})$ . 应用 Gauss(高斯)散度定理以及修正边界条件(7)和(8), 并注意到在边界  $\Gamma_e$  上有  $\bar{u} = \tilde{u}$ , 可消去式(25)涉及的区域积分, 得到下列仅含边界积分的紧凑形式

$$\Pi_{me} = \pi \int_{\Gamma_e} q_{eh} u_{eh} r d\Gamma - 2\pi \int_{\Gamma_e} q_{eh} \tilde{u}_{eh} r d\Gamma + 2\pi \int_{\Gamma_{eq}} (\bar{q}_e - q_{ep}) \tilde{u}_{eh} r d\Gamma. \quad (26)$$

将式(18)、(19)和(21)代入式(26), 可得

$$\Pi_{me} = \frac{1}{2} \mathbf{c}_e^T \mathbf{H}_e \mathbf{c}_e - \mathbf{c}_e^T \mathbf{G}_e \mathbf{d}_e + \mathbf{d}_e^T \mathbf{p}_e + \text{terms without } \mathbf{c}_e \text{ or } \mathbf{d}_e, \quad (27)$$

式中

$$\mathbf{H}_e = \pi \int_{\Gamma_e} \mathbf{Q}_e^T \mathbf{N}_e r d\Gamma, \quad \mathbf{G}_e = 2\pi \int_{\Gamma_e} \mathbf{Q}_e^T \tilde{\mathbf{N}}_e r d\Gamma, \quad \mathbf{p}_e = 2\pi \int_{\Gamma_{eq}} \mathbf{N}_e^T \bar{q}_e r d\Gamma. \quad (28)$$

对泛函(27)应用驻值原理, 得

$$\frac{\partial \Pi_{me}}{\partial \mathbf{c}_e^T} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{c}_e = \mathbf{H}_e^{-1} \mathbf{G}_e \mathbf{d}_e, \quad (29)$$

$$\frac{\partial \Pi_{me}}{\partial \mathbf{d}_e^T} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{K}_e \mathbf{d}_e = \mathbf{p}_e, \quad (30)$$

其中,式(29)保证了单元间场变量的连续性,而式(30)为单元刚度方程, $\mathbf{K}_e = \mathbf{G}_e^T \mathbf{H}_e^{-1} \mathbf{G}_e$ 为对称正定的单元刚度矩阵, $\mathbf{p}_e$ 为等效节点载荷列阵.

### 2.3 刚体运动项的恢复和全解的构造

与常规有限元法一样,将单元刚度矩阵  $\mathbf{K}_e$  和等效节点载荷列阵  $\mathbf{p}_e$  按照对应的自由度叠加,形成总体刚度方程  $\mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{f}$ ,然后引入边界条件(7)即可获得所有节点的齐次解  $\tilde{u}_{ch}(\boldsymbol{\rho})$ .由于构造 Trefftz 函数矩阵  $N_e(\boldsymbol{\rho})$  时舍弃了刚体运动模式,若要计算单元域内任一点的齐次解  $u_{ch}(\boldsymbol{\rho})$ ,需采用最小二乘法恢复刚体运动项  $u_0(\boldsymbol{\rho})$ <sup>[3-4, 10]</sup>.为此,式(18)需修改为

$$u_{ch}(\boldsymbol{\rho}) = u_0(\boldsymbol{\rho}) + N_e(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{c}_e(\boldsymbol{\rho}), \quad (31)$$

式中

$$u_0 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [\tilde{u}_e(\boldsymbol{\rho}_i) - N_e(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{c}_e(\boldsymbol{\rho})],$$

这里  $N$  为单元的节点数.

一旦获得齐次解  $u_{ch}(\boldsymbol{\rho})$ ,  $\tilde{u}_{ch}(\boldsymbol{\rho})$ ,即可结合式(4)和(14)最终获得单元域内及边界上任一点的全解  $u_e(\boldsymbol{\rho})$ ,  $\tilde{u}_e(\boldsymbol{\rho})$ .

## 3 数值算例

为了验证本文方法的有效性,本文分析两个轴对称 Poisson 问题:实体圆柱和空心圆柱.采用 4 节点轴对称单元对求解域进行网格剖分,Trefftz 函数截取前 5 项<sup>[10]</sup>.为获得 Poisson 方程的特解,选取求解域内所有单元的节点和形心作为基本插值点,而在求解域之外构造一个虚拟边界,在其上布置一定数目的虚拟点作为额外插值点.在所有算例中,分别选择开口矩形或半圆形作为虚拟边界形状,此边界上布置 22 个虚拟点,其位置由下式确定:

$$\boldsymbol{\rho}_v = \boldsymbol{\rho}_c + \beta(\boldsymbol{\rho}_{bmax} - \boldsymbol{\rho}_c), \quad (32)$$

式中, $\boldsymbol{\rho}_v$ ,  $\boldsymbol{\rho}_c$ ,  $\boldsymbol{\rho}_{bmax}$  分别为虚拟点、参考点、实际边界上距参考点最远的点, $\beta$  为虚拟边界位置参数.

### 3.1 算例 1 实体圆柱

考虑半径为  $R = 1$ 、高度为  $H = 1$  的实体圆柱,如图 2(a)所示.此 Poisson 问题的右端项为  $f(\boldsymbol{\rho}) = (4 - r^2) \sin z$ ,按照精确解<sup>[11]</sup>  $u_{ex} = r^2 \sin z$  在求解域边界施加 Dirichlet 边界条件,共划分 16 个单元和 25 个节点.本算例中, $\boldsymbol{\rho}_c = \{0.0, 0.5\}^T$ ,  $\boldsymbol{\rho}_{bmax} = \{1.0, 1.0\}^T$  和  $\{1.0, 0.0\}^T$ .需要注意的是,插值点应避免布置在对称轴上,这主要是为保证  $\partial \Phi_k(\boldsymbol{\rho}) / \partial r$  的连续性.由图 2 可以看到,有 5 个节点和 2 个虚拟点几乎位于对称轴上.实际上,当选取这些点作为插值点进行特解计算时,其径向坐标已更改为  $r = 10^{-4}$  (即稍微偏离对称轴).表 1 列出了求解域若干点场函数  $u$  的计算结果.为清晰起见,图 3 给出了参数  $\beta$  对全解  $u$  计算精度的影响规律(以相对误差  $\varepsilon$  衡量,参考值为精确解).由图中可以看出,当  $\beta = 3$  时,无论虚拟边界形状是开口矩形还是半圆形,本文方法均与精确解十分吻合.同时也可以看出,当不设置求解域外插值点(即  $\beta = 0$ )时,所得结果偏离精确解较大.

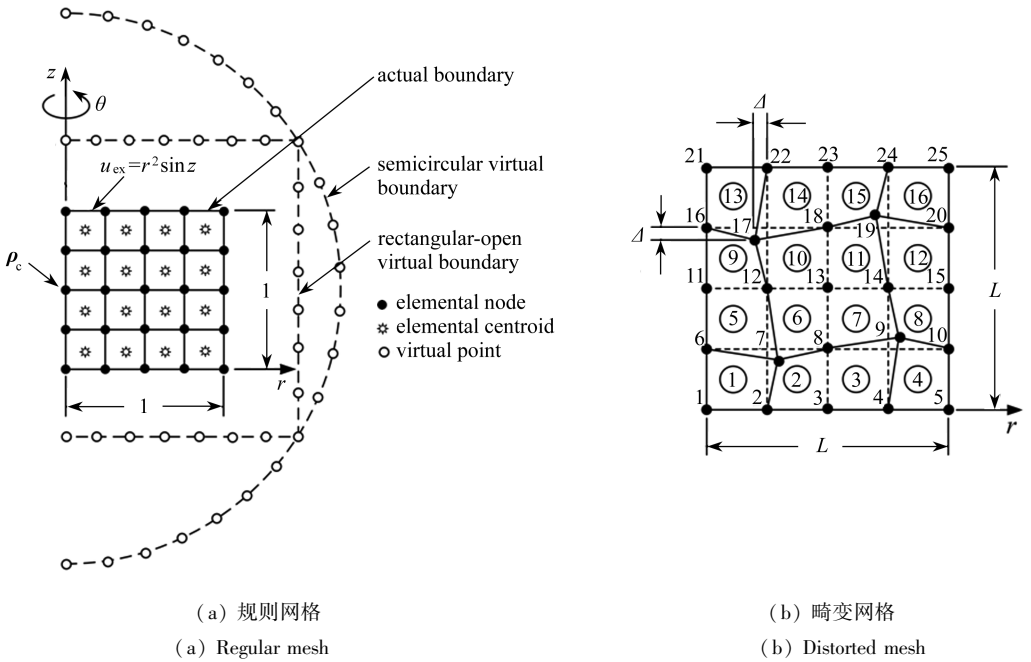


图 2 实体圆柱网格剖分及虚拟点

Fig. 2 Mesh and virtual points for the solid cylinder

表 1 若干点处全解  $u$  的计算结果

Table 1 Results for complete solution  $u$  at several points

point coordinates ( $r, z$ )	TFEM results						analytical results
	$\beta = 0$ <sup>①</sup>	$\beta = 2$	$\beta = 2.5$	$\beta = 3$	$\beta = 3.5$	$\beta = 4$	
(0.25, 0.25)	0.016 23	0.014 77	0.015 03	0.015 46	0.016 10	0.016 91	0.015 46
		0.014 81	0.015 03	0.015 39	0.015 83	0.016 23	
(0.50, 0.25)	0.061 06	0.061 25	0.061 27	0.061 19	0.060 99	0.060 66	0.061 85
		0.061 48	0.061 47	0.061 38	0.061 22	0.061 06	
(0.75, 0.25)	0.138 69	0.138 75	0.138 75	0.138 74	0.138 63	0.138 46	0.139 16
		0.138 89	0.138 90	0.138 85	0.138 77	0.138 69	
(0.50, 0.50)	0.118 97	0.119 01	0.119 05	0.118 99	0.118 81	0.118 49	0.119 86
		0.119 29	0.119 32	0.119 26	0.119 12	0.118 97	
(0.25, 0.75)	0.043 46	0.041 40	0.041 75	0.042 31	0.043 11	0.044 11	0.042 60
		0.041 45	0.041 82	0.042 33	0.042 92	0.043 46	
(0.50, 0.75)	0.169 60	0.169 73	0.169 74	0.169 65	0.169 45	0.169 12	0.170 41
		0.169 97	0.170 00	0.169 92	0.169 77	0.169 60	
(0.75, 0.75)	0.382 90	0.382 87	0.382 90	0.382 88	0.382 79	0.382 63	0.383 42
		0.382 96	0.383 00	0.382 99	0.382 95	0.382 90	

① 对应每一  $\beta$  ( $\beta = 0$  除外), 第 1, 2 行数据分别基于开口矩形和半圆形虚拟边界计算而来。

① Data corresponding to each  $\beta$  value, except for  $\beta = 0$ , in the first line are obtained based on the rectangular-open virtual boundary and those in the second line based on the semicircular one.

下面分析一下本文方法对网格畸变的敏感性。图 2(b) 给出了一个不规则网格划分方案, 设  $\psi = \Delta/L$  表示网格畸变参数, 这里  $L = 1$ 。由图 2(b) 可以看出, 当  $\psi \geq 0.125$  时, 单元②, ⑧, ⑨和⑮将退化为 4 节点三角形或凹四边形单元。根据常规有限元理论, 涉及区域积分的等参单元

是无法处理这种情况的,其原因是当单元内角等于或大于  $180^\circ$  时,用于计算单元刚度矩阵的 Jacobi(雅可比)行列式变为负值.然而,本文方法则不受上述限制,这主要归功于 Trefftz 有限元列式只含边界积分.表 2 列出了不同畸变网格下求解域中心处全解  $u$  的相对误差变化情况.与前述分析虚拟边界位置参数  $\beta$  时有所不同,这里相对误差的计算是以规则网格计算结果为参考值的.由表中结果可以看出,尽管随着网格畸变参数的增大,求解域中心处  $u$  的相对误差也随之增加,但直到  $\psi = 0.15$ , 其最大相对误差才达 2.235%,仍在工程实际容许范围 5%之内.可见,在畸变网格下,本文方法仍具有较高精度,且计算性能稳定.

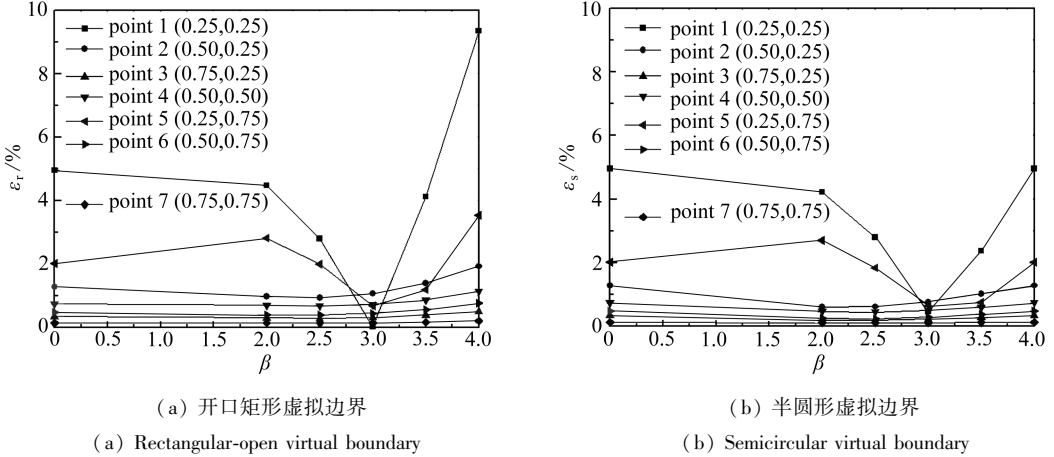


图 3 相对误差随虚拟边界位置参数  $\beta$  的变化

Fig. 3 Variation of relative error with virtual boundary location parameter  $\beta$

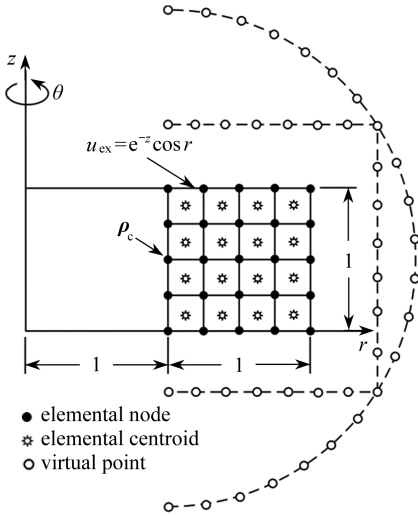


图 4 空心圆柱网格划分及虚拟点

Fig. 4 Mesh and virtual points for the hollow cylinder

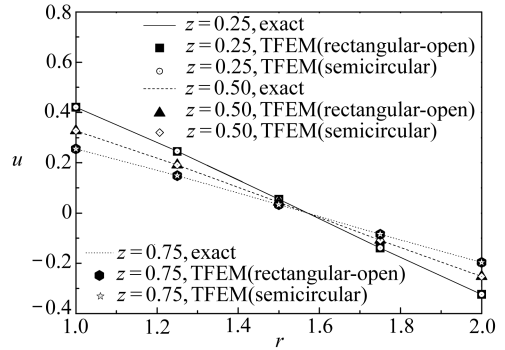


图 5 全解  $u$  沿径向的变化

Fig. 5 Variation of full solution  $u$  along the radial direction

表 2 不同网格畸变参数下求解域中心处全解  $u$  的相对误差

Table 2 Relative error of  $u$  at the center of solution domain for different mesh distortion parameters

type of virtual boundary $\psi$	0.05	0.1	0.125	0.15	0.2
rectangular-open $\epsilon_r / \%$	0.101	0.807	1.412	2.235	5.034
semicircular $\epsilon_s / \%$	0.017	0.394	0.738	1.199	2.734



### 3.2 算例 2 空心圆柱

第 2 个算例是内、外半径分别为  $R_i = 1$  和  $R_o = 2$ , 高度为  $H = 1$  的空心圆柱, 如图 4 所示. 此 Poisson 问题的右端项为  $f(\boldsymbol{\rho}) = -\sin r / (re^z)$ , 按照精确解<sup>[12]</sup>  $u_{ex} = e^{-z} \cos r$  在求解域边界施加 Dirichlet 边界条件. 在计算中, 采用的单元类型、网格剖分、虚拟边界形状、虚拟点分布均与算例 1 相同. 但这里,  $\boldsymbol{\rho}_c = \{1.0, 0.5\}^T$ ,  $\boldsymbol{\rho}_{bmax} = \{2.0, 1.0\}^T$  和  $\{2.0, 0.0\}^T$ . 图 5 给出了  $\beta = 3$  时全解  $u$  沿径向的变化, 与精确解十分一致.

## 4 结 论

针对轴对称 Poisson 方程, 利用径向基函数近似处理特解并获得其封闭形式, 然后将此特解代入 Trefftz 有限元列式得到齐次解, 最后利用线性叠加原理获得问题的全解, 操作过程简单直观, 且易于程序实现. 当求解域为实心回转体时, 应避免将插值点布置在对称轴上, 这主要是为保证  $\partial\Phi_k(\boldsymbol{\rho})/\partial r$  的连续性. 计算结果表明, 当虚拟边界位置参数  $\beta = 3$  时, 能够获得令人满意的精度, 且表现出对网格畸变不敏感性. 同时, 需要指出的是, 本文方法适用于右端项为常数或仅是位置坐标的函数的情形, 但可通过引入适当的迭代算法将其推广到求解右端项依赖于场变量的轴对称 Poisson 方程.

### 参考文献 (References):

- [1] Jirousek J, Leon N. A powerful finite element for plate bending[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1977, **12**(1): 77-96.
- [2] Qin Q H. *The Trefftz Finite and Boundary Element Method*[M]. Southampton: WIT Press, 2000.
- [3] Qin Q H, Wang H. *MATLAB and C Programming for Trefftz Finite Element Methods*[M]. Boca Raton: CRC Press, 2008: 113-125.
- [4] Wang H, Qin Q H, Arounsavat D. Application of hybrid Trefftz finite element method to nonlinear problems of minimal surface[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2007, **69**(6): 1262-1277.
- [5] Cao L L, Wang H, Qin Q H. Fundamental solution based graded element model for steady-state heat transfer in FGM[J]. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2012, **25**(4): 377-392.
- [6] Fu Z J, Qin Q H, Chen W. Hybrid-Trefftz finite element method for heat conduction in nonlinear functionally graded materials[J]. *Engineering Computations: International Journal for Computer-Aided Engineering and Software*, 2011, **28**(5): 578-599.
- [7] Wang K Y, Li P C, Wang D Z. Trefftz-type FEM for solving orthotropic potential problems[J]. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 2014, **11**(14): 2537-2554.
- [8] Wang K Y, Zhang L Q, Li P C. A four-node hybrid-Trefftz annular element for analysis of axisymmetric potential problems[J]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2012, **60**: 49-56.
- [9] 王克用, 黄争鸣, 李培超, 刘博. 轴对称正交各向异性位势问题的 Trefftz 有限元分析[J]. *应用数学和力学*, 2013, **34**(5): 462-469. (WANG Ke-yong, HUANG Zheng-ming, LI Pei-chao, LIU Bo. Trefftz finite element analysis of axisymmetric potential problems in orthotropic media [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2013, **34**(5): 462-469. (in Chinese))
- [10] Wang K, Mattheij R M M, ter Morsche H G. Alternative DRM formulations[J]. *Engineering Analysis With Boundary Elements*, 2003, **27**(2): 175-181.
- [11] Tsai C C, Chen C S, Hsu T W. The method of particular solutions for solving axisymmetric



- polyharmonic and poly-Helmholtz equations [J]. *Engineering Analysis With Boundary Elements*, 2009, **33**(12): 1396-1402.
- [12] Chen C S, Muleshkov A S, Golberg M A, Mattheij R M M. A mesh-free approach to solving the axisymmetric Poisson's equation [J]. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 2005, **21**(2): 349-367.

## A Trefftz Finite Element Method for Solving Axisymmetric Poisson's Equations

LIU Bo<sup>1</sup>, WANG Ke-yong<sup>1,2</sup>, WANG Ming-hong<sup>1</sup>

(1. *School of Mechanical Engineering, Shanghai University of Engineering Science, Shanghai 201620, P.R.China;*

2. *Department of Mechanical Engineering, University of California, Riverside, CA 92507, USA*)

**Abstract:** A Trefftz finite element formulation was proposed for solving a kind of axisymmetric Poisson's equations by means of the radial basis functions (RBFs). The non-zero right-hand side term brought the particular solution into the Trefftz intra-element field, which gave rise to domain integration related to the resultant element stiffness equation. The involved domain integration was eliminated through approximation of the particular solution with the RBFs. Furthermore, the 'boundary integration only' advantages were preserved for the Trefftz finite element method (TFEM). To obtain the particular solution, all elemental nodes and centroids in the whole solution domain were chosen as the fundamental interpolation points. In the meantime, a virtual boundary was constructed outside the solution domain, and a number of virtual points were selected as the additional interpolation points on the virtual boundary. Numerical examples demonstrate that the proposed method is valid and applicable.

**Key words:** axisymmetric Poisson's equation; Trefftz finite element method; radial basis function; complete elliptic integral