

# 转动与摆动复合运动下脂润滑 关节轴承的数值分析\*

汤占岐<sup>1,2</sup>, 刘焜<sup>1</sup>, 王伟<sup>1</sup>, 刘小君<sup>1</sup>

(1. 合肥工业大学 摩擦学研究所, 合肥 230009;  
2. 北方民族大学 化工学院, 银川 750021)

**摘要:** 建立了球面轴承的三维润滑模型,该模型将内圈的转动运动、轴颈倾斜引起的内圈倾斜和内圈的摆动运动等因素纳入考虑,推导出球坐标下适用于非 Newton (牛顿) 流体润滑的 Reynolds (雷诺) 方程.应用该模型,并考虑使用润滑脂的 Ostwald 流变模型,对向心关节轴承的润滑问题进行了数值计算,研究了在不同的幂律指数、内圈倾斜角度和摆动角速度下,脂润滑膜的压力分布、最大压力、承载力和流量.结果表明:在合适的操作条件下,脂润滑能产生明显的流体动压效应;在其它参数不变时,幂律指数对脂润滑膜的最大压力和承载能力影响显著,相对于 Newton 流体,剪切稠化流体可提高润滑膜的最大压力和承载能力,并增加周向流量,而剪切稀化流体的影响效果则相反;内圈倾斜角度对脂润滑膜最大压力和承载能力的影响较小,内圈摆动角速度的影响则较为明显.

**关键词:** 球面轴承; 关节轴承; 非 Newton 流体润滑; 复合运动; Reynolds 方程

**中图分类号:** TH133.3      **文献标志码:** A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2015.02.010

## 引 言

经典的流体动压润滑理论中,假设润滑剂为 Newton 流体,剪应力与剪应变率表现为线性关系.然而在有些使用场合中,润滑剂为非 Newton 流体,其粘度随剪应变率或剪应力变化,剪应力与剪应变率表现为非线性关系.这些使用场合包括:润滑剂为润滑脂、合成油或润滑油中添加高分子聚合物.

润滑脂是在基础油中加入稠化剂所制成的两相润滑剂,是常见的润滑材料之一,描述润滑脂流变特性的本构方程主要有 Ostwald(幂律)模型、Bingham 模型和 Herschel-Bulkley 模型.为求解不同运行条件下润滑脂的润滑问题,研究者通常会采用不同的流变模型,得到不同形式的 Reynolds 方程.Dowson<sup>[1]</sup>利用润滑理论中的薄膜假设,推导出用于 Newton 流体的普遍 Reynolds 方程,这个方程考虑了粘度、密度沿膜厚方向变化的情况,因此也适用于一些简单的非 Newton 流体,如具有剪切稀化性质但无记忆效应的流体.Buckholz<sup>[2]</sup>基于幂律模型,得到一个修正的

\* 收稿日期: 2014-04-18; 修订日期: 2014-10-31

基金项目: 国家自然科学基金(51375132);教育部高等学校博士点基金(20120111110026)

作者简介: 汤占岐(1973—),男,陕西咸阳人,副教授,博士生(通讯作者. E-mail: tangzhanqi@163.com);

刘焜(1963—),男,陕西汉中,教授,博士生导师(E-mail: liukun@hfut.edu.cn).

Reynolds 方程,并计算了短径向滑动轴承的润滑性能,结果表明相对于 Newton 流体,当幂律指数小于 1 时,幂律流体润滑剂可降低轴承的承载能力,润滑膜的空化边界形状由 Reynolds 自由表面形状决定,且与轴承偏心率无关.Dien 等<sup>[3]</sup>对非 Newton 流体的速度场和压力场做正则摄动展开,得到的 Reynolds 方程适用于幂律流体,并求解轴承长径比和幂律指数对轴承偏位角和 Sommerfeld 数的影响.Buckholz<sup>[4]</sup>,Johnson 等<sup>[5]</sup>基于幂律流体模型,忽略润滑剂热效应,研究了稳态条件下的有限宽滑块轴承的润滑问题.Lin 等<sup>[6]</sup>使用幂律流体模型,计入润滑膜的时变效应,推导出适用于滑块轴承的 Reynolds 方程,得到动压润滑膜的压力及承载力,计算了不同幂律指数润滑剂的润滑膜厚度、承载力和挤压速度随时间的变化.结果表明,在其它条件不变时,增大润滑剂幂律指数,可提高润滑膜厚度和承载力.阿伯德-尔-马力克等<sup>[7]</sup>用群方法研究了幂律流体模型的 Rayleigh 问题.Tichy<sup>[8]</sup>采用 Bingham 流体模型,对一维径向滑动轴承进行了分析,因为润滑脂存在屈服切应力,在剪应力小于屈服切应力的区域,将出现无剪切流动层,润滑脂会形成“栓塞”(core),作者分别对不形成栓塞、形成流动的栓塞、栓塞粘附在轴颈表面和粘附在轴瓦表面等 4 种情况进行了分析,得到相应的 Reynolds 方程,并计算了轴承性能.Jang 等<sup>[9]</sup>基于 Bingham 模型,推导出二维 Reynolds 方程,同时,应用热弹流理论,将润滑剂的热效应纳入分析,计算了滑动轴承中润滑脂的润滑效果和流动特性.Yoo 等<sup>[10]</sup>采用 Herschel-Bulkley 流变模型,研究了无限长圆柱体作纯滚动时的热弹流润滑问题.Zhang 等<sup>[11]</sup>采用 Herschel-Bulkley 流变模型,研究两个纯滚动刚性椭球体之间的润滑问题,推导出二维 Reynolds 方程,以此计算椭球体几何参数和润滑脂流变特性对脂润滑膜内压力分布和速度分布的影响.

关节轴承是一种球面滑动轴承,主要由一个外球面内圈和一个内球面外圈组成,在工程机械、航空航天、军事装备<sup>[12-14]</sup>等领域有广泛的应用.关节轴承主要的失效形式是磨损,其润滑方式有自润滑型和非自润滑型两种,目前对于自润滑型关节轴承的研究较多,大多集中于试验研究<sup>[15-16]</sup>,而对润滑型关节轴承的理论研究和试验研究均很少.为研究具有球面几何特征的关节轴承润滑问题,需使用球面坐标系下的 Reynolds 方程,Meyer 等<sup>[17-18]</sup>推导出球面坐标下 Newton 流体润滑的 Reynolds 方程,并用该方程解决人工植入髋关节在准静态条件下的润滑问题,但此方程仅能应用于 Newton 流体润滑,且运动形式简单.在工程应用上,润滑型关节轴承大多使用二硫化钼锂基润滑脂润滑,润滑剂为非 Newton 流体,并且在某些使用条件下,轴承具有复杂的运动形式<sup>[19]</sup>.如图 1 所示, $Oxyz$  为固定坐标系,当内圈只做旋转运动时,其转动轴  $z'$  与坐标轴  $z$  重合,而由于轴颈倾斜或内圈绕  $x$  轴作往复摆动时, $z'$  轴偏转角度为  $\alpha$ ,导致内圈相对平衡位置偏斜  $\alpha$  角度.这种复合运动使得润滑分析变得更加复杂,迄今尚无研究报道.本文采用润滑脂的幂律流变模型,并以瞬时角速度的形式描述内圈的旋转运动和摆动运动,推导出了普遍 Reynolds 方程,并进行数值计算,得到了轴承间隙内的脂润滑膜压力分布、最大压力、承载力和流量等性能参数,探讨不同参数对关节轴承润滑性能的影响.

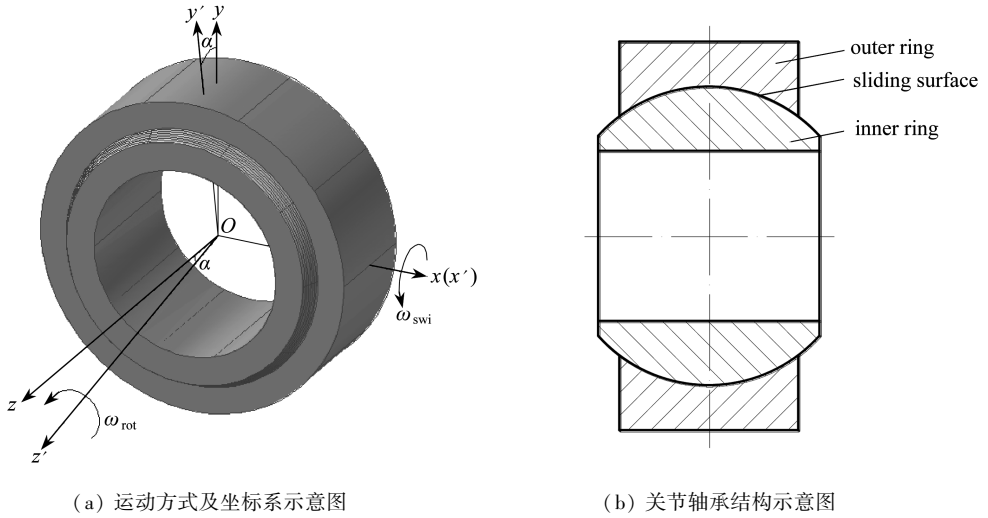
## 1 数学模型

### 1.1 几何模型

考虑如图 1 所示的关节轴承,球半径为  $R$ ,外圈为静止部件,坐标系  $Oxyz$  固结在外圈上.另建立坐标系  $Ox'y'z'$  用于描述内圈倾斜或摆动时其旋转轴的位置,旋转轴  $z'$  在  $Oyz$  平面内摆动角度为  $\alpha$ .设内圈旋转的瞬时角速度大小为  $\omega_{rot}$ ,摆动的瞬时角速度大小为  $\omega_{swi}$ ,以上角速度均以逆时针方向为正.

作如下基本假设:忽略润滑剂的体积力和惯性力作用;脂润滑膜在固体界面上无滑动;脂润滑膜厚度  $h$  非常小,在沿膜厚方向上不计压力的变化;润滑剂为等温流体; $r = R + \zeta$ ,  $r \approx R$ ,

$\partial/\partial r = \partial/\partial \zeta$ , 其中,  $r$  为润滑膜中任一点到球心的距离,  $\zeta$  为内圈球表面到此点的距离, 如图 2 所示。



(a) 运动方式及坐标系示意图 (b) 关节轴承结构示意图  
 (a) Schematic of the motion mode and the coordinate system (b) Schematic of the bearing structure

图 1 关节轴承的几何模型

Fig. 1 Geometry of the joint bearing

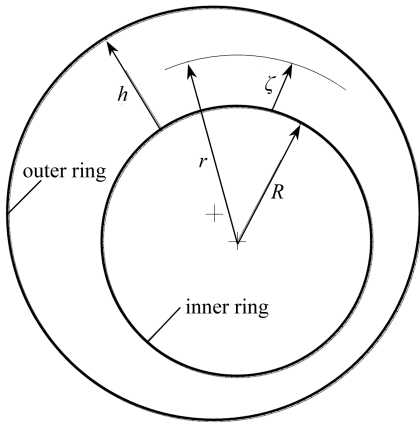


图 2  $r$  与  $R$  及  $\zeta$  的关系

Fig. 2 Local radius  $r$  as a function of  $R$  and  $\zeta$

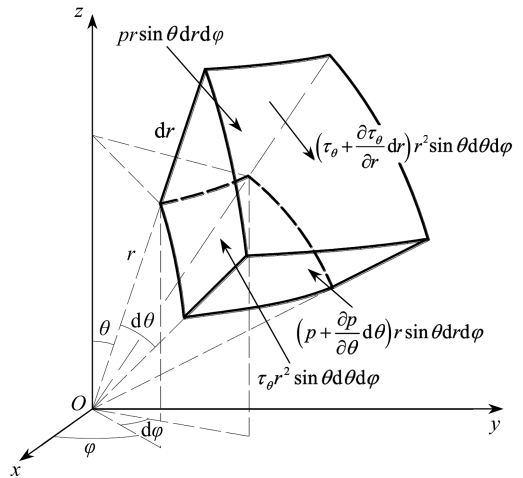


图 3 微元体的受力

Fig. 3 The force model of a micro-unit of the grease film

### 1.2 Reynolds 方程的推导

建立如图 3 所示球坐标系.在推导过程中,如不作特别说明,直角坐标系  $Oxyz$  的坐标轴  $x$ ,  $y$  和  $z$  的单位矢量分别用  $i, j, k$  表示,球坐标系的 3 个正交坐标轴  $r, \theta$  和  $\varphi$  的单位矢量分别为  $e_r, e_\theta$  和  $e_\varphi$ .

在润滑膜中截取一微元体,其受力如图 3 所示(只标出  $\theta$  方向的受力,以下只列出  $\theta$  方向的推导过程)。

由微元体的受力平衡可得

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = r \frac{\partial \tau_\theta}{\partial r}, \tag{1}$$

式中,  $p$  为脂润滑膜压力,  $\tau_\theta$  为  $\theta$  方向的剪应力分量。

Newton 流体与非 Newton 流体的差别在于其本构方程的不同, 通过适当的变换, 可以把非 Newton 流体与 Newton 流体的 Reynolds 方程在形式上统一。在  $\theta$  方向上定义当量粘度  $\eta_\theta$ <sup>[20]</sup>, 将  $\theta$  方向上的剪应力分量  $\tau_\theta$  表示为当量粘度与速度梯度的乘积, 即

$$\tau_\theta = \eta_\theta \frac{\partial u_\theta}{\partial r}, \quad (2)$$

式中,  $u_\theta$  为润滑膜中一点在  $\theta$  方向上的速度分量。当润滑剂为 Newton 流体时,  $\eta_\theta = \eta$ , 为流体的动力粘度。这种表达形式与 Newton 流体相同, 因此, 当量粘度也称为表观粘度。利用 1.1 小节中的基本假设, 将式(2)写成

$$\tau_\theta = \eta_\theta \frac{\partial u_\theta}{\partial \zeta}, \quad (3)$$

将式(3)代入式(1)并利用 1.1 小节中的基本假设, 得

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = R \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \eta_\theta \frac{\partial u_\theta}{\partial \zeta} \right). \quad (4)$$

由于内圈倾斜或绕  $x$  轴的往复摆动, 使  $z'$  轴逆时针转过  $\alpha$  角度, 利用  $Ox'y'z'$  坐标系与  $Oxyz$  坐标系的坐标转换关系, 将内圈绕  $z'$  轴转动的角速度矢量  $\boldsymbol{\omega}_{\text{rot}}$  表示为  $Oxyz$  坐标系下的形式:

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{rot}} = -\omega_{\text{rot}} \sin \alpha \boldsymbol{j} + \omega_{\text{rot}} \cos \alpha \boldsymbol{k}. \quad (5)$$

利用式(5)写出因内圈绕  $z'$  轴转动引起的内圈球表面上 ( $\zeta = 0$ ) 一点  $P$  的速度矢量  $\boldsymbol{U}_{Pr}$ , 再利用  $Oxyz$  坐标系与球坐标系的转换关系, 得到其在球坐标系下的形式:

$$\boldsymbol{U}_{Pr} = -R\omega_{\text{rot}} \cos \varphi \sin \alpha \boldsymbol{e}_\theta + R\omega_{\text{rot}} (\sin \theta \cos \alpha + \cos \theta \sin \varphi \sin \alpha) \boldsymbol{e}_\varphi. \quad (6)$$

内圈绕  $x$  轴摆动的瞬时角速度矢量为  $\boldsymbol{\omega}_{\text{swi}}$ , 按照同样的方法, 得到由内圈摆动引起的  $P$  点的速度矢量  $\boldsymbol{U}_{Ps}$  在球坐标系下的形式:

$$\boldsymbol{U}_{Ps} = -R\omega_{\text{swi}} \sin \varphi \boldsymbol{e}_\theta - R\omega_{\text{swi}} \cos \theta \cos \varphi \boldsymbol{e}_\varphi. \quad (7)$$

$P$  点的速度矢量  $\boldsymbol{U}_P$  为矢量  $\boldsymbol{U}_{Pr}$  与  $\boldsymbol{U}_{Ps}$  的和, 即

$$\boldsymbol{U}_P = -R(\omega_{\text{rot}} \cos \varphi \sin \alpha + \omega_{\text{swi}} \sin \varphi) \boldsymbol{e}_\theta + R[\omega_{\text{rot}} (\sin \theta \cos \alpha + \cos \theta \sin \varphi \sin \alpha) - \omega_{\text{swi}} \cos \theta \cos \varphi] \boldsymbol{e}_\varphi. \quad (8)$$

因为外圈静止, 根据式(8)写出速度边界条件:

$$\begin{cases} \zeta = 0: u_r = 0, u_\theta = -R(\omega_{\text{rot}} \cos \varphi \sin \alpha + \omega_{\text{swi}} \sin \varphi), \\ u_\varphi = R[\omega_{\text{rot}} (\sin \theta \cos \alpha + \cos \theta \sin \varphi \sin \alpha) - \omega_{\text{swi}} \cos \theta \cos \varphi], \\ \zeta = h: u_r = 0, u_\theta = 0, u_\varphi = 0, \end{cases} \quad (9)$$

式中,  $u_r, u_\theta$  和  $u_\varphi$  分别为球坐标系中  $r, \theta$  和  $\varphi$  方向的速度分量。

将式(4)在  $\zeta$  方向上积分两次, 并应用式(9)的边界条件得  $u_\theta$  的表达式:

$$u_\theta = \frac{1}{R} \frac{\partial p}{\partial \theta} \int_0^\zeta \frac{1}{\eta_\theta} \zeta d\zeta + \frac{R(\omega_{\text{rot}} \cos \varphi \sin \alpha + \omega_{\text{swi}} \sin \varphi) - \frac{1}{R} \frac{\partial p}{\partial \theta} \int_0^h \frac{1}{\eta_\theta} \zeta d\zeta}{\int_0^h \frac{1}{\eta_\theta} d\zeta} \int_0^\zeta \frac{1}{\eta_\theta} d\zeta - R(\omega_{\text{rot}} \cos \varphi \sin \alpha + \omega_{\text{swi}} \sin \varphi), \quad (10)$$

$u_\theta$  在  $\zeta$  方向的梯度为

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial \zeta} = \frac{1}{R} \frac{1}{\eta_\theta} \frac{\partial p}{\partial \theta} \left( \zeta - \frac{\int_0^h \frac{1}{\eta_\theta} \zeta d\zeta}{\int_0^h \frac{1}{\eta_\theta} d\zeta} \right) + R(\omega_{\text{rot}} \cos \varphi \sin \alpha + \omega_{\text{swi}} \sin \varphi) \frac{1}{\eta_\theta} \frac{1}{\int_0^h \frac{1}{\eta_\theta} d\zeta}. \quad (11)$$

同样可得到  $u_\varphi$  的表达式及其在  $\zeta$  方向的梯度:

$$u_\varphi = \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \int_0^\zeta \frac{1}{\eta_\varphi} \zeta d\zeta + R[\omega_{\text{rot}}(\sin \theta \cos \alpha + \cos \theta \sin \varphi \sin \alpha) - \omega_{\text{swi}} \cos \theta \cos \varphi] -$$

$$\frac{R[\omega_{\text{rot}}(\sin \theta \cos \alpha + \cos \theta \sin \varphi \sin \alpha) - \omega_{\text{swi}} \cos \theta \cos \varphi] + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \int_0^h \frac{1}{\eta_\varphi} \zeta d\zeta}{\int_0^h \frac{1}{\eta_\varphi} d\zeta} \times$$

$$\int_0^\zeta \frac{1}{\eta_\varphi} d\zeta, \quad (12)$$

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial \zeta} = \frac{1}{R \sin \theta} \frac{1}{\eta_\varphi} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \left( \zeta - \frac{\int_0^h \frac{1}{\eta_\varphi} \zeta d\zeta}{\int_0^h \frac{1}{\eta_\varphi} d\zeta} \right) -$$

$$R[\omega_{\text{rot}}(\sin \theta \cos \alpha + \cos \theta \sin \varphi \sin \alpha) - \omega_{\text{swi}} \cos \theta \cos \varphi] \frac{1}{\eta_\varphi} \frac{1}{\int_0^h \frac{1}{\eta_\varphi} d\zeta}. \quad (13)$$

利用 1.1 小节中的基本假设将球坐标系下的连续性方程<sup>[21]</sup>改写为如下形式:

$$\frac{\partial u_r}{\partial \zeta} + \frac{\cos \theta}{R \sin \theta} u_\theta + \frac{1}{R} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} = 0. \quad (14)$$

将式(14)在  $\zeta$  上积分,并利用边界条件式(9)、速度表达式(10)和(12)得

$$\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left( F_{3\theta} \sin \theta \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( F_{3\varphi} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right) =$$

$$R^2 \left[ -(\omega_{\text{rot}} \sin \theta \cos \varphi \sin \alpha + \omega_{\text{swi}} \sin \theta \sin \varphi) \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{F_{2\theta}}{F_{1\theta}} \right) + \right.$$

$$\left. \omega_{\text{rot}} \sin^2 \theta \cos \alpha \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{F_{2\varphi}}{F_{1\varphi}} \right) + \omega_{\text{rot}} \sin \theta \cos \theta \sin \alpha \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \sin \varphi \frac{F_{2\varphi}}{F_{1\varphi}} \right) - \right.$$

$$\left. \omega_{\text{swi}} \sin \theta \cos \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \cos \varphi \frac{F_{2\varphi}}{F_{1\varphi}} \right) \right], \quad (15)$$

式中

$$F_{1\theta} = \int_0^h \frac{1}{\eta_\theta} d\zeta, \quad F_{2\theta} = \int_0^h \frac{1}{\eta_\theta} \zeta d\zeta, \quad F_{3\theta} = \int_0^h \frac{1}{\eta_\theta} \zeta \left( \zeta - \frac{F_{2\theta}}{F_{1\theta}} \right) d\zeta,$$

$$F_{1\varphi} = \int_0^h \frac{1}{\eta_\varphi} d\zeta, \quad F_{2\varphi} = \int_0^h \frac{1}{\eta_\varphi} \zeta d\zeta, \quad F_{3\varphi} = \int_0^h \frac{1}{\eta_\varphi} \zeta \left( \zeta - \frac{F_{2\varphi}}{F_{1\varphi}} \right) d\zeta.$$

式(15)即为普遍形式的 Reynolds 方程,适用于润滑剂为 Newton 流体或非 Newton 流体的球面轴承润滑计算,既考虑了内圈的转动运动,也考虑了因轴颈倾斜引起的内圈倾斜,或内圈作转动和往复摆动复合运动的情况。

### 1.3 膜厚方程

轴承工作时,由于载荷与润滑膜压力的共同作用,内圈球心与外圈球心产生偏心量  $e$ ,其在  $Oxyz$  坐标系下的分量分别为  $e_x, e_y, e_z$ ,文献[22]提出了如下式所示的膜厚方程:

$$h = c - e_x \sin \theta \cos \varphi - e_y \sin \theta \sin \varphi - e_z \cos \theta, \quad (16)$$

式中,  $c$  为轴承半径间隙。

## 2 计算方法

### 2.1 量纲一 Reynolds 方程

若关节轴承使用润滑脂作为润滑剂,采用幂律流体模型,则其本构方程为

$$\tau_{\theta} = m \left| \frac{\partial u_{\theta}}{\partial \zeta} \right|^{n-1} \frac{\partial u_{\theta}}{\partial \zeta}, \quad (17)$$

式中,  $n$  为幂律指数,  $m$  为粘性函数, 是一个表达粘性的量, 类似于 Newton 流体的  $\eta$ , 但两者的量纲在  $n \neq 1$  时是不同的. 若不考虑润滑剂的粘温效应, 则  $m = m_0$ ,  $m_0$  为其环境粘度.

为使幂律流体和 Newton 流体两个数学模型在量纲一化后保持形式上的一致, 文献[20]介绍了当量环境粘度的概念, 本文中, 引入参考角速度, 将当量环境粘度改写成如下形式:

$$\eta_0 = m_0 \left( \frac{R\omega_{\text{ref}}}{c} \right)^{n-1}, \quad (18)$$

式中,  $\eta_0$  为润滑剂的当量环境粘度,  $\omega_{\text{ref}}$  为参考角速度, 其值不为 0.

引入下列量纲一参数

$$\begin{cases} \bar{\eta}_{\theta} = \frac{\eta_{\theta}}{\eta_0}, \bar{\eta}_{\varphi} = \frac{\eta_{\varphi}}{\eta_0}, \bar{h} = \frac{h}{c}, \bar{\zeta} = \frac{\zeta}{h}, \bar{m} = \frac{m}{m_0}, \bar{\tau}_{\theta} = \frac{\bar{h}c}{R\omega_{\text{ref}}\eta_0} \tau_{\theta}, \\ \bar{\tau}_{\varphi} = \frac{\bar{h}c}{R\omega_{\text{ref}}\eta_0} \tau_{\varphi}, \bar{p} = \frac{c^2}{R^2\omega_{\text{ref}}\eta_0} p, \Omega_1 = \frac{\omega_{\text{rot}}}{\omega_{\text{ref}}}, \Omega_2 = \frac{\omega_{\text{swi}}}{\omega_{\text{ref}}}. \end{cases} \quad (19)$$

使用以上参数将方程(15)写成量纲一形式:

$$\begin{aligned} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \bar{h}^3 \bar{F}_{3\theta} \sin \theta \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \bar{h}^3 \bar{F}_{3\varphi} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \varphi} \right) = \\ - (\Omega_1 \sin \theta \cos \varphi \sin \alpha + \Omega_2 \sin \theta \sin \varphi) \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \bar{h} \sin \theta \frac{\bar{F}_{2\theta}}{\bar{F}_{1\theta}} \right) + \\ \Omega_1 \sin^2 \theta \cos \alpha \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \bar{h} \frac{\bar{F}_{2\varphi}}{\bar{F}_{1\varphi}} \right) + \Omega_1 \sin \theta \cos \theta \sin \alpha \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \bar{h} \sin \varphi \frac{\bar{F}_{2\varphi}}{\bar{F}_{1\varphi}} \right) - \\ \Omega_2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \bar{h} \cos \varphi \frac{\bar{F}_{2\varphi}}{\bar{F}_{1\varphi}} \right), \end{aligned} \quad (20)$$

式中

$$\begin{aligned} \bar{F}_{1\theta} = \int_0^1 \frac{1}{\bar{\eta}_{\theta}} d\bar{\zeta}, \bar{F}_{2\theta} = \int_0^1 \frac{1}{\bar{\eta}_{\theta}} \bar{\zeta} d\bar{\zeta}, \bar{F}_{3\theta} = \int_0^1 \frac{1}{\bar{\eta}_{\theta}} \bar{\zeta} \left( \bar{\zeta} - \frac{\bar{F}_{2\theta}}{\bar{F}_{1\theta}} \right) d\bar{\zeta}, \\ \bar{F}_{1\varphi} = \int_0^1 \frac{1}{\bar{\eta}_{\varphi}} d\bar{\zeta}, \bar{F}_{2\varphi} = \int_0^1 \frac{1}{\bar{\eta}_{\varphi}} \bar{\zeta} d\bar{\zeta}, \bar{F}_{3\varphi} = \int_0^1 \frac{1}{\bar{\eta}_{\varphi}} \bar{\zeta} \left( \bar{\zeta} - \frac{\bar{F}_{2\varphi}}{\bar{F}_{1\varphi}} \right) d\bar{\zeta}. \end{aligned}$$

### 2.2 方程求解方法

求解方程(20), 需先求出当量粘度  $\bar{\eta}_{\theta}$  和  $\bar{\eta}_{\varphi}$ , 在压力分布  $\partial \bar{p} / \partial \theta$  和  $\partial \bar{p} / \partial \varphi$  都未知的情况下, 剪应力  $\bar{\tau}_{\theta}$  和  $\bar{\tau}_{\varphi}$ , 以及速度梯度  $\partial \bar{u}_{\theta} / \partial \bar{\zeta}$  和  $\partial \bar{u}_{\varphi} / \partial \bar{\zeta}$  也是未知量, 因此由式(3)不能求出当量粘度, 需做如下工作.

由式(3)和式(17)可得到

$$\eta_{\theta} = m^{1/n} |\tau_{\theta}|^{1-1/n}. \quad (21)$$

将式(1)在  $\zeta$  上积分 1 次,得到

$$\tau_{\theta} = \tau_{\theta 1} + \frac{\zeta}{R} \frac{\partial p}{\partial \theta}. \quad (22)$$

式(21)代入式(3)得

$$\frac{\partial u_{\theta}}{\partial \zeta} = m^{-1/n} |\tau_{\theta}|^{1/n-1} \tau_{\theta}. \quad (23)$$

将式(22)代入式(23)得

$$\frac{\partial u_{\theta}}{\partial \zeta} = m^{-1/n} \left| \tau_{\theta 1} + \frac{\zeta}{R} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right|^{1/n-1} \left( \tau_{\theta 1} + \frac{\zeta}{R} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right). \quad (24)$$

上式在  $\zeta$  上积分,并利用式(19)的量纲一参数,得到  $\bar{\tau}_{\theta 1}$  的迭代表达式:

$$\bar{\tau}_{\theta 1} = \frac{(\Omega_1 \cos \varphi \sin \alpha + \Omega_2 \sin \varphi) - \bar{h}^2 \bar{h}^{1-1/n} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \int_0^1 \bar{m}^{-1/n} \left| \bar{\tau}_{\theta 1} + \bar{h}^2 \bar{\zeta} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right|^{1/n-1} \bar{\zeta} d\bar{\zeta}}{\bar{h}^{1-1/n} \int_0^1 \bar{m}^{-1/n} \left| \bar{\tau}_{\theta 1} + \bar{h}^2 \bar{\zeta} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right|^{1/n-1} d\bar{\zeta}}, \quad (25)$$

同样的方法可得到  $\bar{\tau}_{\varphi 1}$  的迭代表达式:

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{\varphi 1} = & \left\{ -\Omega_1 (\sin \theta \cos \alpha + \cos \theta \sin \varphi \sin \alpha) + \Omega_2 \cos \theta \cos \varphi - \right. \\ & \left. \bar{h}^2 \bar{h}^{1-1/n} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \varphi} \int_0^1 \bar{m}^{-1/n} \left| \bar{\tau}_{\varphi 1} + \bar{h}^2 \bar{\zeta} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \varphi} \right|^{1/n-1} \bar{\zeta} d\bar{\zeta} \right\} / \\ & \left\{ \bar{h}^{1-1/n} \int_0^1 \bar{m}^{-1/n} \left| \bar{\tau}_{\varphi 1} + \bar{h}^2 \bar{\zeta} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \varphi} \right|^{1/n-1} d\bar{\zeta} \right\}, \quad (26) \end{aligned}$$

式中,  $\bar{\tau}_{\theta 1}$  和  $\bar{\tau}_{\varphi 1}$  为内圈球表面上 ( $\zeta = 0$ ) 一点的剪应力分量。

模型的求解可按以下步骤进行:

1) 令  $n = 1$ , 即润滑剂为 Newton 流体,不考虑压力及温度对润滑剂粘度的影响,此时,  $\eta_{\theta} = \eta_{\varphi} = m_0 = m$ ,用有限差分法求解方程(20),得到各节点的压力,计算压力梯度  $\partial \bar{p} / \partial \theta$ ,代入式(11)求得速度梯度  $\partial \bar{u}_{\theta} / \partial \bar{\zeta}$ ,再将速度梯度代入式(3),令  $\zeta = 0$ ,计算内圈表面的剪应力  $\bar{\tau}_{\theta 1}$ 。用同样的方法可求出  $\bar{\tau}_{\varphi 1}$ 。

2) 以上计算步骤中求得的剪应力作为迭代初值,并与压力梯度一起分别代入式(25)和式(26),设定迭代精度,求得非 Newton 流体润滑时内圈球表面的剪应力。

3) 以上步求得的压力梯度及步骤 2) 得到的剪应力代入式(22),求得膜厚上各个节点的剪应力  $\bar{\tau}_{\theta}$ ,再代入式(21),求得当量粘度  $\bar{\eta}_{\theta}$ ,同样的方法可求出  $\bar{\eta}_{\varphi}$ 。

4) 以上步求得的压力梯度和步骤 3) 求得的当量粘度代入方程(20),设定迭代精度,计算非 Newton 流体的压力梯度和速度梯度,并计算内圈表面的剪应力。

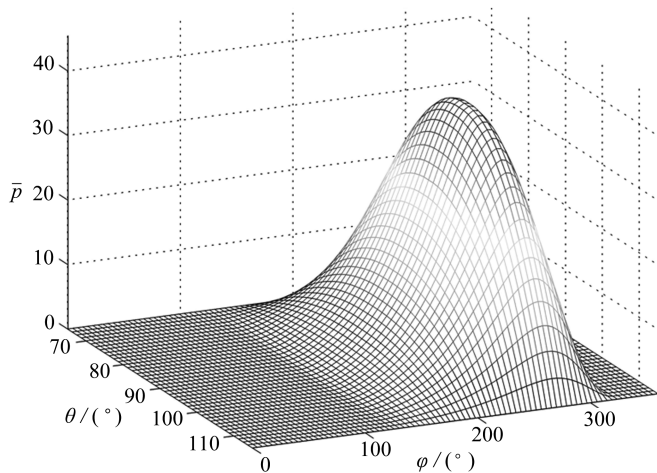
5) 以步骤 4) 得到的值作为新值,重复进行步骤 2) ~ 步骤 4),直至两次计算误差小于设定值即可结束。

## 3 计算结果与分析

### 3.1 基本参数

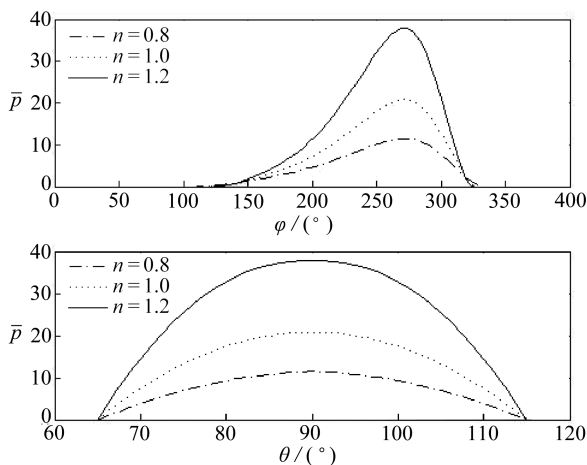
关节轴承球半径  $R = 0.065$  m,半径间隙  $c = 1 \times 10^{-4}$  m,外圈宽  $B_o = 0.055$  m,内圈宽  $B_i =$

0.070 m, 内圈转动角速度  $\omega_{\text{rot}} = 10.47 \text{ rad/s}$ , 摆动角速度  $\omega_{\text{swi}} = 0$ , 参考角速度  $\omega_{\text{ref}} = 0.2 \text{ rad/s}$ , 内圈相对平衡位置的倾斜角  $\alpha = 0^\circ$ , 偏心距分量分别为  $e_x = 0.3 \times 10^{-4} \text{ m}$ ,  $e_y = -0.3 \times 10^{-4} \text{ m}$ ,  $e_z = 0$ , 润滑脂的环境粘度  $m_0 = 0.035 \text{ N}\cdot\text{s/m}^2$ , 密度  $\rho = 875 \text{ kg/m}^3$ . 幂律指数  $n$  分别取 0.8、1.0 和 1.2.



(a) 三维压力分布

(a) The 3D pressure distribution



(b) 周向和轴向压力分布

(b) The circumferential and axial pressure distribution

图4 脂润滑膜压力分布

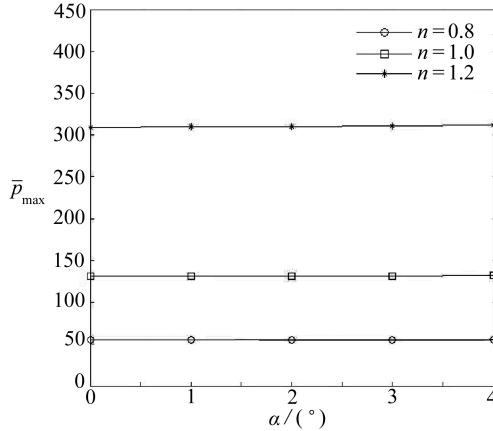
Fig. 4 Pressure distributions of the grease film

以上数据计算得到的脂润滑膜压力分布如图4所示,  $n = 1.2$  时的三维压力分布如图4(a)所示, 最大压力所在点的周向压力分布和轴向压力分布如图4(b)所示. 由于偏心的存在, 内、外圈的球表面构成收敛间隙, 并在内圈的转动作用下, 脂润滑膜产生流体动压力, 由图中可看到明显的压力峰值, 峰值压力点位于  $\theta = 90^\circ$ ,  $\varphi = 269.86^\circ$  处, 而最小膜厚则位于  $\theta = 90^\circ$ ,  $\varphi = 314.84^\circ$  处, 即最大压力出现在收敛间隙中, 并位于最小间隙前端, 这与流体动压理论是相吻合的. 此算例中, 内圈摆动角速度为 0, 相对平衡位置倾斜角度为 0, 且在  $z$  轴上没有偏心量, 所以轴向压力分布关于  $x$  轴是对称的, 在  $\theta = 90^\circ$  的位置上产生压力峰值. 由图4(b)可知在幂律指数不同的情况下, 脂润滑膜的压力分布曲线形状相同, 变化规律也相同. 随着幂律指数增大, 压



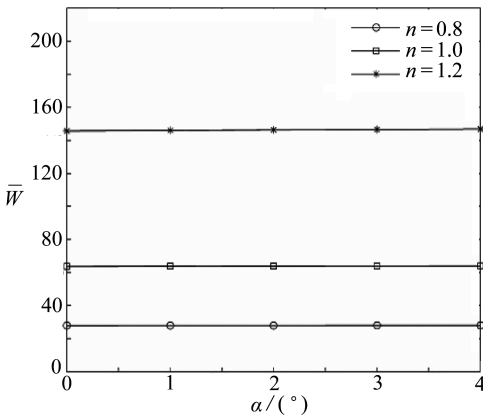
力峰值增大,压力分布曲线所包围的面积增大,因此,脂润滑膜的平均压力也增大,从而承载能力增强,计算得到的量纲一承载力  $\bar{W}$  分别为 8.403 3, 15.079 7 和 27.018 4, 也印证了这一点. 本文计算得到的脂润滑膜三维压力分布的形状与文献[17]中的 Newton 流体润滑的结果相似.

在以下的计算中, 幂律指数  $n$  分别取 0.8、1.0 和 1.2, 讨论内圈在不同的偏斜角度  $\alpha$  和摆动角速度  $\omega_{swi}$  下对脂润滑膜的最大压力、承载力和流量的影响.



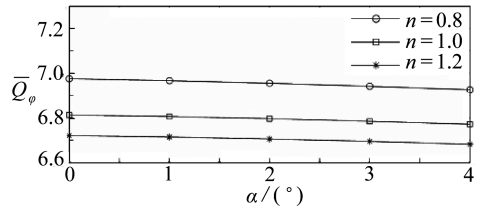
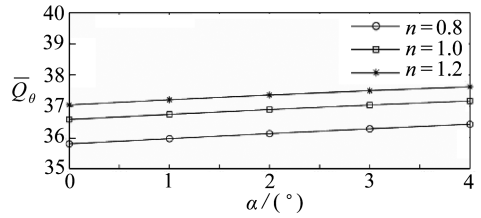
(a) 脂润滑膜最大压力与内圈倾斜角度的关系

(a) The maximum grease film pressure vs. the inner ring inclination angle



(b) 轴承承载力与内圈倾斜角度的关系

(b) The load capacity vs. the inner ring inclination angle



(c) 轴向流量和周向流量与内圈倾斜角度的关系

(c) The axial flow rate and circumferential flow rate vs. the inner ring inclination angle

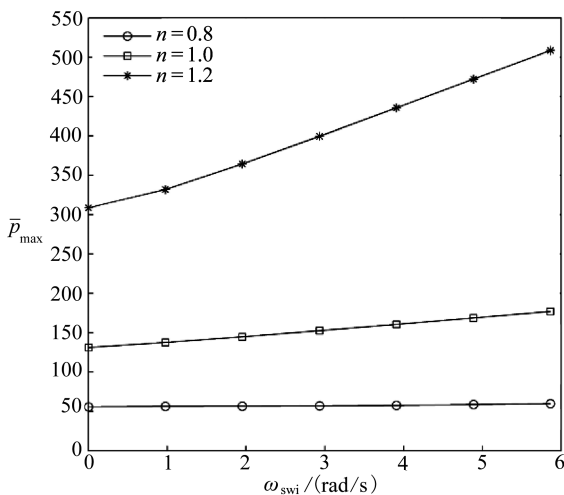
图5 内圈倾斜角度  $\alpha$  对润滑性能的影响

Fig. 5 The effects of inner ring inclination angle  $\alpha$  on the lubrication performance

### 3.2 内圈倾斜角度对润滑性能的影响

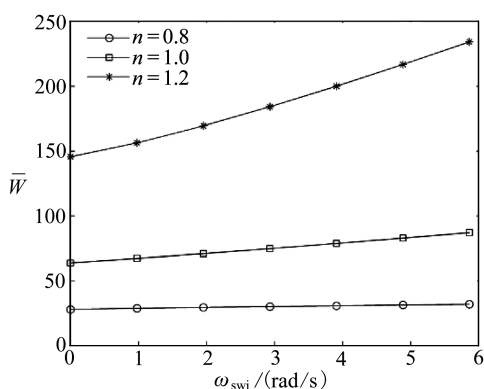
令  $e_x = 0.2 \times 10^{-4} \text{ m}$ ,  $e_y = -0.7 \times 10^{-4} \text{ m}$ ,  $e_z = -0.2 \times 10^{-4} \text{ m}$ ,  $\omega_{swi} = 0$ , 倾斜角  $\alpha$  分别为  $0^\circ$ ,  $1^\circ$ ,  $2^\circ$ ,  $3^\circ$  和  $4^\circ$ , 其它参数同 3.1 小节, 得到的计算结果如图 5 所示. 在内圈不摆动的情况下, 幂律指数相同时, 随内圈倾斜角度增大, 脂润滑膜最大压力和承载能力均增大, 但增幅很小. 在相同的倾斜角度下, 最大压力与承载力随幂律指数的增加而增加. 这个结论与文献[2]及文献[6]的结论相似: 相对于 Newton 流体 ( $n = 1$ ), 剪切稀化流体 ( $n < 1$ ) 可使轴承承载能力下降, 而剪切稠化流体 ( $n > 1$ ) 使轴承承载能力增强.

图 5(c) 示出了轴向流量  $\bar{Q}_\theta$  (泄漏流量) 和周向流量  $\bar{Q}_\varphi$  (循环流量) 随倾斜角度变化的情况, 图中所示为瞬时流量. 轴向流量是指由轴承两侧端面向外泄漏的润滑剂流量之和, 在  $e_z = 0$  且内圈倾斜角度和摆动角速度均为 0 时, 两侧的泄漏流量大小相等, 反之则因为脂润滑膜厚度或速度分布相对于平面  $Oxyz$  不对称, 而使两侧的泄漏流量大小不相等. 周向流量是沿球坐标  $\varphi$  方向的润滑剂流量, 其大小随球坐标  $\varphi$  的不同而变化, 这里用脂润滑膜未完全空化时的坐标  $\varphi_{cav}$  来计算周向流量, 本例中,  $\varphi_{cav}$  不随内圈倾斜角度变化. 由图 5(c) 可以看出, 在内圈只作转动运动; 无摆动运动的情况下, 幂律指数相同时, 内圈倾斜角度增大,  $\bar{Q}_\theta$  有增大趋势, 而  $\bar{Q}_\varphi$  有减小趋势, 在倾斜角度相同时, 随着幂律指数的增大, 轴承轴向流量增大而循环流量减小, 这是由于脂润滑膜的流体动压效应, 在润滑膜中会产生明显的高压力区域 (参考图 4), 这一高压区域会增强润滑剂的轴向流动而减弱周向流动.



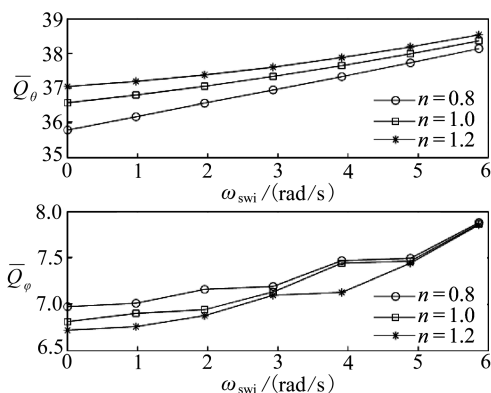
(a) 脂润滑膜最大压力与内圈摆动角速度的关系

(a) The maximum grease film pressure vs. the inner ring swing angular velocity



(b) 轴承承载力与内圈摆动角速度的关系

(b) The load capacity vs. the inner ring swing angular velocity



(c) 轴向流量和周向流量与内圈摆动角速度的关系

(c) The axial flow rate and circumferential flow rate vs. the inner ring swing angular velocity

图 6 内圈摆动角速度  $\omega_{swi}$  对润滑性能的影响

Fig. 6 The effects of inner ring swing angular velocity  $\omega_{swi}$  on the lubrication performance

### 3.3 内圈摆动角速度对润滑性能的影响

令  $e_x = 0.2 \times 10^{-4} \text{ m}$ ,  $e_y = -0.7 \times 10^{-4} \text{ m}$ ,  $e_z = -0.2 \times 10^{-4} \text{ m}$ , 内圈摆动角速度  $\omega_{\text{swi}}$  分别为 0, 0.98, 1.95, 2.93, 3.91, 4.89 和 5.86, rad/s, 内圈倾斜角度  $\alpha = 0^\circ$ , 其它参数同 3.1 小节, 计算结果如图 6 所示。

从这组数据的结果看到, 幂律指数一定时, 随内圈摆动角速度的增大, 流体动压效应增强, 脂润滑膜最大压力与承载力均呈增大趋势, 且剪切稠化流体的增长幅度明显大于剪切稀化流体。摆动角速度一定时, 随幂律指数增加, 最大压力与承载力都增大, 轴向流量和循环流量随摆动速度的增加, 总体呈上升趋势, 在摆动速度较小时, 流量受幂律指数的影响较为明显, 而在摆动速度较大时, 幂律指数对流量的影响减弱。与上一算例不同的是,  $\varphi_{\text{cav}}$  随内圈摆动角速度的不同而变化, 因此本例所计算的是不同位置处的周向流量, 则由于脂润滑膜厚度的不同使周向流量呈现不均匀的变化, 变化规律比较复杂, 在某些角速度范围内变化较大。值得注意的是, 上述轴承性能参数受幂律指数、轴承运行参数和结构参数等多个因素影响, 性能参数的变化规律会随这些参数的变化而不同。

## 4 结 论

1) 用微元体分析方法, 推导出适用于非 Newton 流体润滑球面轴承的 Reynolds 方程, 该方程既考虑了轴承内圈的转动因素, 也考虑了因轴颈偏斜造成的内圈倾斜, 或内圈摆动因素, 给出了润滑剂为幂律流体时的计算方法。以脂润滑关节轴承为例, 应用有限差分法对 Reynolds 方程进行求解, 研究了幂律指数、内圈倾斜角度和摆动角速度对润滑性能的影响。

2) 在合适的润滑条件下, 关节轴承的脂润滑膜能够产生流体动压润滑。

3) 脂润滑膜的最大压力、承载力和流量等性能参数均受润滑剂的幂律指数、内圈摆动角速度和内圈倾斜角度的影响。在其它参数不变时, 增大幂律指数可提高脂润滑膜的最大压力, 进而提高轴承的承载能力, 并使轴向流量(泄漏量)增加; 内圈倾斜角度对脂润滑膜最大压力和承载能力的影响较小, 内圈摆动角速度的影响较为明显; 幂律指数一定时, 提高内圈摆动角速度可产生更大的润滑膜最大压力和承载能力, 并且剪切稠化流体 ( $n > 1$ ) 的提升效果更加明显; 周向流量也受上述因素影响, 但因为不同条件下脂润滑膜空化边界不同, 导致变化规律较为复杂。

### 参考文献(References):

- [1] Dowson D. A generalized Reynolds equation for fluid-film lubrication[J]. *International Journal of Mechanical Science*, 1962, **4**(2): 159-170.
- [2] Buckholz R. On the role of a non-Newtonian fluid in short journal bearing theory[J]. *Journal of Tribology*, 1985, **107**(1): 68-74.
- [3] Dien I, Elrod H. A generalized steady-state Reynolds equation for non-Newtonian fluids, with application to journal bearings[J]. *Journal of Lubrication Technology*, 1983, **105**(3): 385-390.
- [4] Buckholz R. Effects of power-law non-Newtonian lubricants on load capacity and friction for plane slider bearings[J]. *Journal of Tribology*, 1986, **108**(1): 86-91.
- [5] Johnson M, Mangkoesobroto S. Analysis of lubrication theory for power law fluid[J]. *Journal of Tribology*, 1993, **115**(1): 71-77.
- [6] Lin J, Teng M, Ho M. Effects of non-Newtonian rheology on the film-height history between

- non-parallel sliding-squeezing surfaces[J]. *Journal of Engineering Tribology*, 2007, **221**(2): 155-159.
- [7] 阿伯德-尔-马力克 M B, 伯占 N A, 豪赛恩 H S. 用群方法求解幂律非牛顿导电流体的 Rayleigh 问题[J]. 应用数学和力学, 2002, **23**(6): 569-575. (Abd-el-Malek M B, Badran N A, Hassan H S. Solution of the Rayleigh problem for a power-saw non-Newtonian conducting fluid via group method[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2002, **23**(6): 569-575. (in Chinese))
- [8] Tichy J. Hydrodynamic lubrication theory for the Bingham plastic flow model[J]. *Journal of Rheology*, 1991, **35**(4): 477-496.
- [9] Jang J, Khonsari M. Performance analysis of grease-lubricated journal bearings including thermal effects[J]. *Journal of Tribology*, 1997, **119**(4): 859-868.
- [10] Yoo J, Kim K. Numerical analysis of grease thermal elastohydrodynamic lubrication problems using the Herschel-Bulkley model[J]. *Tribology International*, 1997, **30**(6): 401-408.
- [11] Zhang J, Khayat R, Noronha A. Three-dimensional lubrication flow of a Herschel-Bulkley fluid[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2006, **50**(4): 511-530.
- [12] 康克家, 杜三明, 张永振, 逢显娟. 高速摆动下 PTFE 编织复合材料干摩擦研究[J]. 润滑与密封, 2012, **37**(1): 10-12. (KANG Ke-jia, DU San-ming, ZHANG Yong-zhen, PANG Xian-juan. Study on dry friction behaviors of PTFE braided composites under high-speed condition[J]. *Lubrication Engineering*, 2012, **37**(1): 10-12. (in Chinese))
- [13] Germaneau A, Peyruseigt F, Mistou S, Dalverny O, Doumalin P, Dupré J-C. Verification of a spherical plain bearing finite-element model using scattered light photoelasticity tests[J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology*, 2008, **222**(5): 647-656.
- [14] Kim B C, Park D C, Kim H S, Lee D J. Development of composite spherical bearing[J]. *Composite Structures*, 2006, **75**(1/4): 231-240.
- [15] 邱明, 李正国, 李迎春, 陈龙, 苗艳伟. 倾斜摆动条件下衬垫改性对自润滑关节轴承摩擦学性能的影响[J]. 摩擦学学报, 2014, **34**(1): 59-64. (QIU Ming, LI Zheng-guo, LI Ying-chun, CHEN Long, MIAO Yan-wei. Effect of liner modification on the tribological properties of self-lubricating spherical plain bearings under tilting oscillation[J]. *Tribology*, 2014, **34**(1): 59-64. (in Chinese))
- [16] 向定汉, 潘青林, 姚正军. 聚四氟乙烯自润滑编织复合材料关节轴承的摆动摩擦磨损性能研究[J]. 摩擦学学报, 2003, **23**(1): 72-75. (XIANG Ding-han, PAN Qing-lin, YAO Zheng-jun. Friction and wear behavior of polytetrafluoroethylene fabric composite spherical bearing in swaying[J]. *Tribology*, 2003, **23**(1): 72-75. (in Chinese))
- [17] Meyer D M, Tichy J A. Lubrication model of an artificial hip joint: pressure profile versus inclination angle of the acetabular cup[J]. *Journal of Tribology*, 1999, **121**(3): 492-498.
- [18] Meyer D. Reynolds equation for spherical bearings[J]. *Journal of Tribology*, 2003, **125**(3): 203-206.
- [19] 邱明, 殷勇, 王国锋, 郜志伦, 陈龙, 李迎春. 一种复合摆动式关节轴承试验机: 中国, CN201020522657.1[P]. (QIU Ming, YIN Yong, WANG Guo-feng, GAO Zhi-lun, CHEN Long, LI Ying-chun. A Test Rig for Spherical Plain Bearing With Compound Swing Movement; China, CN201020522657.1[P]. (in Chinese))
- [20] 杨沛然. 流体润滑数值分析[M]. 北京: 国防工业出版社, 1998. (YANG Pei-ran. *Numerical Analysis of Fluid Lubrication* [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 1998. (in Chinese))

nese))

- [21] 裘俊红. 传递原理及其应用[M]. 北京: 化学工业出版社, 2007. (QIU Jun-hong. *The Principle and Applications of Transfer*[M]. Beijing: Chemical Industry Press, 2007. (in Chinese))
- [22] Goenka P, Booker J. Spherical bearings: static and dynamic analysis via the finite element method[J]. *Journal of Lubrication Technology*, 1980, **102**(3): 308-318.

## Numerical Analysis of Grease Lubrication for Radial Spherical Plain Bearings in Rotation and Swing Motion

TANG Zhan-qi<sup>1,2</sup>, LIU Kun<sup>1</sup>, WANG Wei<sup>1</sup>, LIU Xiao-jun<sup>1</sup>

(1. *Institute of Tribology, Hefei University of Technology, Hefei 230009, P.R.China;*

(2. *College of Chemistry and Chemical Engineering, Beifang University of Nationalities, Yinchuan 750021, P.R.China*)

**Abstract:** Formulation of the 3D lubrication model for spherical bearings was proposed. The rotation of the inner ring, the inner ring tilt caused by the axle journal misalignment and the swing angular velocity of the inner ring were taken into account in this model, and the modified Reynolds equation in the spherical coordinate system was obtained to depict non-Newtonian fluid lubrication. Moreover, with the lubrication model aforementioned, the lubrication problems of radial spherical plain bearings were analysed numerically based on the Ostwald rheological model for greases. The pressure distribution, the maximum pressure, the load capacity and the flow rate of the grease lubricant film were studied with variations of the grease power-law index, the inner ring inclination angle and the swing angular velocity, respectively. It is found that the grease lubricant film generates obvious hydrodynamic effects. With the other parameters fixed, the power-law index has significant influences on the maximum pressure and the load capacity of the grease film. Compared with Newtonian fluid, the shear-thickening fluid is observed to increase the values of film maximum pressure, load capacity and axial flow rate, but the shear-thinning fluid is observed to act contrarily. The inner ring inclination angle has little effect on the maximum pressure and the load capacity, while the swing angular velocity has much.

**Key words:** spherical bearing; radial spherical plain bearing; non-Newtonian fluid lubrication; compound motion; Reynolds equation

**Foundation item:** The National Natural Science Foundation of China(51375132)