文章编号:1000-0887(2015)03-0303-12

用 3 个向量对构造梁振动系统的刚度矩阵*

周　硕，　吕晓寰，　王小雪

(东北电力大学 理学院, 吉林 吉林 132012)

摘要： 针对梁的离散化模型的刚度矩阵是五对角矩阵,梁振动反问题的实质是实对称五对角矩阵的特征值反问题.该文利用向量对、Moore-Penrose 广义逆给出了实对称五对角矩阵向量对反问题存在唯一解的条件,并结合矩阵分块讨论了双对称五对角矩阵向量对反问题解存在唯一的条件,进而计算了次对角线位置元素为负,其它位置元素均为正的实对称五对角矩阵特征值反问题.由于构造梁的离散模型需要的数据可由测试得到,故而其结果适合于模态分析、系统结构的分析与设计等方面应用.最后给出了数值算例,通过数值讨论说明方法的有效性.

关 键 词： 梁振动系统； 双对称五对角矩阵； 向量对； 反问题； 刚度矩阵

中图分类号： TH123⁺.1；O241.6　　　**文献标志码：** A

doi：10.3879/j.issn.1000-0887.2015.03.008

引　　言

通过长度为 $\{l_i\}_0^n$ 的无质量刚杆连接 $n+2$ 个质量为 $\{m_i\}_{-1}^n$ 的质点,再由 n 个刚度为 $\{k_i\}_1^n$ 的转动弹簧连在一起,可以构成梁作横向振动的简化模型[1].系统的刚度矩阵是具有如下形式的实对称五对角矩阵：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & & & & \\ b_1 & a_2 & b_2 & c_2 & & & \\ c_1 & b_2 & a_3 & b_3 & c_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c_{n-4} & b_{n-3} & a_{n-2} & b_{n-2} & c_{n-2} \\ & & & c_{n-3} & b_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & & c_{n-2} & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix},$$

其中

$$a_i=p_{i,i}+2p_{i,i+1}+p_{i+1,i+1},\ b_i=-p_{i,i+1}-p_{i+1,i+1}-p_{i+1,i+2},\ c_i=p_{i+1,i+2},\quad i=1,2,\cdots,n,$$

式中

* 收稿日期： 2014-07-09；修订日期： 2014-12-14

基金项目： 国家自然科学基金(11072085)；吉林省自然科学基金(201115180)

作者简介： 周硕(1968—),男,吉林人,教授,博士,硕士生导师(通讯作者. E-mail：zhou-shuo@163.com).

$$p_{i,i}=(k_i+k_{i+1})/l_i^2,\ p_{i,i+1}=k_{i+1}/(l_il_{i+1}),$$

并且若 $i>n$ 时 $k_i=0$.

若实对称五对角矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中 $a_i=a_{n-i+1}$, $b_i=b_{n-i}$, $c_i=c_{n-i-1}(i=1,2,\cdots,[n/2]-1)$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为全(双)对称五对角矩阵.

梁的弹簧-质点-刚杆离散模型是具有分布质量的梁的有限差分近似.由于梁的离散化模型中刚度矩阵为实对称五对角矩阵,因此,梁振动反问题的实质是实对称五对角矩阵的特征值反问题[1].矩阵及其特征值反问题在振动理论中应用广泛[2-5],近年来对实对称带状矩阵(三对角矩阵、五对角矩阵等)特征值反问题的研究已取得了一些成果[6-9].文献[8]给出了利用两个特征对和次次对角元 $c_i=c_{n-i-1}$ 构造全对称五对角矩阵的方法;文献[9]研究了双对称五对角矩阵特征值反问题的可解性并给出了利用 2 个特征对构造双对称五对角矩阵的方法;文献[10]对实对称带状矩阵逆特征值问题进行了研究;文献[11]讨论了由 3 个特殊次序向量对构造三对角对称矩阵的问题;文献[12]研究了 Jacobi 矩阵的一类广义特征值反问题;文献[13]研究了由 5 个不同的特征对构造五对角矩阵的解的存在性和唯一性的充要条件;文献[14]针对缺损特征对的梁振动反问题进行了研究;文献[15]讨论了由两个右特征对构造三对角四元数矩阵问题.考虑到特征对是向量对的特殊情形,本文首先针对实对称五对角矩阵向量对反问题以及全(双)对称五对角矩阵向量对反问题进行了讨论,然后通过给出的 3 个固有频率与模态向量,构造刚度矩阵,进而通过优化方法计算 n 个无质量刚杆的长度 $\{l_i\}_1^n$ 和 n 个转动弹簧的刚度 $\{k_i\}_1^n$.

问题Ⅰ 给定向量 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z},\boldsymbol{U},\boldsymbol{V},\boldsymbol{W}\in R^n$,求 n 阶实对称五对角矩阵 $\boldsymbol{A}$,使得 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{AY}=\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{AZ}=\boldsymbol{W}$.

问题Ⅱ 给定向量 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z},\boldsymbol{U},\boldsymbol{V},\boldsymbol{W}\in R^n$,构造一个 n 阶全(双)对称五对角矩阵 $\boldsymbol{A}$,使($\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{U}$),($\boldsymbol{Y}$,$\boldsymbol{V}$),($\boldsymbol{Z}$,$\boldsymbol{W}$) 均为 $\boldsymbol{A}$ 的向量对(即 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{AY}=\boldsymbol{V}$,$\boldsymbol{AZ}=\boldsymbol{W}$).

问题Ⅲ 给定频率 λ,μ,γ 和模态向量 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z}$(即问题Ⅰ中 $\boldsymbol{U}=\lambda\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{V}=\mu\boldsymbol{Y}$,$\boldsymbol{W}=\gamma\boldsymbol{Z}$),构造系统的刚度矩阵($n$ 阶实对称五对角矩阵)$\boldsymbol{A}$, 使得

$$\boldsymbol{AX}=\lambda\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{AY}=\mu\boldsymbol{Y},\ \boldsymbol{AZ}=\gamma\boldsymbol{Z},$$

且 $\boldsymbol{A}$ 的主对角线元素为 $a_i>0(i=1,2,\cdots,n)$,次对角线元素为 $b_i<0(i=1,2,\cdots,n-1)$,次次对角线元素为 $c_i>0(i=1,2,\cdots,n-2)$.

为表述问题方便,给出如下记号:

$$\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm T}\in R^n,\ \boldsymbol{Y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm T}\in R^n,\ \boldsymbol{Z}=(z_1,z_2,\cdots,z_n)^{\mathrm T}\in R^n,$$

$$\boldsymbol{U}=(u_1,u_2,\cdots,u_n)^{\mathrm T}\in R^n,\ \boldsymbol{V}=(v_1,v_2,\cdots,v_n)^{\mathrm T}\in R^n,$$

$$\boldsymbol{W}=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\mathrm T}\in R^n,$$

$\boldsymbol{S}_k$ 为 k 阶反序单位阵,

$$\boldsymbol{e}_i=\begin{bmatrix}x_i\\y_i\\z_i\end{bmatrix}\qquad(i=1,2,\cdots,n),$$

$$\boldsymbol{B}_i=(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_{i+1},\boldsymbol{e}_{i+2})\qquad(i=1,2,\cdots,n-2),$$

$$\boldsymbol{B}_{n-1}=(\boldsymbol{e}_{n-1},\boldsymbol{e}_n),\ \boldsymbol{f}_i=\begin{bmatrix}u_i\\v_i\\w_i\end{bmatrix}\qquad(i=1,2,\cdots,n),$$

$$\tilde{\boldsymbol{f}}_i=(\lambda x_i,\ \mu y_i,\ \gamma z_i)^{\mathrm{T}},\ D_i=\det(\boldsymbol{B}_i)\qquad(i=1,2,\cdots,n-2),$$

$\boldsymbol{B}_i^+$ 表示矩阵 $\boldsymbol{B}_i$ 的 Moore-Penrose 广义逆,

$$\begin{cases}d_i^{(1)}=\det([\tilde{\boldsymbol{f}}_i-b_{i-1}\boldsymbol{e}_{i-1}-c_{i-2}\boldsymbol{e}_{i-2},\boldsymbol{e}_{i+1},\boldsymbol{e}_{i+2}])\\ d_i^{(2)}=\det([\boldsymbol{e}_i,\ \tilde{\boldsymbol{f}}_i-b_{i-1}\boldsymbol{e}_{i-1}-c_{i-2}\boldsymbol{e}_{i-2},\boldsymbol{e}_{i+2}])\\ d_i^{(3)}=\det([\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_{i+1},\ \tilde{\boldsymbol{f}}_i-b_{i-1}\boldsymbol{e}_{i-1}-c_{i-2}\boldsymbol{e}_{i-2}])\end{cases}\qquad(i=1,2,\cdots,n-2).$$

1 问题的可解性条件

定理 1 给定向量 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z},\boldsymbol{U},\boldsymbol{V},\boldsymbol{W}\in R^n$, 则问题 I 存在唯一解的充要条件是

1) $D_i\neq 0\qquad(i=1,2,\cdots,n-2)$;

2) $\operatorname{rank}(\boldsymbol{B}_{n-1})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{B}_{n-1},\boldsymbol{f}_{n-1}-b_{n-2}\boldsymbol{e}_{n-2}-c_{n-1}\boldsymbol{e}_{n-3})=2$;

3) $\operatorname{rank}(\boldsymbol{e}_n)=\operatorname{rank}(\boldsymbol{e}_n,\boldsymbol{f}_n-b_{n-1}\boldsymbol{e}_{n-1}-c_{n-2}\boldsymbol{e}_{n-2})=1$.

证明 对于问题 I 中给的 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z}$ 和 $\boldsymbol{U},\boldsymbol{V},\boldsymbol{W}$, 由 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{AY}=\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{AZ}=\boldsymbol{W}$ 可得

$$\boldsymbol{B}_i\begin{bmatrix}a_i\\b_i\\c_i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_i-x_{i-1}b_{i-1}-x_{i-2}c_{i-2}\\v_i-y_{i-1}b_{i-1}-y_{i-2}c_{i-2}\\w_i-z_{i-1}b_{i-1}-z_{i-2}c_{i-2}\end{bmatrix}\qquad(i=1,2,\cdots,n-2),$$

$$\boldsymbol{B}_{n-1}\begin{bmatrix}a_{n-1}\\b_{n-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_{n-1}-x_{n-2}b_{n-2}-x_{n-3}c_{n-3}\\v_{n-1}-y_{n-2}b_{n-2}-y_{n-3}c_{n-3}\\w_{n-1}-z_{n-2}b_{n-2}-z_{n-3}c_{n-3}\end{bmatrix},\ a_n\boldsymbol{e}_n=\begin{bmatrix}u_n-x_{n-1}b_{n-1}-x_{n-2}c_{n-2}\\v_n-y_{n-1}b_{n-1}-y_{n-2}c_{n-2}\\w_n-z_{n-1}b_{n-1}-z_{n-2}c_{n-2}\end{bmatrix}.$$

由以上方程组可得问题有唯一解的充要条件为条件 1)~3),且唯一解为

$$\begin{bmatrix}a_i\\b_i\\c_i\end{bmatrix}=\boldsymbol{B}_i^+\begin{bmatrix}u_i-x_{i-1}b_{i-1}-x_{i-2}c_{i-2}\\v_i-y_{i-1}b_{i-1}-y_{i-2}c_{i-2}\\w_i-z_{i-1}b_{i-1}-z_{i-2}c_{i-2}\end{bmatrix}\qquad(i=1,2,\cdots,n-2),\tag{1}$$

$$\begin{bmatrix}a_{n-1}\\b_{n-1}\end{bmatrix}=\boldsymbol{B}_{n-1}^+\begin{bmatrix}u_{n-1}-x_{n-2}b_{n-2}-x_{n-3}c_{n-3}\\v_{n-1}-y_{n-2}b_{n-2}-y_{n-3}c_{n-3}\\w_{n-1}-z_{n-2}b_{n-2}-z_{n-3}c_{n-3}\end{bmatrix},\tag{2}$$

$$a_n=\boldsymbol{e}_n^+\begin{bmatrix}u_n-x_{n-1}b_{n-1}-x_{n-2}c_{n-2}\\v_n-y_{n-1}b_{n-1}-y_{n-2}c_{n-2}\\w_n-z_{n-1}b_{n-1}-z_{n-2}c_{n-2}\end{bmatrix},\tag{3}$$

其中

$$\boldsymbol{B}_i^+=\boldsymbol{B}_i^{-1},\ \boldsymbol{B}_{n-1}^+=(\boldsymbol{B}_{n-1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_{n-1})^{-1}\boldsymbol{B}_{n-1}^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{e}_n^+=\frac{\boldsymbol{e}_n^{\mathrm{T}}}{|\boldsymbol{e}_n|_2^2}.$$

定义 1[16] 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in R^{n\times n}$,满足 $a_{ij}=a_{n+1-i,n+1-j}(i,\ j=1,2,\cdots,n)$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶中心

对称矩阵.所有 n 阶中心对称矩阵的全体记为 $R_{\mathrm{CS}}^{n\times n}$.

$\boldsymbol{A}\in R_{\mathrm{CS}}^{n\times n}$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{S}_n\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}_n$.

定义 2[8] 一个向量 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in R^n$ 如果满足 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{S}_n\boldsymbol{X}$,则称 $\boldsymbol{X}$ 为对称向量;如果满足条件 $\boldsymbol{X}=-\boldsymbol{S}_n\boldsymbol{X}$,则称 $\boldsymbol{X}$ 为反对称向量;$\boldsymbol{X}$ 为对称向量当且仅当 $x_i=x_{n+1-i}$,$\boldsymbol{X}$ 为反对称向量当且仅当 $x_i=-x_{n+1-i}(i=1,2,\cdots,[n/2]-1)$.

易证中心对称矩阵的特征向量为对称向量或反对称向量.

定义 3[17] 若矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in R^{n\times n}$ 满足 $a_{ij}=a_{ji}=a_{n-j+1,n-i+1}(i,j=1,2,\cdots,n)$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为双对称矩阵.所有 n 阶双对称矩阵的全体记为 $R_{\mathrm{BS}}^{n\times n}$.

引理 1[17] $\boldsymbol{A}\in R_{\mathrm{BS}}^{n\times n}$ 当且仅当 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{S}_n\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}_n=\boldsymbol{A}$.

引理 2[17] 若 $\boldsymbol{A}\in R_{\mathrm{BS}}^{n\times n}$,则 $\boldsymbol{A}$ 可表示为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_2\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{A}_1\in R_{\mathrm{S}}^{(n-m)\times(n-m)},\ \boldsymbol{A}_2\in R_{\mathrm{S}}^{m\times m},$$

其中当 $n=2m$ 时,

$$\boldsymbol{P}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{I}_m\\ \boldsymbol{S}_m & -\boldsymbol{S}_m\end{bmatrix};$$

当 $n=2m+1$ 时,

$$\boldsymbol{P}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_m\\ \boldsymbol{0} & \sqrt{2} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{S}_m & \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{S}_m\end{bmatrix}.$$

注 由于双对称矩阵是对称的中心对称矩阵,故其特征向量为对称向量或反对称向量.

定理 2 设在问题Ⅱ中 $n=2m$,$\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z}\in R^{2m}$ 为对称向量或是反对称向量,$\boldsymbol{U},\boldsymbol{V},\boldsymbol{W}\in R^{2m}$ 为其对应的对称向量或反对称向量,则问题Ⅱ存在唯一解的充要条件是:

1) $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z}$ 中至少有一个对称向量及一个反对称向量(不妨设 $\boldsymbol{X}$ 为对称(或反对称)向量,$\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z}$ 为反对称(或对称)向量),$\boldsymbol{U},\boldsymbol{V},\boldsymbol{W}$ 为其对应的对称向量或反对称向量;

2) $D_i\neq 0\ (i=1,2,\cdots,m-2)$;

3) $x_m(y_{m-1}z_m-y_mz_{m-1})\neq 0$;

4) $\operatorname{rank}(\tilde{\boldsymbol{e}}_m)=\operatorname{rank}\left(\tilde{\boldsymbol{e}}_m,\boldsymbol{f}_m-c_{m-2}\boldsymbol{e}_{m-2}-\tilde{\boldsymbol{e}}_{m-1}\begin{bmatrix}b_{m-1}\\ c_{m-1}\end{bmatrix}\right)=2$,

或

$$\operatorname{rank}(\tilde{\boldsymbol{e}}_m)=\operatorname{rank}\left(\tilde{\boldsymbol{e}}_m,\boldsymbol{f}_m-c_{m-2}\boldsymbol{e}_{m-2}-\tilde{\boldsymbol{e}}_{m-1}\begin{bmatrix}b_{m-1}\\ -c_{m-1}\end{bmatrix}\right)=2,$$

其中

$$\tilde{\boldsymbol{e}}_k=\begin{bmatrix}x_k & x_k\\ y_k & -y_k\\ z_k & -z_k\end{bmatrix}\qquad(k=m,\ m-1).$$

证明 全对称五对角矩阵 $\boldsymbol{A}_{\mathrm{s}}$ 可以表示为

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{s}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_m & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{S}_m\boldsymbol{A}_m\boldsymbol{S}_m\end{bmatrix},$$

其中

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&0&0&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ 0&0&0&\cdots&0\\ c_{m-1}&0&0&\cdots&0\\ b_m&c_m&0&\cdots&0\end{bmatrix},$$

且 $c_{m-1}=c_m$,则 $\boldsymbol{S}_m\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{S}_m$.

记

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_1\\ \boldsymbol{X}_2\end{bmatrix},\ \boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Y}_1\\ \boldsymbol{Y}_2\end{bmatrix},\ \boldsymbol{Z}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Z}_1\\ \boldsymbol{Z}_2\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{X}_i,\boldsymbol{Y}_i,\boldsymbol{Z}_i\in R^m,\ i=1,2,$$

$$\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{U}_1\\ \boldsymbol{U}_2\end{bmatrix},\ \boldsymbol{V}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{V}_1\\ \boldsymbol{V}_2\end{bmatrix},\ \boldsymbol{W}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{W}_1\\ \boldsymbol{W}_2\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{U}_i,\boldsymbol{V}_i,\boldsymbol{W}_i\in R^m,\ i=1,2.$$

令

$$\boldsymbol{P}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_m&\boldsymbol{I}_m\\ \boldsymbol{S}_m&-\boldsymbol{S}_m\end{bmatrix},$$

由 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{I}_n$ 知,$\boldsymbol{P}$ 为正交阵,则

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{\mathrm{s}}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_m+\boldsymbol{B}\boldsymbol{S}_m&\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}&\boldsymbol{A}_m-\boldsymbol{B}\boldsymbol{S}_m\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{S}_m\boldsymbol{X}_2\\ \boldsymbol{X}_1-\boldsymbol{S}_m\boldsymbol{X}_2\end{bmatrix},\ \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{Y}_1+\boldsymbol{S}_m\boldsymbol{Y}_2\\ \boldsymbol{Y}_1-\boldsymbol{S}_m\boldsymbol{Y}_2\end{bmatrix},\ \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{Z}_1+\boldsymbol{S}_m\boldsymbol{Z}_2\\ \boldsymbol{Z}_1-\boldsymbol{S}_m\boldsymbol{Z}_2\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{U}_1+\boldsymbol{S}_m\boldsymbol{U}_2\\ \boldsymbol{U}_1-\boldsymbol{S}_m\boldsymbol{U}_2\end{bmatrix},\ \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{V}_1+\boldsymbol{S}_m\boldsymbol{V}_2\\ \boldsymbol{V}_1-\boldsymbol{S}_m\boldsymbol{V}_2\end{bmatrix},\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{W}_1+\boldsymbol{S}_m\boldsymbol{W}_2\\ \boldsymbol{W}_1-\boldsymbol{S}_m\boldsymbol{W}_2\end{bmatrix}.$$

由 $\boldsymbol{A}_{\mathrm{s}}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{U}$,有 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{\mathrm{s}}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}$,将 $\boldsymbol{A}_{\mathrm{s}}$ 代入有

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_m+\boldsymbol{B}\boldsymbol{S}_m&\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}&\boldsymbol{A}_m-\boldsymbol{B}\boldsymbol{S}_m\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{S}_m\boldsymbol{X}_2\\ \boldsymbol{X}_1-\boldsymbol{S}_m\boldsymbol{X}_2\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{U}_1+\boldsymbol{S}_m\boldsymbol{U}_2\\ \boldsymbol{U}_1-\boldsymbol{S}_m\boldsymbol{U}_2\end{bmatrix}.$$

同理有

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_m+\boldsymbol{B}\boldsymbol{S}_m&\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}&\boldsymbol{A}_m-\boldsymbol{B}\boldsymbol{S}_m\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{Y}_1+\boldsymbol{S}_m\boldsymbol{Y}_2\\ \boldsymbol{Y}_1-\boldsymbol{S}_m\boldsymbol{Y}_2\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{V}_1+\boldsymbol{S}_m\boldsymbol{V}_2\\ \boldsymbol{V}_1-\boldsymbol{S}_m\boldsymbol{V}_2\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_m+\boldsymbol{B}\boldsymbol{S}_m&\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}&\boldsymbol{A}_m-\boldsymbol{B}\boldsymbol{S}_m\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{Z}_1+\boldsymbol{S}_m\boldsymbol{Z}_2\\ \boldsymbol{Z}_1-\boldsymbol{S}_m\boldsymbol{Z}_2\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{W}_1+\boldsymbol{S}_m\boldsymbol{W}_2\\ \boldsymbol{W}_1-\boldsymbol{S}_m\boldsymbol{W}_2\end{bmatrix}.$$

若 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z}$ 为对称向量,则有

$$\begin{cases}(\boldsymbol{A}_m+\boldsymbol{B}\boldsymbol{S}_m)\boldsymbol{X}_1=\boldsymbol{U}_1,\\ (\boldsymbol{A}_m+\boldsymbol{B}\boldsymbol{S}_m)\boldsymbol{Y}_1=\boldsymbol{V}_1,\\ (\boldsymbol{A}_m+\boldsymbol{B}\boldsymbol{S}_m)\boldsymbol{Z}_1=\boldsymbol{W}_1.\end{cases}$$

此时有

$$\begin{cases}x_ia_i+x_{i+1}b_i+x_{i+2}c_i=u_i-x_{i-1}b_{i-1}-x_{i-2}c_{i-2}\\ y_ia_i+y_{i+1}b_i+y_{i+2}c_i=v_i-y_{i-1}b_{i-1}-y_{i-2}c_{i-2}\\ z_ia_i+z_{i+1}b_i+z_{i+2}c_i=w_i-z_{i-1}b_{i-1}-z_{i-2}c_{i-2}\end{cases}\qquad(i=1,2,\cdots,m-2),\tag{4}$$

$$\begin{cases}x_{m-1}a_{m-1}+x_m(b_{m-1}+c_{m-1})=u_{m-1}-x_{m-2}b_{m-2}-x_{m-3}c_{m-3},\\ y_{m-1}a_{m-1}+y_m(b_{m-1}+c_{m-1})=v_{m-1}-y_{m-2}b_{m-2}-y_{m-3}c_{m-3},\\ z_{m-1}a_{m-1}+z_m(b_{m-1}+c_{m-1})=w_{m-1}-z_{m-2}b_{m-2}-z_{m-3}c_{m-3},\end{cases}\tag{5}$$

$$\begin{cases}x_m(a_m+b_m)=u_m-x_{m-1}(b_{m-1}+c_{m-1})-x_{m-2}c_{m-2},\\ y_m(a_m+b_m)=v_m-y_{m-1}(b_{m-1}+c_{m-1})-y_{m-2}c_{m-2},\\ z_m(a_m+b_m)=w_m-z_{m-1}(b_{m-1}+c_{m-1})-z_{m-2}c_{m-2}.\end{cases}\tag{6}$$

对于方程组(4)应用定理1可求得唯一解,但是对于方程组(5)不存在唯一的 b_{m-1},c_{m-1},方程组(6)也不存在唯一的 a_m,b_m.

同理,对于 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z}$ 均为反对称向量时,有

$$\begin{cases}(\boldsymbol{A}_m-\boldsymbol{BS}_m)\boldsymbol{X}_1=\boldsymbol{U}_1,\\ (\boldsymbol{A}_m-\boldsymbol{BS}_m)\boldsymbol{Y}_1=\boldsymbol{V}_1,\\ (\boldsymbol{A}_m-\boldsymbol{BS}_m)\boldsymbol{Z}_1=\boldsymbol{W}_1.\end{cases}$$

同样不能唯一地确定 b_{m-1},c_{m-1},a_m,b_m.

若 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z}$ 中有一个为对称向量,其它为反对称向量,不妨令 $\boldsymbol{X}$ 为对称向量,$\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z}$ 为反对称向量,则有

$$\begin{cases}(\boldsymbol{A}_m+\boldsymbol{BS}_m)\boldsymbol{X}_1=\boldsymbol{U}_1,\\ (\boldsymbol{A}_m-\boldsymbol{BS}_m)\boldsymbol{Y}_1=\boldsymbol{V}_1,\\ (\boldsymbol{A}_m-\boldsymbol{BS}_m)\boldsymbol{Z}_1=\boldsymbol{W}_1,\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_ia_i+x_{i+1}b_i+x_{i+2}c_i=u_i-x_{i-1}b_{i-1}-x_{i-2}c_{i-2}\\ y_ia_i+y_{i+1}b_i+y_{i+2}c_i=v_i-y_{i-1}b_{i-1}-y_{i-2}c_{i-2}\\ z_ia_i+z_{i+1}b_i+z_{i+2}c_i=w_i-z_{i-1}b_{i-1}-z_{i-2}c_{i-2}\end{cases}\quad(i=1,2,\cdots,m-2),\tag{7}$$

$$\begin{cases}x_{m-1}a_{m-1}+x_m(b_{m-1}+c_{m-1})=u_{m-1}-x_{m-2}b_{m-2}-x_{m-3}c_{m-3},\\ y_{m-1}a_{m-1}+y_m(b_{m-1}-c_{m-1})=v_{m-1}-y_{m-2}b_{m-2}-y_{m-3}c_{m-3},\\ z_{m-1}a_{m-1}+z_m(b_{m-1}-c_{m-1})=w_{m-1}-z_{m-2}b_{m-2}-z_{m-3}c_{m-3},\end{cases}\tag{8}$$

$$\begin{cases}x_m(a_m+b_m)=u_m-x_{m-1}(b_{m-1}+c_{m-1})-x_{m-2}c_{m-2},\\ y_m(a_m-b_m)=v_m-y_{m-1}(b_{m-1}-c_{m-1})-y_{m-2}c_{m-2},\\ z_m(a_m-b_m)=w_m-z_{m-1}(b_{m-1}-c_{m-1})-z_{m-2}c_{m-2}.\end{cases}\tag{9}$$

应用定理1的结论可以得到方程组(7)~(9)解存在唯一的充要条件即为定理2中的条件2)~4).

若 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z}$ 中有一个是反对称向量,其它为对称向量,不妨令 $\boldsymbol{X}$ 为反对称向量,$\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z}$ 为对称向量,则有

$$\begin{cases}(\boldsymbol{A}_m-\boldsymbol{BS}_m)\boldsymbol{X}_1=\boldsymbol{U}_1,\\ (\boldsymbol{A}_m+\boldsymbol{BS}_m)\boldsymbol{Y}_1=\boldsymbol{V}_1,\\ (\boldsymbol{A}_m+\boldsymbol{BS}_m)\boldsymbol{Z}_1=\boldsymbol{W}_1.\end{cases}$$

同理可得方程组存在唯一解的充要条件.定理2得证.

定理3　设在问题Ⅱ中 $n=2m+1$,$\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z}\in R^{2m+1}$ 为对称向量或反对称向量,$\boldsymbol{U},\boldsymbol{V},\boldsymbol{W}\in R^{2m+1}$ 为其对应的对称向量或反对称向量,则问题Ⅱ存在唯一解的充要条件是:

1) $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z}$ 中有两个对称向量及一个反对称向量(不妨设 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$ 为对称向量,$\boldsymbol{Z}$ 为反对称向

量),$\boldsymbol{U},\boldsymbol{V},\boldsymbol{W}$ 为其对应的对称向量或反对称向量;

2) $D_i \neq 0\ (i = 1,2,\cdots,m-2)$;

3) $x_{m+1}(y_{m-1}z_m - y_m z_{m-1}) \neq y_{m+1}(x_{m-1}z_m - x_m z_{m-1}),\ z_m(x_m y_{m+1} - x_{m+1}y_m) \neq 0$;

4) $\operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix} x_{m+1} \\ y_{m+1} \end{bmatrix}\right) = \operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix} x_{m+1} \\ y_{m+1} \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} u_{m+1} \\ v_{m+1} \end{bmatrix} - 2b_m\begin{bmatrix} x_m \\ y_m \end{bmatrix} - 2c_{m-1}\begin{bmatrix} x_{m-1} \\ y_{m-1} \end{bmatrix}\right) = 1$.

证明 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以表示为

$$\boldsymbol{A}_s = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_m & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} & a_{m+1} & \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_m \\ \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{S}_m\boldsymbol{B} & \boldsymbol{S}_m\boldsymbol{A}_m\boldsymbol{S}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_m & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} & a_{m+1} & \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_m \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{S}_m\boldsymbol{B} & \boldsymbol{S}_m\boldsymbol{A}_m\boldsymbol{S}_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{0} & 0 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix},$$

其中

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ c_{m-1} \\ b_m \end{bmatrix},\ \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_m & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

记

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1 \\ x_{m+1} \\ \boldsymbol{X}_2 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Y}_1 \\ y_{m+1} \\ \boldsymbol{Y}_2 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{Z} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Z}_1 \\ z_{m+1} \\ \boldsymbol{Z}_2 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{U}_1 \\ u_{m+1} \\ \boldsymbol{U}_2 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{V}_1 \\ v_{m+1} \\ \boldsymbol{V}_2 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{W}_1 \\ w_{m+1} \\ \boldsymbol{W}_2 \end{bmatrix},$$

$\boldsymbol{X}_i,\boldsymbol{Y}_i,\boldsymbol{Z}_i \in R^m,\ \boldsymbol{U}_i,\boldsymbol{V}_i,\boldsymbol{W}_i \in R^m,\ i = 1,2$.

$$\boldsymbol{P} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_m \\ \boldsymbol{0} & \sqrt{2} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{S}_m & \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{S}_m \end{bmatrix},$$

类似定理 2 的证明过程,可得定理 3 的结论.

定理 4 问题Ⅲ存在唯一解的充要条件是

1) $D_i \neq 0$,且 D_i 与 $d_i^{(1)},d_i^{(3)}$ 同号,与 $d_i^{(2)}$ 异号($i = 1,2,\cdots,n-2$);

2) $\operatorname{rank}(\boldsymbol{B}_{n-1}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{B}_{n-1},\ \tilde{\boldsymbol{f}}_{n-1} - b_{n-2}\boldsymbol{e}_{n-2} - c_{n-1}\boldsymbol{e}_{n-3}) = 2$, 且

$(\boldsymbol{e}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_n\boldsymbol{e}_{n-1}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{e}_{n-1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_n\boldsymbol{e}_n^{\mathrm{T}})(\tilde{\boldsymbol{f}}_{n-1} - b_{n-2}\boldsymbol{e}_{n-2} - c_{n-3}\boldsymbol{e}_{n-3}) > 0$,

$(\boldsymbol{e}_{n-1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_{n-1}\boldsymbol{e}_n^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{e}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_{n-1}\boldsymbol{e}_{n-1}^{\mathrm{T}})(\tilde{\boldsymbol{f}}_{n-1} - b_{n-2}\boldsymbol{e}_{n-2} - c_{n-3}\boldsymbol{e}_{n-3}) < 0$;

3) $\operatorname{rank}(\boldsymbol{e}_n) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{e}_n,\ \tilde{\boldsymbol{f}}_n - b_{n-1}\boldsymbol{e}_{n-1} - c_{n-2}\boldsymbol{e}_{n-2}) = 1,\boldsymbol{e}_n^{\mathrm{T}}(\tilde{\boldsymbol{f}}_n - b_{n-1}\boldsymbol{e}_{n-1} - c_{n-2}\boldsymbol{e}_{n-2}) > 0$.

进而有

$$\lambda > b_{n-1}\frac{x_{n-1}}{x_n} + c_{n-2}\frac{x_{n-2}}{x_n} \quad (x_n \neq 0),\ \mu > b_{n-1}\frac{y_{n-1}}{y_n} + c_{n-2}\frac{y_{n-2}}{y_n} \quad (y_n \neq 0),$$

$$\gamma > b_{n-1}\frac{z_{n-1}}{z_n} + c_{n-2}\frac{z_{n-2}}{z_n} \quad (z_n \neq 0).$$

证明 由定理 1 知,当 $\boldsymbol{U} = \lambda\boldsymbol{X},\boldsymbol{V} = \mu\boldsymbol{Y},\boldsymbol{W} = \gamma\boldsymbol{Z}$ 时,存在唯一的实对称五对角矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的充要条件是

$$D_i \neq 0;\ \operatorname{rank}(\boldsymbol{B}_{n-1}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{B}_{n-1},\ \tilde{\boldsymbol{f}}_{n-1} - b_{n-2}\boldsymbol{e}_{n-2} - c_{n-1}\boldsymbol{e}_{n-3}) = 2;$$

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{e}_n)=\operatorname{rank}(\boldsymbol{e}_n,\ \tilde{\boldsymbol{f}}_n-b_{n-1}\boldsymbol{e}_{n-1}-c_{n-2}\boldsymbol{e}_{n-2})=1.$$

并且通过对方程组(1)~(3)的计算,可得

$$a_i=d_i^{(1)}/D_i,\ b_i=d_i^{(2)}/D_i,\ c_i=d_i^{(3)}/D_i \qquad (i=1,2,\cdots,n-2),$$

$$a_{n-1}=\frac{1}{\Delta}(\boldsymbol{e}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_n\boldsymbol{e}_{n-1}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{e}_{n-1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_n\boldsymbol{e}_n^{\mathrm{T}})(\tilde{\boldsymbol{f}}_{n-1}-b_{n-2}\boldsymbol{e}_{n-2}-c_{n-3}\boldsymbol{e}_{n-3}),$$

$$b_{n-1}=\frac{1}{\Delta}(\boldsymbol{e}_{n-1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_{n-1}\boldsymbol{e}_n^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{e}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_{n-1}\boldsymbol{e}_{n-1}^{\mathrm{T}})(\tilde{\boldsymbol{f}}_{n-1}-b_{n-2}\boldsymbol{e}_{n-2}-c_{n-3}\boldsymbol{e}_{n-3}),$$

其中 $\Delta=(\boldsymbol{e}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_n)(\boldsymbol{e}_{n-1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_{n-1})-(\boldsymbol{e}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_{n-1})^2$,由 Cauchy(柯西)不等式知,当 $\boldsymbol{e}_n$ 与 $\boldsymbol{e}_{n-1}$ 线性无关(即 $\boldsymbol{B}_{n-1}$ 的秩为 2)时,$\Delta>0$.

$$a_n=\frac{1}{|\boldsymbol{e}_n|_2^2}\boldsymbol{e}_n^{\mathrm{T}}(\tilde{\boldsymbol{f}}_n-b_{n-1}\boldsymbol{e}_{n-1}-c_{n-2}\boldsymbol{e}_{n-2}).$$

亦可通过以下公式计算:

$$a_n=\lambda-b_{n-1}\frac{x_{n-1}}{x_n}-c_{n-2}\frac{x_{n-2}}{x_n} \qquad (x_n\neq 0),$$

$$a_n=\mu-b_{n-1}\frac{y_{n-1}}{y_n}-c_{n-2}\frac{y_{n-2}}{y_n} \qquad (y_n\neq 0),$$

$$a_n=\gamma-b_{n-1}\frac{z_{n-1}}{z_n}-c_{n-2}\frac{z_{n-2}}{z_n} \qquad (z_n\neq 0).$$

由此便得到定理 4 的条件.

2 数值算例

算例 1 给出向量

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}0.957\ 2\\0.485\ 4\\0.800\ 3\\0.141\ 9\\0.421\ 8\end{pmatrix},\ \boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}0.915\ 7\\0.792\ 2\\0.959\ 5\\0.655\ 7\\0.035\ 7\end{pmatrix},\ \boldsymbol{Z}=\begin{pmatrix}0.849\ 1\\0.934\ 0\\0.678\ 7\\0.757\ 7\\0.743\ 1\end{pmatrix}$$

及

$$\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix}0.917\ 3\\-1.136\ 7\\1.272\ 7\\1.989\ 5\\1.551\ 2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{V}=\begin{pmatrix}0.635\ 9\\-0.792\ 6\\0.921\ 3\\1.180\ 3\\3.300\ 4\end{pmatrix},\ \boldsymbol{W}=\begin{pmatrix}0.125\ 3\\-0.439\ 3\\1.481\ 4\\3.731\ 1\\3.840\ 2\end{pmatrix}.$$

由定理 1 可验证向量对满足问题 I 有唯一解的充要条件,并应用 MATLAB 程序,利用式(1)~(3),求得 5 阶对称五对角矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0.814\ 7&-1.307\ 7&0.964\ 9&&\\-1.307\ 7&0.905\ 8&-0.433\ 6&0.157\ 6&\\0.964\ 9&-0.433\ 6&0.127\ 0&0.342\ 6&0.970\ 6\\&0.157\ 6&0.342\ 6&0.913\ 4&3.578\ 4\\&&0.970\ 6&3.578\ 4&0.632\ 4\end{pmatrix}.$$

算例 2 给出对称向量及反对称向量

$$X=\begin{pmatrix}0.7911\\1.4034\\0.6987\\0.6987\\1.4034\\0.7911\end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix}0.5028\\0.6907\\1.1055\\1.1055\\0.6907\\0.5028\end{pmatrix},\ Z=\begin{pmatrix}0.1514\\-0.4852\\-0.0351\\0.0351\\0.4852\\-0.1514\end{pmatrix}$$

及

$$U=\begin{pmatrix}3.5760\\2.6609\\2.8940\\2.8940\\2.6609\\3.5760\end{pmatrix},\ V=\begin{pmatrix}2.7289\\1.5842\\3.5106\\3.5106\\1.5842\\2.7289\end{pmatrix},\ W=\begin{pmatrix}-0.5141\\-0.3066\\0.2219\\-0.2219\\0.3066\\0.5141\end{pmatrix}.$$

由定理 2 可验证向量对满足问题Ⅱ有唯一解的充要条件,并利用方程组(7)~(9),求得 6 阶双对称五对角矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1.1658&1.3440&1.0986&&&\\1.3440&1.0586&0.0306&0.1298&&\\1.0986&0.0306&1.1825&1.3932&0.1298&\\&0.1298&1.3932&1.1825&0.0306&1.0986\\&&0.1298&0.0306&1.0586&1.3440\\&&&1.0986&1.3440&1.1658\end{pmatrix}.$$

算例 3 给出梁振动系统的 n 个无质量刚杆的长度 $l_i=1$ 和 n 个转动弹簧的刚度 $k_i=2, i=1,2,\cdots,n$,得到系统的 n 阶对称五对角刚度矩阵 $\boldsymbol{C}_0$,其中 $a_1=a_2=\cdots=a_{n-2}=12, a_{n-1}=10, a_n=2; b_1=b_2=\cdots=b_{n-2}=-8, b_{n-1}=-4; c_1=c_2=\cdots=c_{n-2}=2$.

针对 $n=100,200,400,600,800,1\,000$ 时,取频率 $\lambda=\lambda_{11}(\boldsymbol{C}_0)$, $\mu=\lambda_{44}(\boldsymbol{C}_0)$, $\gamma=\lambda_{77}(\boldsymbol{C}_0)$ ($\lambda_i(\boldsymbol{C}_0)$ 表示矩阵 $\boldsymbol{C}_0$ 的第 i 个频率)及相应的模态 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z}$,由定理 4 可验证特征对满足问题Ⅲ有唯一解的充要条件.由定理 4 的证明过程,可求得梁振动系统的刚度矩阵 $\boldsymbol{C}$.

为检验算法的稳定性,给频率数据添加扰动($10^{-4}\varepsilon$, ε 为区间(0,1)内均匀分布的随机数),当 $n=100,200,400,600,800,1\,000$ 时,计算得到梁振动系统的刚度矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的相对误差($\|\boldsymbol{C}-\boldsymbol{C}_0\|_F/\|\boldsymbol{C}_0\|_F$),见表 1.

表 1 有扰动的情况下不同阶数刚度矩阵的相对误差

Table 1 Relative errors of stiffness matrices with different orders under perturbation

n	100	200	400	600	800	1 000
relative error $\|\boldsymbol{C}-\boldsymbol{C}_0\|_F/\|\boldsymbol{C}_0\|_F$	1.875 3E-5	9.828 0E-6	1.148 1E-4	1.361 2E-4	1.345 4E-4	1.206 3E-4

应用定理 4,利用 3 个特征对,构造 n 阶对称五对角刚度矩阵 $\boldsymbol{C}$,需要求解 n 个三元线性方程组.应用 Cramer(克莱姆)法则求解,运算量为 $68n$ FLOPS;应用 Gauss(高斯)消去法,运算量为 $17n$ FLOPS.当方程组的系数矩阵和常数项存在误差时,方程组解的误差取决于系数矩阵的条件数;为降低系数矩阵的条件数可对系数矩阵进行预处理.在实际应用中,选取适当的模态

数据,以保证方程组的系数矩阵的条件数不致过大.

通过建立非线性优化模型,应用 Lingo 程序,可求得无质量刚杆的长度和转动弹簧的刚度.

1）以长度 $\{l_i\}_1^n$、刚度 $\{k_i\}_1^n$ 尽量均衡为目标,建立优化模型,求 n 个无质量刚杆的长度和 n 个转动弹簧的刚度.

2）给出测量(或设计)的 n 个无质量刚杆的长度 $\{\tilde{l}_i\}_1^n$ 和 n 个转动弹簧的刚度 $\{\tilde{k}_i\}_1^n$,求长度 $\{l_i\}_1^n$ 和刚度 $\{k_i\}_1^n$ 的最佳逼近解.目标函数为

$$\min z = \sum_{i=1}^{n}(k_i - \tilde{k}_i)^2 + \sum_{i=1}^{n}(l_i - \tilde{l}_i)^2.$$

3 结 论

本文通过定理 1 首先给出利用 3 个向量对构造实对称五对角矩阵,给出解唯一的充要条件及解的表示形式;对于双对称五对角矩阵,分自由度 n 为偶数和奇数两种情况进行了讨论,利用双对称矩阵的特殊结构和定理 1 的结论,通过定理 2、定理 3 给出解存在唯一的充要条件;针对梁振动系统的刚度矩阵(实对称五对角)的特点:主对角元大于 0,次对角元小于 0,次次对角元大于 0,利用 3 个特征对通过定理 4 给出问题Ⅲ有解的条件及求解方法.通过数值算例验证结论的有效性,利用优化建模方法通过刚度矩阵,求解系统的 n 个无质量刚杆的长度和 n 个转动弹簧的刚度.所得结论在系统结构的分析与设计、预测与控制方面有一定的应用价值.

参考文献(References):

[1] Gladwall G M L. *Inverse Problems in Vibration*[M]. Martinus Nijhoff Publishers, 1986.

[2] 田霞, 戴华. 梁的离散模型的模态反问题[J]. 振动与冲击, 2005, **24**(6): 29-31, 135.(TIAN Xia, DAI Hua. Inverse mode problems for the discrete model of beam[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2005, **24**(6): 29-31, 135.(in Chinese))

[3] 周硕, 王霖, 韩明花. 约束矩阵方程的中心对称解及其在振动理论反问题中的应用[J]. 应用数学和力学, 2013, **34**(3): 306-317.(ZHOU Shuo, WANG Lin, HAN Ming-hua. Centrosymmetric solutions of constrained matrix equation and its application to inverse problem of vibration theory[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2013, **34**(3): 306-317.(in Chinese))

[4] 常晓通, 闫云聚, 刘鎏. Landweber 迭代正则化方法在动态载荷识别中的应用[J]. 应用数学和力学, 2013, **34**(9): 948-955.(CHANG Xiao-tong, YAN Yun-ju, LIU Liu. Applications of Landweber interation regularization method in dynamic load identification[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2013, **34**(9): 948-955.(in Chinese))

[5] 周硕, 韩明花, 孟欢欢. 用试验数据修正振动系统的双对称阻尼矩阵与刚度矩阵[J]. 应用数学和力学, 2014, **35**(6): 697-711.(ZHOU Shuo, HAN Ming-hua, MENG Huan-huan. Bisymmetric damping and stiffness matrices calibration with test data of vibration systems[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, **35**(6): 697-711.(in Chinese))

[6] 戴华. Jacobi 矩阵和对称三对角矩阵特征值反问题[J]. 高等学校计算数学学报, 1990, **12**(1): 1-13.(DAI Hua. Inverse eigenvalue problems for Jacobian and symmetric tridiagonal matrices[J]. *Numerical Mathematics—A Journal of Chinese Universities*, 1990, **12**(1): 1-13.(in Chinese))

[7] 王正盛. 实对称五对角矩阵逆特征值问题[J]. 高等学校计算数学学报, 2002, **24**(4): 366-376.(WANG Zheng-sheng. Inverse eigenvalue problem for real symmetric five-diagonal matrix[J]. *Numerical Mathematics—A Journal of Chinese Universities*, 2002, **24**(4): 366-376.(in Chi-

nese))

[8] 田霞, 张方春. 全对称五对角阵的一类特征值反问题[J]. 山东大学学报(工学版), 2002, **32**(6): 529-532, 585.(TIAN Xia, ZHANG Fang-chun. A kind of inverse eigenvalue problems for bi-symmetric pentadiagonal matrices[J]. *Journal of Shandong University*(*Engineering Science*), 2002, **32**(6): 529-532, 585.(in Chinese))

[9] 林秀丽, 卢琳璋. 双对称五对角矩阵逆特征问题[J]. 厦门大学学报(自然科学版), 2004, **43**(3): 288-292.(LIN Xiu-li, LU Lin-zhang. Inverse eigenvalue problem for doubly symmetric five-diagonal matrix[J]. *Journal of Xiamen University*(*Natural Science*), 2004, **43**(3): 288-292.(in Chinese))

[10] 王正盛. 实对称带状矩阵逆特征值问题[J]. 高校应用数学学报 A 辑, 2004, **19**(4): 451-459.(WANG Zheng-sheng. Inverse eigenvalue problems for real symmetric banded matrix[J]. *Applied Mathematics—A Journal of Chinese Universities*(*Series A*), 2004, **19**(4): 451-459.(in Chinese))

[11] 易福侠, 王金林, 孟旭东, 周宁. 由三个特殊次序向量对构造三对角对称矩阵[J]. 数学的实践与认识, 2011, **41**(19): 185-191.(YI Fu-xia, WANG Jin-lin, MENG Xu-dong, ZHOU Ning. On the construction of tridiagonal symmetric matrices from three special ordered vector pairs[J]. *Mathematics in Practice and Theory*, 2011, **41**(19): 185-191.(in Chinese))

[12] 李承宽, 王金林. Jacobi 矩阵的一类广义特征值反问题[J]. 南昌航空大学学报, 2010, **24**(1): 64-68.(LI Cheng-kuan, WANG Jin-lin. An inverse problem of generalized eigenvalue for Jacobi matrix[J]. *Journal of Nanchang Hangkong University*, 2010, **24**(1): 64-68.(in Chinese))

[13] 钱爱林, 吴又胜. 五对角矩阵的特征值反问题[J]. 数值计算与计算机应用, 2005, **26**(2): 111-116.(QIAN Ai-lin, WU You-sheng. Inverse eigenvalue problem for real symmetric five-diagonal matrix[J]. *Journal of Numerical Methods and Computer Applications*, 2005, **26**(2): 111-116.(in Chinese))

[14] 周硕. 缺损特征对的梁振动反问题[J]. 吉林大学学报(理学版), 2008, **46**(4): 655-657.(ZHOU Shuo. Inverse problem for the vibrating beam from its defective eigen-pair[J]. *Journal of Jilin University*(*Science Edition*), 2008, **46**(4): 655-657.(in Chinese))

[15] 马陆陆, 黄敬频. 由两个右特征对构造三对角四元数矩阵[J]. 数学的实践与认识, 2012, **42**(12): 209-214.(MA Lu-lu, HUANG Jing-pin. On the construction of tridiagonal quaternion matrices from two right eigenpairs[J]. *Mathematics in Practice and Theory*, 2012, **42**(12): 209-214.(in Chinese))

[16] 陈景良, 陈向晖. 特殊矩阵[M]. 北京: 清华大学出版社, 2001.(CHEN Jing-liang, CHEN Xiang-hun. *Special Matrices*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2001.(in Chinese))

[17] 谢冬秀, 张磊, 胡锡炎. 一类双对称矩阵反问题的最小二乘解[J]. 计算数学, 2000, **22**(1): 29-40.(XIE Dong-xiu, ZHANG Lei, HU Xi-yan. Least-square solutions of inverse problems for bi-symmetric matrices[J]. *Mathematica Numerica Sinica*, 2000, **22**(1): 29-40.(in Chinese))

On the Construction of Stiffness Matrices With 3 Vector Pairs for Beam Vibration Systems

ZHOU Shuo, LÜ Xiao-huan, WANG Xiao-xue
(*College of Science*, *Northeast Dianli University*, *Jilin*, *Jilin* 132012, *P.R.China*)

Abstract: The stiffness matrix of the discrete vibrating beam model is a real symmetric 5-diagonal matrix, so the inverse problem of the vibrating beam is substantially an inverse eigenvalue problem of the real symmetric 5-diagonal matrix. The existence and uniqueness conditions for the solution to the inverse problem of the real symmetric 5-diagonal matrix vector pair were given by means of the vector pairs and the Moore-Penrose generalized inverse, and the existence and uniqueness conditions for the solution to the inverse problem of the bi-symmetric 5-diagonal matrix vector pair were discussed in combination with the partitioned matrices. Then the inverse eigenvalue problem of the real symmetric 5-diagonal matrix, of which the sub-diagonal elements were negative and the rest elements were positive, was calculated. Since the data required for the construction of discrete beam models are available through measurements, the presented method is well suited to modal analysis, or analysis and design of system structures. Furthermore, the related numerical algorithms and numerical experiments illustrate the effectiveness of the method.

Key words: beam vibration system; bi-symmetric 5-diagonal matrix; vector pair; inverse problem; stiffness matrix

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11072085)