

# 用统一分析梁与有限节线法分析 弹性薄壁截面构件\*

龚耀清, 孙博, 陈晓东

(河南理工大学 土木工程学院, 河南 焦作 454003)

**摘要:** 传统薄壁截面梁理论不仅与梁的长细比有关,还强烈地依赖于其横截面的形状和荷载的作用方式.为了解决任意长细比、任意形状弹性薄壁截面杆状类结构构件或结构体系受任意荷载作用的力学分析问题,提出了一种新的梁模型——统一分析梁,一种结构数值分析新方法——有限节线法.利用统一分析梁模型和有限节线法不仅可以分析任意弹性薄壁杆状类结构构件的力学行为,而且当问题的性质与传统梁理论的前提条件一致时,会得出同样精度的解答.算例计算结果证明了统一分析梁的合理性与有限节线法的正确性.

**关键词:** 薄壁截面梁; 传统梁理论; 统一分析梁; 有限节线法; 非均匀扭转

**中图分类号:** O341; TB301      **文献标志码:** A

**doi:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2015.04.002

## 引 言

传统薄壁截面梁理论不仅与梁的长细比有关,还强烈地依赖于其横截面的形状和荷载的作用方式.当一个梁的长细比超过 10 且具有开口或闭口薄壁横截面时,可利用 Schardt 等<sup>[1-3]</sup>给出的基于 Vlasov<sup>[4]</sup>梁理论导出的方法分析其横向荷载作用下的力学行为.当一个构件的长细比符合 Euler-Bernoulli<sup>[5]</sup>或 Timoshenko<sup>[6]</sup>梁理论的条件,且它的横截面不是圆截面,可利用 Saint-Venant<sup>[7-8]</sup>梁理论解决其自由扭转(均匀扭转)的问题;在 Schardt 建立的广义梁理论<sup>[1-3]</sup>的基础上,利用与薄壁截面形状相同的杆系结构的振型和一个未知的幅值函数,也可研究薄壁截面梁的屈曲问题<sup>[7-8]</sup>.在 Euler-Bernoulli 梁理论框架下,将现代桥梁中箱梁横截面的面外翘曲假设为二次抛物面,仍然可研究其横截面的剪力滞问题<sup>[9]</sup>.

然而,随着新材料与新结构的出现,工程中出现了许多不能用现有梁理论分析其力学行为的薄壁杆状类结构构件.例如,用生态木制成的建筑结构构件(图 1(a))、用铝型材制成的工程结构构件(图 1(b))、用复合材料或功能梯度材料制成的结构构件,等等.再例如,不能用现有梁理论分析其力学行为的结构体系也比皆是,某些斜拉桥主跨结构的横截面(图 1(c))和某些高层建筑的横截面(图 1(d)),它们的横截面形状更复杂,而且斜拉桥由于其拉索的作用,几乎全跨都有弹性支撑,并不是普通意义下的梁;高层建筑看上去很高,但其高度方向的尺

\* 收稿日期: 2014-11-17; 修订日期: 2014-11-21

基金项目: 国家自然科学基金(51178164); 河南省重点学科资助项目(62705/004)

作者简介: 龚耀清(1956—),男,宁夏人,教授,博士(通讯作者. E-mail: gongyq@hpu.edu.cn).

寸与横向尺寸的比值实际上很小,基本上不超过 3.0.

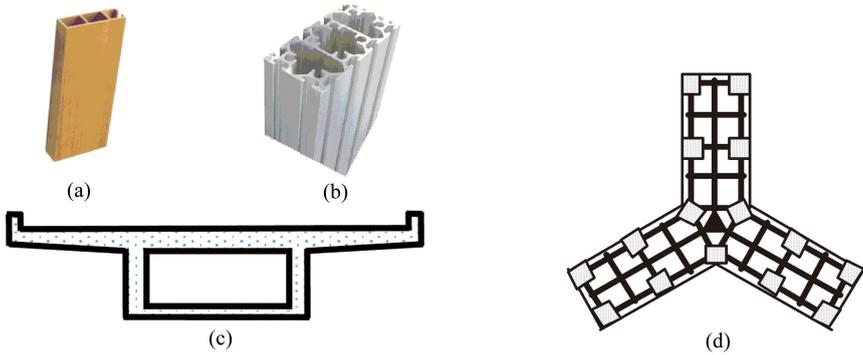


图 1 构件或结构横截面示意图

Fig. 1 Cross sections for members or structural systems

这些结构构件或结构体系有 4 个方面的共同特征:1) 横截面的形状都比较复杂;2) 长度方向的尺寸与横向尺寸的比值较小(例如,小于 3.0);3) 所受的荷载型式都比较复杂;4) 现有梁理论都无法解决它们的力学分析问题.

为了解决任意短粗薄壁杆状类结构构件或结构体系处于弹性阶段的力学分析问题,本文为它们建立了一种新的分析模型——统一分析梁(unified analytical beam, UAB),并提出了分析统一分析梁力学问题的有限节线法(finite nodal line method, FNLM).文中给出了两个薄壁梁算例,第一个算例比较了传统梁解与统一分析梁解的一致性;第二个算例给出了一个长细比为 1.5 的复合截面薄壁梁在横向荷载和集中扭矩作用下的部分位移和应力情况.算例结果证明:利用统一分析梁和有限节线法不仅可以分析任意杆状类结构构件处于弹性阶段的力学行为,而且当问题的性质与传统梁理论的前提条件一致时,会得出同样精度的解答.

## 1 统一分析梁

### 1.1 统一分析梁的定义

能用横截面及其轴线确定其变形前的几何形状与尺寸的工程结构构件或结构系统称为统一分析梁;对均质材料统一分析梁,其轴线与横截面的几何中心连线一致,对于非均质材料统一分析梁,其轴线定义为横截面弹性模量中心的连线;统一分析梁的轴线长度不小于其横截面的最大尺寸.当梁材料为非均匀材料时,其弹性模量中心的位置可用下式确定.

$$r_c = \frac{\int_{\Omega} G(y, z) r dA}{\int_{\Omega} G(y, z) dA}, \text{ or } r_c = \frac{\int_{\Omega} E(y, z) r dA}{\int_{\Omega} E(y, z) dA}, \quad (1)$$

其中,  $G(y, z)$  和  $E(y, z)$  分别为梁材料的剪切和拉压弹性模量,  $\Omega$  为统一分析梁横截面所占区域,  $r$  为横截面上任意一微面积  $dA$  到参考点的距离,  $r_c$  为弹性模量中心到参考点的距离.

### 1.2 统一分析梁的位移场(或运动场)

统一分析梁受静力(或动力)作用变形后,其在弹性阶段内的每一个横截面将变为一个空间曲面(平面只是曲面的一种特例),梁的轴线(横截面弹性模量中心的连线)将变为一条空间曲线,这一空间曲线的点集与所有横截面变形后的空间曲面构成的曲面集合,定义为整个统一

分析梁的位移场(或运动场)。

### 1.3 定量确定统一分析梁位移场(或运动场)的思想方法

定量确定统一分析梁的位移场(或运动场)可有多种方法,但这些方法的基本思路应该是:首先要采取恰当的数学手段对梁的位移场(或运动场)进行合理的定量描述;然后根据统一分析梁所受的应力状态与问题的性质并利用相应的力学原理建立问题的控制方程(或方程组);再用可行并满足精度要求的数学方法求出该方程(或方程组)的解。

例如,如果用有限节线法定量确定统一分析梁的位移场(或运动场)的话,可用有限个表示节线纵向位移的未知函数来描述统一分析梁的纵向位移,用表示轴线(横截面弹性模量中心连线)横向位移的未知函数来描述统一分析梁的横向位移,然后根据统一分析梁所受的应力状态与问题的性质并利用相应的力学原理建立问题的控制方程(或方程组)。对于统一分析梁的静力计算问题、强迫振动的响应计算问题,其控制方程为常微分方程组,对于统一分析梁的自由振动、稳定性计算问题,其控制方程为常微分方程组的特征值问题,而这两类常微分方程组可分别运用高质高效的常微分方程求解器(ordinary differential equation (ODE) solver)<sup>[10-11]</sup>和常微分方程组特征根求解器(EIGENCOL)<sup>[12]</sup>进行求解,得其数值解。

## 2 有限节线法

不失一般性,用求解如图 2 所示 Z 形截面统一分析梁位移场的过程来解释有限节线法的思想。

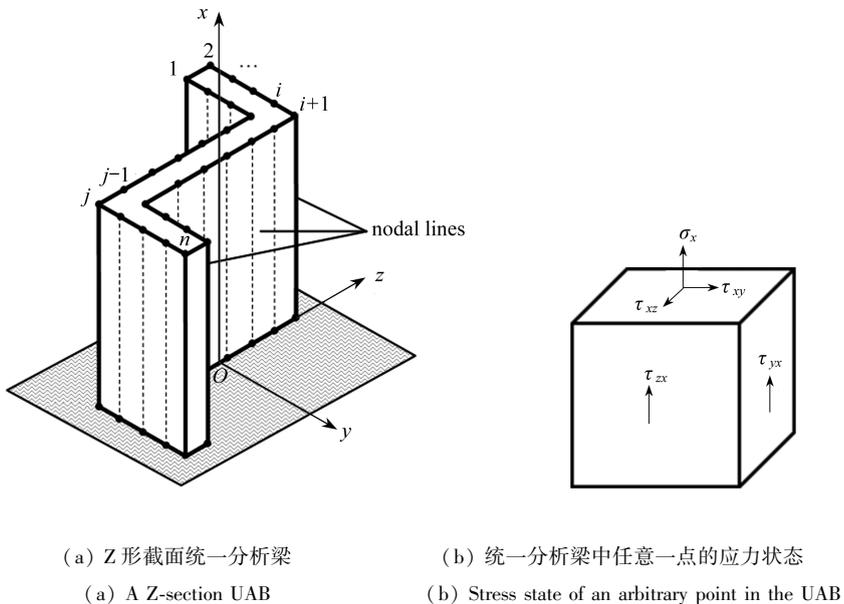


图 2 Z 形截面悬臂梁及其应力状态

Fig. 2 A Z-section cantilever UAB and its stress state

实际上,构件的位移场由两部分组成,第一部分是纵向(或轴向)位移,由于短粗杆状类结构构件的横截面受荷载作用变形后的形状基本上都是曲面,所以这无穷多个曲面就构成了这个构件的纵向位移;第二部分是横向位移,只要结构构件在荷载的作用下能正常工作,其横截面上各个点在其面内的相对位移与其纵向位移相比是更高阶的小量,可以忽略不计。因此,可

以认为梁横截面上各点的横向位移与横截面形心(弹性模量中心)处的横向位移相同.于是,可用构件轴线上的各点在垂直于轴线(或弹性模量中心连线)方向的线位移,以及横截面绕轴线的扭转角,来描述整个构件的横向位移,整个构件的横向位移和纵向位移一起就构成了该构件的位移场.

如果再从统一分析梁中选取有限条平行于其纵向边界的纵向节线(nodal lines),并用代表节线纵向位移的未知函数( $w_i(x), i = 1, 2, \dots, n$ )为基本未知函数,在节线之间构造插值函数( $\varphi_i(y_i, z_i), i = 1, 2, \dots, n$ ),则统一分析梁的纵向位移就可表示为

$$u(x, y, z) = \sum w_i(x) \varphi_i(y_i, z_i) = \Phi^T(y_i, z_i) \mathbf{W}(x), \quad (2)$$

其中

$$\mathbf{W}(x) = \begin{Bmatrix} w_1(x) \\ w_2(x) \\ \vdots \\ w_n(x) \end{Bmatrix}, \quad \Phi(y, z) = \begin{Bmatrix} \varphi_1(y_1, z_1) \\ \varphi_2(y_2, z_2) \\ \vdots \\ \varphi_n(y_n, z_n) \end{Bmatrix} \quad (3)$$

分别为纵向位移未知函数列阵与插值函数列阵, $w_i(x)$ 的定义域为统一分析梁轴线(或弹性模量中心连线)上的点集,而 $\varphi_i(y_i, z_i)$ 的定义域为*i*及其邻近(nearest neighbors)节线与横截面的交点连线(或节点连线)所围成的区域(连线必须与坐标轴*y*或*z*平行);当*i*节点在横截面的边界上时, $\varphi_i(y_i, z_i)$ 的定义域为*i*及其邻近节点连线与截面边界所围成的区域.

同理,如果选取能代表构件轴线在*y*方向,*z*方向,绕轴线*x*转动方向的位移未知函数 $v_{0y}(x), v_{0z}(x), \theta(x)$ 为基本未知函数的话,则构件的横向位移可表示为如下的未知函数列阵:

$$\mathbf{V}(x) = \begin{Bmatrix} v_{0y}(x) \\ v_{0z}(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix}. \quad (4)$$

这3个函数的定义域为统一分析梁轴线(或弹性模量中心连线)上的点集.

于是,统一分析梁中任意一点( $x, y, z$ )在*x, y, z*方向的位移分别为

$$u(x, y, z) = \Phi^T(y, z) \mathbf{W}(x), \quad v_y(x, z) = v_{0y}(x) - z\theta(x), \quad v_z(x, y) = v_{0z}(x) + y\theta(x).$$

数学上不难证明,随着节线数量的增加(即*n*的增大), $u(x, y, z)$ 会趋于梁的真实纵向位移场.

对于变截面杆件,当梁的横截面沿其长度方向分段变化时,可将 $\mathbf{W}(x)$ 和 $\mathbf{V}(x)$ 中的未知函数写成分段函数;当梁的横截面沿其长度方向连续变化时,纵向节线是与其纵向边界平行的空间曲线.

如果让图2(a)所示统一分析梁在顶端承受两个方向的集中荷载 $P_y, P_z$ ,以及绕轴线从*y*到*z*转动方向的集中扭矩 $P_\theta$ 作用的话,此问题就变成了一受静力荷载作用的空间悬臂梁,梁中任意一点的应力状态如图2(b)所示.再假设梁材料为均质材料,它在此组荷载作用下的位移场与其原始尺寸相比又非常小,则整个梁的弹性势能为

$$\Pi = \int_0^L dx \iint_{\Omega} \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dy dz, \quad (5)$$

其中, $\Omega$ 为横截面在*yOz*平面上的投影形成的定义域,*L*表示梁的长度,

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v_y(x, z)}{\partial x} + \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial y}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial z} + \frac{\partial v_z(x, y)}{\partial x}.$$

非保守力所做的功为

$$W_{nc} = P_y v_{0y}(L) + P_z v_{0z}(L) + P_\theta \theta(L). \quad (6)$$

利用弹性力学中的小变形理论与最小势能原理  $\delta(\Pi - W_{nc}) = 0$ , 可导出其控制方程如下:

$$\begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{W}''(x) - \mathbf{B}\mathbf{W}(x) - \mathbf{C}\mathbf{V}'(x) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{D}\mathbf{V}''(x) + \mathbf{C}^T\mathbf{W}'(x) = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (7)$$

与式(7)相应的边界条件为

$$x = 0, \begin{cases} \mathbf{W}(0) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{V}(0) = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (8)$$

$$x = L, \begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{W}'(L) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{D}\mathbf{V}'(L) + \mathbf{C}^T\mathbf{W}(L) - \mathbf{P} = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (9)$$

其中,  $\mathbf{0}$  为零向量(列阵), 下列积分中  $E, G$  分别表示梁材料的拉压弹性模量和剪切模量.

$$\mathbf{A} = \iint_{\Omega} E\boldsymbol{\Phi}(y, z)\boldsymbol{\Phi}^T(y, z) dydz,$$

$$\mathbf{B} = \iint_{\Omega} G \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}(y, z)}{\partial y} \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}^T(y, z)}{\partial y} dydz + \iint_{\Omega} G \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}(y, z)}{\partial z} \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}^T(y, z)}{\partial z} dydz,$$

$$\mathbf{C} = \iint_{\Omega} G \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}(y, z)}{\partial y} \mathbf{T}_1 dydz + \iint_{\Omega} G \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}(y, z)}{\partial z} \mathbf{T}_2 dydz + \iint_{\Omega} G \left( y \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}(y, z)}{\partial z} - z \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}(y, z)}{\partial y} \right) \mathbf{T}_3 dydz,$$

$$\mathbf{T}_1 = [1, 0, 0], \mathbf{T}_2 = [0, 1, 0], \mathbf{T}_3 = [0, 0, 1],$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \iint_{\Omega} G dydz & 0 & -\iint_{\Omega} Gz dydz \\ 0 & \iint_{\Omega} G dydz & \iint_{\Omega} Gy dydz \\ -\iint_{\Omega} Gz dydz & \iint_{\Omega} Gy dydz & \iint_{\Omega} G(y^2 + z^2) dydz \end{bmatrix}, \mathbf{P} = \begin{Bmatrix} P_y \\ P_z \\ P_\theta \end{Bmatrix}.$$

方程(7)、(8)、(9)构成了常微分方程组的边值问题, 可用高质高效的常微分方程求解器(ODE solver)<sup>[10-11]</sup>进行求解, 得其数值解.

上述控制方程及边界条件中各项的物理意义:  $\mathbf{A}\mathbf{W}''(x)$ , 由纵向(轴向)变形引起的等效于梁横截面上的纵向拉力或压力增量列阵,  $\mathbf{A}$  为统一分析梁横截面与插值函数列阵  $\boldsymbol{\Phi}(y, z)$  相对应的抗拉压刚度矩阵;  $\mathbf{B}\mathbf{W}(x)$ , 由不均匀纵向变形引起的等效于梁横截面上的纵向拉力或压力增量列阵,  $\mathbf{B}$  为统一分析梁横截面与插值函数列阵  $\boldsymbol{\Phi}(y, z)$  相对应的纵向抗翘刚度矩阵;  $\mathbf{C}\mathbf{V}'(x)$ , 由纵向剪切变形引起的等效于梁横截面上的纵向拉力或压力增量列阵,  $\mathbf{C}$  为统一分析梁横截面与插值函数列阵  $\boldsymbol{\Phi}(y, z)$  相对应的纵向抗剪刚度矩阵;  $\mathbf{D}\mathbf{V}''(x)$ , 由横向剪切变形引起的等效于梁横截面上的横向力增量列阵,  $\mathbf{D}$  为统一分析梁横截面的横向抗剪刚度矩阵;  $\mathbf{C}^T\mathbf{W}'(x)$ , 由纵向变形随截面位置的变化而引起的等效于横截面上的横向力增量列阵,  $\mathbf{C}^T$  为统一分析梁纵向抗剪刚度矩阵  $\mathbf{C}$  的转置矩阵.

需要说明的是, 有限节线法与有限元线法<sup>[13]</sup>是同根同源但完全不同的两种方法. 主要区别有以下 4 个方面: 第 1 个区别是有限节线法的节线与节线之间不构成任何单元, 而有限元线法的节线之间必须构成单元, 每一个单元的边界必须由节线构成. 第 2 个区别是一个力学分析

问题控制方程的建立过程不同,有限节线法在建立一个力学分析问题的控制方程时,只需要计算控制方程的系数矩阵,而有限元线法在建立一个力学分析问题的控制方程时,必须经过从单元分析到整体分析的全过程.第3个区别是节线的选取,有限节线法的节线必须是统一分析梁的轴线(或弹性模量中心线)或与其纵向边界平行的空间曲线,而有限元线法的节线选取不受限制,可以是任意直线,也可以是任意曲线.第4个区别是有限节线法的一条节线上可以定义一个或多个未知函数,而有限元线法的一条节线上只能定义一个未知函数.

### 3 算例与计算结果分析

算例1给出了一个传统梁理论能解决的问题,其目的是要验证传统梁解与统一分析梁解的一致性;算例2给出了一个传统梁理论无法求解的问题,其目的是要展示统一分析梁与有限节线法的能力.

#### 3.1 算例1

图2所示薄壁Z字形截面梁,其材料的弹性模量  $E = 2.06 \times 10^{11}$  Pa,剪切模量  $G = 0.79 \times 10^{11}$  Pa;梁长  $L = 1.0$  m,长细比为10.0;横截面的高度  $h = 0.1$  m,宽度  $b = 0.05$  m,厚度  $t = 0.005$  m;横截面关于  $y$  轴的惯性矩  $I_y = 1.667 \times 10^{-6}$  m<sup>4</sup>,关于  $z$  轴的惯性矩  $I_z = 4.167 \times 10^{-7}$  m<sup>4</sup>,关于  $y, z$  轴的惯性积  $I_{yz} = -0.625 \times 10^{-6}$  m<sup>4</sup>,坐标原点在横截面形心处.

根据以上截面尺寸和弹性常数,可求出方程(7)和(9)中的刚度矩阵  $A, B, C, D$ .如果考虑两种不同的荷载情况:第一种荷载情况为梁顶端沿  $z$  方向作用  $P_z = 10.0$  kN 的集中荷载;第2种荷载情况为在悬臂梁顶端绕  $x$  轴逆时针方向作用  $P_\theta = 1.0$  kN·m 的集中扭矩,即约束扭转问题.于是,式(9)中对应于此两种荷载情况的荷载向量分别为

$$P = [0 \quad 10.0 \quad 0]^T \text{ kN}, \quad P = [0 \quad 0 \quad 1.0]^T \text{ kN}\cdot\text{m}. \tag{10}$$

方程(7)、(8)以及具有上述两荷载条件的式(9)将构成两组常微分方程边值问题,如果用高质高效的常微分方程求解器(ODE solver)<sup>[10-11]</sup>进行求解,可得其数值解.表1给出了第一种荷载情况下挠度的解析解<sup>[14]</sup>和统一分析梁解的比较;表2给出了第二种荷载情况下梁扭转角的 Vlasov 解<sup>[14]</sup>和统一分析梁解的比较;图3和图4给出了在两种荷载情况下,梁顶端横截面的翘曲情况.

表1 Z字形截面悬臂梁挠度计算结果比较

Table 1 The deflection comparison for a Z-section cantilever beam

deflection	analytic solution <sup>[14]</sup>	UAB solution	fractional error
in $y$ direction $w_y / \text{m}$	0.332 8E-1	0.326 4E-1	-1.96%
in $z$ direction $w_z / \text{m}$	0.221 8E-1	0.221 2E-1	-0.27%

表2 Z字形截面梁扭转角对比

Table 2 The torsion-angle comparison for a Z-section cantilever beam

		$x / \text{m}$				
		0.0	0.25	0.5	0.75	1.0
$\theta(x) / \text{rad}$	Vlasov solution <sup>[14]</sup>	0.000 0	0.081 7	0.277 6	0.535 4	0.820 2
	UAB solution	0.000 0	0.084 8	0.280 5	0.534 2	0.812 6

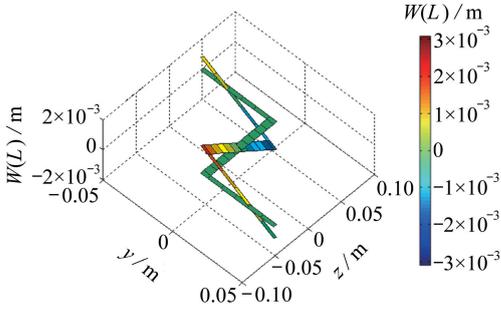


图3 Z形截面梁在弯曲时  $x = 1.0$  m 处横截面的翘曲情况

Fig. 3 The axial warping of the cross section at  $x = 1.0$  m due to bending

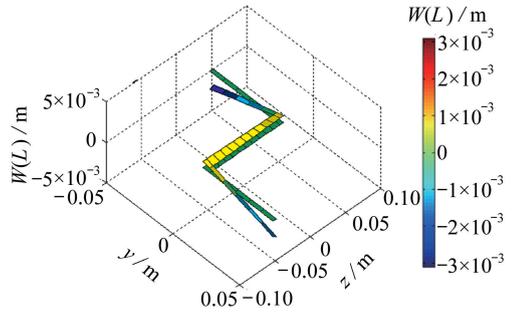


图4 Z形截面梁在约束扭转时  $x = 1.0$  m 处横截面的翘曲情况

Fig. 4 The axial warping of the cross section at  $x = 1.0$  m due to restrained torsion

### 3.2 算例 2

图5所示为一复合薄壁等截面悬臂梁,梁材料的弹性模量  $E = 2.06 \times 10^{11}$  Pa,剪切模量  $G = 0.79 \times 10^{11}$  Pa;梁长  $L = 0.3$  m, $y,z$ 方向的长细比分别为1.5,3.0;横截面的尺寸如图所示,其中  $a = 0.1$  m, $b = 0.02$  m,厚度  $t = 0.005$  m;坐标原点在横截面形心处。

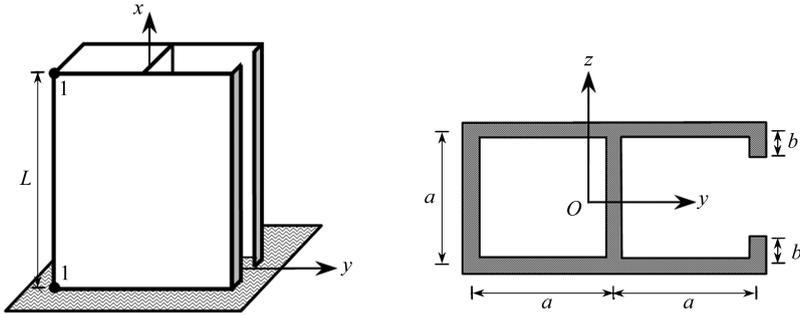


图5 复合截面统一分析悬臂梁

Fig. 5 A cantilever UAB with a complex cross section

根据此例的截面尺寸和弹性模量,可求出与方程(7)和(9)对应的刚度矩阵  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ ,并考虑两种不同的荷载情况.第一种荷载情况为在梁顶端沿  $z$  轴正方向作用  $P_z = 100$  kN 的集中荷载;第二种荷载情况为在梁顶端绕  $x$  轴逆时针方向作用  $P_\theta = 10$  kN·m 的集中扭矩.对应于此两种荷载情况,式(9)中的荷载向量分别变为

$$\mathbf{P} = [0 \quad 100 \quad 0]^T \text{ kN}, \quad \mathbf{P} = [0 \quad 0 \quad 10]^T \text{ kN} \cdot \text{m}. \quad (11)$$

将与式(11)对应的荷载向量分别代入式(9)后,方程(7)、(8)、(9)就构成了两组常微分方程边值问题,再分别用常微分方程求解器进行求解,可得其数值解.因作用力(或集中扭矩转动中心)不通过剪力中心<sup>[14]</sup>,梁横截面会产生扭转.此种位移模式表现在图5选定的坐标系下,就会产生沿  $y, z$  两个方向的挠度和绕  $x$  轴的扭转。

表3 两种荷载作用下梁顶端的位移

Table 3 The displacements at the top end of the cantilever in two different load conditions

load condition	$v_{0y}(L) / \text{m}$	$v_{0z}(L) / \text{m}$	$\theta(L) / \text{rad}$
$P_z$	0.104 176E-10	0.141 334E-02	0.338 298E-02
$P_\theta$	0.170 306E-10	0.338 256E-03	0.582 942E-02

梁顶端挠度  $v_{0y}(L), v_{0z}(L)$  和转角  $\theta(L)$  的计算结果见表 3. 第一条节线(横截面左下角处, 见图 5)上不同高度处的翘曲正应力  $\sigma_1(x)$  和翘曲位移  $w_1(x)$  见表 4 和表 5; 梁顶端横截面的翘曲位移见图 6 和图 7.

表 4  $z$  方向集中荷载作用下第一条节线上不同高度处的翘曲正应力和翘曲位移

Table 4 The warping normal stresses and warping displacements of the 1st nodal line at different heights due to a concentrated force in direction  $z$

	$x/m$				
	0.0	0.075	0.15	0.225	0.3
$\sigma_1(x)/\text{Pa}$	0.517 490E+9	0.249 083E+9	0.156 673E+9	0.763 173E+8	0.000 000
$w_1(x)/\text{m}$	0.000 000	0.119 528E-3	0.192 764E-3	0.234 977E-3	0.248 814E-3

表 5 集中扭矩下第一条节线上不同高度处的翘曲正应力和翘曲位移

Table 5 The warping normal stresses and warping displacements of the 1st nodal line at different heights due to a concentrated torque about axis  $x$

	$x/m$				
	0.0	0.075	0.15	0.225	0.3
$\sigma_1(x)/\text{Pa}$	0.365 662E+8	0.285 649E+8	0.173 502E+8	0.793 578E+7	0.000 000
$w_1(x)/\text{m}$	0.000 000	0.108 413E-4	0.191 534E-4	0.236 954E-4	0.251 151E-4

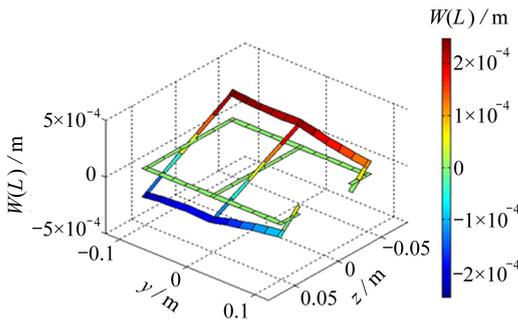


图 6  $z$  方向受集中力时  $x = 0.3\text{ m}$  处横截面的翘曲情况

Fig. 6 The axial warping of the cross section at  $x = 0.3\text{ m}$  due to a concentrated force in direction  $z$

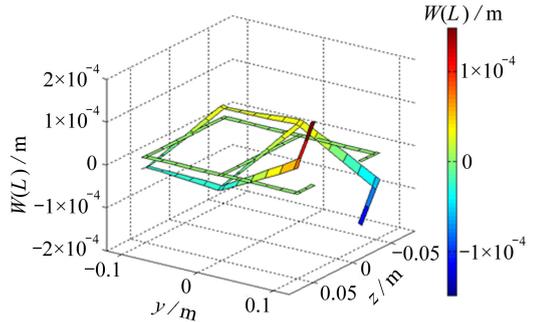


图 7 集中扭矩作用下  $x = 0.3\text{ m}$  处横截面的翘曲情况

Fig. 7 The axial warping of the cross section at  $x = 0.3\text{ m}$  due to a concentrated torque

## 4 结 论

本文为弹性薄壁杆状结构构件或结构体系建立了一种统一分析模型——统一分析梁, 并为这种分析模型建立了一种数值分析新方法——有限节线法. 这种梁模型的外延可以涵盖现有所有薄壁梁弹性理论的求解范围, 不仅能求解出任意薄壁梁的横向位移, 还能求解出其横截面在任意荷载作用下的面外翘曲. 通过分析算例结果可以得出以下结论:

1) 从表 1 和表 2 可以看出, 当 Z 形截面梁的长细比符合传统梁理论的条件时, 传统梁的解与统一分析梁的解基本一致.

2) 当梁的长细比为 10.0 时, 传统梁理论的平截面假定是合理的(算例 1: 图 3). 但是当梁的长细比为 3.0 时, 在横向荷载作用下, 横截面产生了较明显的翘曲(算例 2: 图 6), 平截面假定不再适用.

3) 薄壁截面悬臂梁约束扭转时,其扭转翘曲正应力在支座横截面处最大,在自由端处为0,而翘曲位移正好相反(算例2:表5);如果扭矩不通过横截面的剪切中心,则梁不仅有绕轴线转动的角位移,还会产生横向挠度。

#### 参考文献(References):

- [1] de Miranda S, Madeo A, Mileta R, Ubertini F. On the relationship of the shear deformable generalized beam theory with classical and non-classical theories[J]. *Thin-Walled Structures*, 2014, **51**(21/22): 3698-3709.
- [2] Schardt R P. Generalized beam theory—an adequate method for coupled stability problems [J]. *Thin-Walled Structures*, 1994, **19**(2/4): 161-180.
- [3] de Miranda S, Gutiérrez A, Mileta R, Ubertini F. A generalized beam theory with shear deformation[J]. *Thin-Walled Structures*, 2013, **67**: 88-100.
- [4] Vlasov V Z. *Thin-Walled Elastic Beams*[M]. Jerusalem: Monson, 1961: 1-493.
- [5] Popov E P, Nagarajan S, Lu Z A. *Mechanics of Material*[M]. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall Inc, 1976: 1-590.
- [6] Timoshenko S. *Strength of Materials, Part I: Elementary Theory and Problems*[M]. New Delhi: CBS Publishers & Distributors, 2004: 1-298.
- [7] El Fatmi R. Non-uniform warping including the effects of torsion and shear forces—part I: a general beam theory[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2007, **44**(18/19): 5912-5929.
- [8] El Fatmi R. Non-uniform warping including the effects of torsion and shear forces—part II: analytical and numerical applications[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2007, **44**(18/19): 5930-5952.
- [9] ZHANG Yuan-hai, LIN Li-xia. Shear lag analysis of thin-walled box girders based on a new generalized displacement[J]. *Engineering Structures*, 2014, **61**: 73-83.
- [10] Ascher U, Christiansen J, Russell R D. Collocation software for boundary-value ODEs[J]. *ACM Trans Math Software*, 1981, **7**(2): 209-222.
- [11] YUAN Si. ODE conversion techniques and their applications in computational mechanics[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 1991, **7**(3): 283-288.
- [12] YUANG Si, ZHANG Yi-guo. Solution of eigen problems in ODEs by standard ODE solvers[J]. *Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, 1993, **13**(2): 94-102.
- [13] YUAN Si. *The Finite Element Method of Lines*[M]. New York, Beijing: Science Press, 1993: 1-420.
- [14] 包世华,周坚. 薄壁杆件结构力学[M]. 北京:中国建筑工业出版社, 1991: 1-393.(BAO Shi-hua, ZHOU Jian. *Mechanics of Thin-Walled Structures*[M]. Beijing: China Architecture & Building Press, 1991: 1-393.(in Chinese))

# Elastic Analysis of Arbitrary Thin-Walled Structural Members Based on the Unified Analytical Beam Model With the Finite Nodal Line Method

GONG Yao-qing, SUN Bo, CHEN Xiao-dong

(*School of Civil Engineering, Henan Polytechnic University,  
Jiaozuo, Henan 454003, P.R.China*)

**Abstract:** The traditional thin-walled beam theory is strongly dependent on the slenderness ratio, the shape of its cross section and the load form of a beam. In order to investigate the elastic behaviors of arbitrary thin-walled beams under arbitrary loads, a unified analytical model for all thin-walled structural members, named ‘unified analytical beam’ (UAB), and a novel computational methodology titled ‘finite nodal line method’ (FNLM) were presented. By means of UAB and FNLM, the elastic analysis of arbitrary thin-walled structural members can be conveniently carried out. Furthermore, when the properties of a beam problem are consistent with the application conditions for the traditional beam theory, an equal-precision solution to the problem will be obtained with both the FNLM and the traditional one. The computational comparison through several beam examples verifies the rationality and correctness of the proposed UAB and FNLM.

**Key words:** thin-walled beam; traditional beam theory; unified analytical beam; finite nodal line method; non-uniform torsion

**Foundation item:** The National Natural Science Foundation of China(51178164)