

轴向拉伸细长杆的非线性力学模型^{*}

马刚, 孙丽萍, 艾尚茂, 王宏伟

(哈尔滨工程大学 船舶工程学院, 哈尔滨 150001)

摘要: 聚酯系泊缆是深海工程中具备一定抗弯刚度、易拉伸变形的细长杆件结构,聚酯缆的轴向变形属大拉伸范畴,分析中应当区分变形前后状态,特别是缆索长度的改变使得基于小拉伸假设的细长杆模型需要予以改进.因此,基于 Garrett 细长杆模型,应用总体坐标和斜率取代 Euler-Bernoulli(欧拉-伯努利)梁元的转角,解决缆索在空间中大转动变形的几何非线性问题;使用轴向拉伸变形前后物质点对应的方法,借助单元两个节点和一个中点,以及3个二次多项式函数描述轴向拉伸变形下细长杆元的运动微分方程.通过与轴向拉伸悬臂梁的对比分析,验证了该拉伸杆元的收敛性和准确性.

关键词: 轴向拉伸; 细长杆; 非线性; 聚酯缆; 大转动

中图分类号: O342 **文献标志码:** A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2015.04.004

引言

随着海洋油气资源开发向深海发展,深海浮式系统的定位技术成为深海开发的关键技术之一.合成纤维缆是随着张紧式系泊方式的发展而逐渐受到关注的新型系泊材料.尼龙、高模聚乙烯和聚酯等合成材料自1997年不断地应用在深海领域,其中,以聚酯缆最受欢迎^[1-2].在结构特性上,与钢链钢缆相比,聚酯缆的质量较小、抗拉刚度较小、直径较大,且具备连续的抗弯性能^[3].在系泊机理上,钢链钢缆在悬链式系泊中应用较多,通过重力效应提供平台结构的水平恢复力,而张紧式系泊中的聚酯缆通过轴向变形提供浮式系统的水平恢复力.在分析方法上,通常假设钢链钢缆无弯矩、无轴向变形,分析中缆长保持不变;在小拉伸假设下,也只通过必要修正加以完善^[4-5].聚酯缆的轴向变形和抗弯特性使得之前悬链线法、集中质量法和细长杆法等深海系泊线分析模型需要改进方能适用^[6].

国内外的诸多学者也尝试通过不同的方法解决这一问题^[7-9],如 Chen 等^[10]借助细长杆理论通过施加轴向拉伸弹簧的方式解决大拉伸问题,但轴向变形和弯曲同时作用的问题依然没有得以解决;Gerstmayr 等使用绝对节点坐标方法,通过轴向变形能和弯曲变形能的方法解决该问题,但单元刚度阵呈现了强非线性,计算耗时,不适用于深海系泊线的分析^[11].本文以

* 收稿日期: 2014-09-24; 修订日期: 2014-12-01

基金项目: 黑龙江省科学基金(QC2014C049);中央高校基本科研业务费专项资金(HEUCFD1402; HEUCFD1424);高等学校博士学科点专项科研基金新教师类资助课题(20132304120008);高等学校学科创新引智计划(B07019)

作者简介: 马刚(1984—),男,山东人,讲师,博士(通讯作者. Tel: +86-451-82569359; E-mail: magang@hrbeu.edu.cn).

Garrett 细长杆模型为基础,应用总体坐标和斜率取代 Euler-Bernoulli 梁元的转角,解决缆索在空间中大转动变形的几何非线性问题;使用轴向拉伸变形前后物质点对应的方法,借助单元两个节点和一个中点,以及 3 个二次多项式形函数^[12],解决轴向变形和弯曲变形联合作用的问题.通过与轴向拉伸悬臂梁的对比分析,验证该拉伸杆元的准确性.

1 深水缆索细长杆模型

细长杆模型是由 Garrett^[13] 于 1982 年提出的一维梁元模型,应用于系泊线和立管等海洋工程细长杆件结构中,具有计算准确、运行效率高的特点.后来,Paulling, Webster^[4] 通过修正拉伸控制方程使之能够处理小拉伸变形问题.至今,小拉伸细长杆模型依然广受欢迎,并形成了 CABLE3D, WINPOST 等业界知名的软件.由于小拉伸是人为修正的结果,不能解决大拉伸问题,因此,本文将从 Garrett 的无拉伸细长杆模型出发,保留后期发展中开发的新特性,通过轴向拉伸变形前后物质点对应的方法,将拉伸引入到细长杆模型中.

1.1 无拉伸细长杆模型

在细长杆模型中,空间曲线上任一物质点,可用矢径 $r(s, t)$ 表示(如图 1),其中 s 表示从规定起点开始度量的弧长, t 表示时间,两个变量相互独立.每个点 p 上建立活动标架 $p-\tau nb$, τ 表示切线方向, n 表示法线方向, b 表示副法线方向,用以描述曲线的弯曲状态.在用有限元法的描述中,借助一组形函数 a , 矢径可表示为

$$r(s, t) \approx \sum_{n=1}^3 e_n \{ r_n(0, t) a_1(\xi) + r'_n(0, t) \ell a_2(\xi) + r_n(\ell, t) a_3(\xi) + r'_n(\ell, t) \ell a_4(\xi) \} = \sum_{n=1}^3 e_n \sum_{i=1}^4 u_{in} a_i(\xi), \tag{1}$$

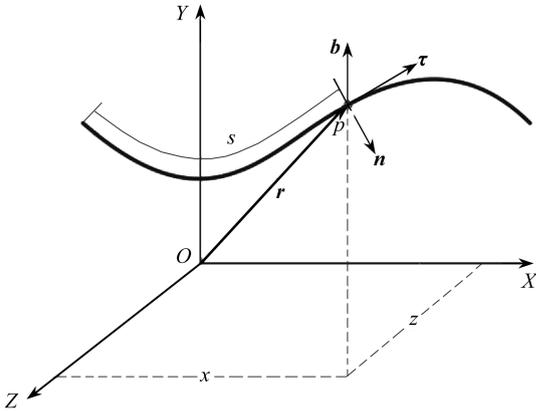


图 1 空间曲线构形
Fig. 1 Configuration of the curved line

式中, e_n 表示总体坐标系下的单位基矢量, $n = 1, 2, 3$ 表示方向, a 为一组 4 个形函数, $i = 1, 2, 3, 4$ 为形函数 a 的识别角标, $\xi = s/\ell$ 为表征物质点的无量纲量, ℓ 为单元的长度.在细长杆模型中,杆微元的运动微分方程和无拉伸控制方程分别为

$$\gamma_{ikm} M_{njm} \ddot{u}_{kj} + \alpha_{ikm} B_m u_{kn} + \beta_{ikm} \tilde{\lambda}_m u_{kn} = \mu_{im} q_{mn} + f_{in}^{nbc}, \tag{2}$$

$$\frac{1}{2} (\beta_{ikm} u_{in} u_{kn} - 1) = 0, \tag{3}$$

式中, M 为单元质量矩阵, u 为单元两个节点的坐标和斜率, \ddot{u} 为单元两个节点的坐标和斜率对时间的二阶导数, B 为单元两个节点和一个中点处的抗弯刚度, $\tilde{\lambda}$ 为 Lagrange (拉格朗日) 乘子, q 为单元上的分布外载荷, f^{nbc} 为单元节点的自然边界条件, $\gamma, \alpha, \beta, \mu$ 均为与形函数相关的积分项, $m = 1, 2, 3$ 用于识别单元两个节点 $m = 1, 3$ 和一个中点 $m = 2, k = 1, 2, 3, 4$ 为形函数 a 的识别角标.

1.2 轴向拉伸细长杆模型

变形前后物质点对应是有有限变形理论中的基本思想,本小节介绍这一思想在细长杆理论中的具体实现方法^[7].无拉伸细长杆的运动微分方程和拉伸控制方程与拉伸变形下的方程在

形式上保持一致,但是,各项变量的含义均对应变形状态的物理意义,相应地,单元长度也表示变形后单元的长度.由于变形后的物理量本身即为未知量,这样一来就会对计算造成困难.因此,变形后的方程需要用变形前的物理量来表达以完成求解,这就需要为变形前后物理量寻找一个合适的对应关系.

基于物质点对应的原理,首先处理曲线上的弧长和应变.假设变形前曲线上的物质点与变形后的某个物质点是一一对应的关系,有 $s = s(\bar{s}, t)$, 式中: s 为变形后的弧长, \bar{s} 为变形前的弧长.相应地,有

$$s = \int_0^{\bar{s}} (1 + \varepsilon(\bar{s}, t)) d\bar{s}, \quad (4)$$

式中, $\varepsilon(\bar{s}, t)$ 对应未拉伸状态下弧长 \bar{s} 处的应变.假定应变与细长杆理论中 Lagrange 乘子的离散方式相一致,定义应变的离散表达式为

$$\varepsilon(\bar{s}, t) \approx \sum_{m=1}^3 \varepsilon_m(t) \varphi_m(\xi), \quad (5)$$

式中, ε_m 表示单元两个节点和一个中点处的应变, $\xi = \bar{s}/\bar{\ell}$ 为表征物质点的无量纲量, $\bar{\ell}$ 为无拉伸状态下单元的长度, φ 为形函数(见图2), 其表达式为

$$\begin{cases} \varphi_1(\xi) = 1 - 3\xi + 2\xi^2, \\ \varphi_2(\xi) = 4\xi - 4\xi^2, \\ \varphi_3(\xi) = -\xi + 2\xi^2. \end{cases} \quad (6)$$

变形后单元的长度通过积分可得

$$\ell(t) \approx \bar{\ell} \left[1 + \frac{\varepsilon_1(t) + 4\varepsilon_2(t) + \varepsilon_3(t)}{6} \right] = \bar{\ell} [1 + \hat{\varepsilon}(t)], \quad (7)$$

式中, $\hat{\varepsilon}(t)$ 表示单元的平均应变.矢径的一阶导数关系式有

$$\mathbf{r}'(s, t) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} = \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial \bar{s}} \frac{\partial \bar{s}}{\partial s} = \frac{\bar{\mathbf{r}}'(\bar{s}, t)}{1 + \varepsilon(\bar{s}, t)}. \quad (8)$$

通过式(7)和式(8),单元两个节点的坐标和斜率有

$$\begin{cases} u_{1n} = r_n(0, t) = \bar{r}_n(0, t), \\ u_{2n} = r'_n(0, t) \ell = \bar{r}'_n(0, t) \bar{\ell} \frac{1 + \hat{\varepsilon}(t)}{1 + \varepsilon_1(t)}, \\ u_{3n} = r_n(\ell, t) = \bar{r}_n(\bar{\ell}, t), \\ u_{4n} = r'_n(\ell, t) \ell = \bar{r}'_n(\bar{\ell}, t) \bar{\ell} \frac{1 + \hat{\varepsilon}(t)}{1 + \varepsilon_3(t)}. \end{cases} \quad (9)$$

对钢链钢缆等线弹性材料,单元3点处的应变均很小,各应变之间的差可忽略不计.在聚酯缆的分析中,假设沿长度方向的应力波远大于单元的长度,近似认为单元两个节点处的应变与单元的平均应变近似,即

$$\frac{[1 + \hat{\varepsilon}(t)]}{[1 + \varepsilon_1(t)]} \approx 1, \quad \frac{[1 + \hat{\varepsilon}(t)]}{[1 + \varepsilon_3(t)]} \approx 1. \quad (10)$$

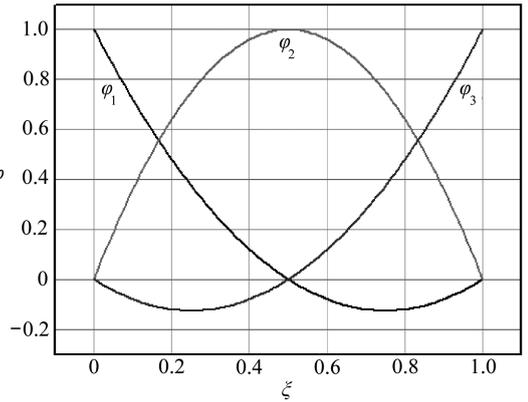


图2 应变形函数

Fig. 2 The shape functions for the strain

因此,单元两个节点的坐标和斜率公式(9)即为

$$\begin{cases} u_{1n} = \bar{r}_n(0, t), u_{2n} \approx \bar{r}'_n(0, t)\bar{\ell}, \\ u_{3n} = \bar{r}_n(\bar{\ell}, t), u_{4n} \approx \bar{r}'_n(\bar{\ell}, t)\bar{\ell}. \end{cases} \quad (11)$$

Lagrange 乘子不发生变化.至此,细长杆单元的 15 个未知量均与变形前的参量建立了映射关系,为细长杆处理拉伸问题打下了基础.

1.3 轴向拉伸细长杆的静力平衡方程

细长杆模型主要包含平衡方程和控制方程,与小变形的情形不同,在轴向拉伸变形的情况下,两个方程均相应发生变化,其中,控制方程将包含完整的应变项.同时,为保持计算快速,拉伸控制方程中应变的表达式将采用新的插值形式:

$$(1 + \varepsilon(s))^2 = (1 + \varepsilon_m)^2 \varphi_m. \quad (12)$$

将静力平衡方程和控制方程按照对应关系整理有

$$\bar{\alpha}_{ikm} \tilde{B}_m u_{kn} + \frac{\bar{\beta}_{ikm}}{1 + \varepsilon_m} \tilde{\lambda}_m u_{kn} = \bar{\mu}_{im} \bar{q}_{mn}^{\text{static}} + f_{in}^{\text{NBC}}, \quad (13)$$

$$\frac{1}{2} \bar{\beta}_{ikm} u_{in} u_{kn} - \frac{1}{2} \bar{\eta}_{lm} (1 + \varepsilon_l)^2 = 0, \quad (14)$$

式中, $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\mu}, \bar{\eta}$ 均为未拉伸状态下单元形函数的积分项, $\tilde{B}_m = \bar{B}_m / (1 + \varepsilon_m)^4$, \bar{B}_m 为未拉伸状态下杆单元的抗弯刚度, $\bar{q}_{mn}^{\text{static}}$ 表示未拉伸状态下杆单元上的静态分布载荷.在单元组装中,相邻两个单元的自然边界条件项 f_{in}^{NBC} 按照首尾相连的方式会在相互连接的节点处互相抵消.组装时应满足两个条件:位移连续和合力平衡.

位移连续写作

$$\begin{cases} u_{3n}^{(N)} = u_{1n}^{(N+1)}, \\ u_{4n}^{(N)} / \bar{\ell}^{(N)} = u_{2n}^{(N+1)} / \bar{\ell}^{(N+1)}, \\ \tilde{\lambda}_3^{(N)} = \tilde{\lambda}_1^{(N+1)}; \end{cases} \quad (15)$$

合力平衡写作

$$\begin{cases} f_{3n}^{\text{NBC}(N)} + f_{1n}^{\text{NBC}(N+1)} = 0, \\ f_{4n}^{\text{NBC}(N)} \bar{\ell}^{(N)} + f_{2n}^{\text{NBC}(N+1)} \bar{\ell}^{(N+1)} = 0; \end{cases} \quad (16)$$

式中, (N) 表示第 N 个单元.依此类推,最终整个系统中,只有第一个单元的最后一个节点和最后一个单元的第二个节点的自然边界条件项存在,这时需要施加必要的强制边界条件或外载荷让整个系统达到平衡.采用 Newton(牛顿)法进行数值迭代计算,代数方程组的求解采用 Gauss(高斯)消去法.由于该方法形成的刚度阵主元占优,所以不必进行选主元及行列变换操作.

2 轴向大拉伸悬臂梁分析

为验证新杆元的收敛性和准确性,通过一端部受大载荷作用的可拉伸悬臂梁作为对比算例^[14].古雅琦等也通过相同的方式来验证计算结果的准确性^[15],在其计算中通过设置参数 $c = PL^2/EI$ 比较了 $c = 0.2, 0.8, 1.4, 2.0$ 等情况下梁的变形情况和计算精度,其中 P 为端部载荷, EI 为抗弯刚度.本文也通过此算例进行验证,不同的是,本节将进一步增加变形程度,验证是否能获得更好的计算精度.

2.1 悬臂梁计算模型与参数

通过文献[15]的计算分析可知,在可拉伸悬臂梁的计算中,当 $c = 1.0$ 左右时,悬臂梁就已经出现了大位移大转动变形,此时, Euler-Bernoulli 梁理论已经不可能得到准确的计算结果.本次分析选取一矩形悬臂梁,长度 2 m ,截面积 0.01 m^2 (高度 $h = 0.1\text{ m}$,宽度 $w = 0.1\text{ m}$),弹性模量 $2.07 \times 10^{11}\text{ Pa}$,边界条件及载荷施加方式见图 3,通过观察杆端水平位移 u 和垂向位移 v 判定变形程度.

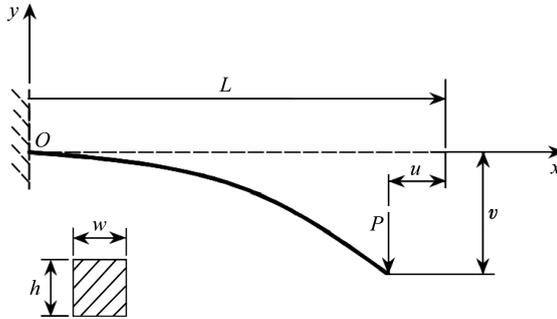


图 3 端部集中载荷作用下的可拉伸悬臂梁

Fig. 3 The extensible cantilever beam under a concentrated end load

2.2 大拉伸大转动变形计算结果分析

在大的端部载荷作用下,悬臂梁发生了大位移大转动变形,因此,通过收敛性和准确度考察新杆元的特性.由于在系泊计算中,极为注重计算效率,所以本次分析着重观察较少单元数量下新杆元的表现,采用 8, 16, 64, 128 个单元组成的 4 组不同单元数量分析计算的收敛性,同时,通过与轴向拉伸悬臂梁解析解的对比分析验证新杆元的准确度,见表 1 和表 2.

表 1 水平位移计算结果

Table 1 The results of the horizontal displacement

number of elements	horizontal displacement u / m	horizontal relative error e_u
8	0.509 167	1.238×10^{-3}
16	0.509 187	1.279×10^{-3}
64	0.509 189	1.281×10^{-3}
128	0.509 189	1.281×10^{-3}
analytical value	0.508 537	-

表 2 垂直位移计算结果

Table 2 The results of the vertical displacement

number of elements	vertical displacement v / m	vertical relative error e_v
8	1.207 199	-3.364×10^{-5}
16	1.207 232	-6.652×10^{-6}
64	1.207 234	-4.994×10^{-6}
128	1.207 234	-4.988×10^{-6}
analytical value	1.207 239	-

通过计算结果可以发现,使用 8 个单元得到的计算结果已经达到了文献[15]中横向和纵向位移的相对误差水平,大约在 1.0×10^{-3} 左右,并且垂向相对误差有了较好的改善,达到了 10^{-5} 量级.随着单元数量的增加,垂向相对误差达到 10^{-6} 量级,结果趋向于一致,说明新杆元具有较好的收敛性;并且计算值与准确值的误差呈现不断缩小的趋势,说明新杆元具有较好的准

确性.同时注意到,在分析中,16与128个单元的计算结果相差不大,16个单元已经表现出了较好的计算结果.说明新杆元应用少量的单元即能获得较高的计算精度,这对将新杆元应用到深水系泊领域具有重要的作用.

3 结 论

缆索的轴向拉伸变形和弯曲变形是聚酯系泊缆分析中呈现出的强非线性力学问题.兼顾到快速计算的要求,本文在Garrett细长杆理论的基础上,通过物质点对应的方法,区分了大变形结构在变形前后的状态,建立了变形前后的映射关系,形成了新的杆元模型.对模拟大拉伸条件下,杆件结构大位移大转动的非线性问题提供了新的思路和方法.通过与具有解析解的可拉伸悬臂梁算例的比较,验证了新杆元模型具有较好的收敛性和较高的准确度,同时保持了细长杆模型利用少量的单元即能获得较高的计算精度这一重要特性.

参考文献(References):

- [1] 连宇顺, 刘海笑, 黄维. 超深水混合缆绷紧式系泊系统非线性循环动力分析[J]. 海洋工程, 2013, 31(3): 1-8. (LIAN Yu-shun, LIU Hai-xiao, HUANG Wei. Cyclic nonlinear analysis of ultra-deepwater hybrid mooring systems[J]. *The Ocean Engineering*, 2013, 31(3): 1-8. (in Chinese))
- [2] 王宏伟, 罗勇, 马刚, 胡开业. 深水半潜式钻井平台纤维材料系泊方案研究[J]. 船舶工程, 2010, 32(3): 58-62. (WANG Hong-wei, LUO Yong, MA Gang, HU Kai-ye. Research on fiber material mooring scheme of the deepwater semi-submersible drilling platform[J]. *Ship Engineering*, 2010, 32(3): 58-62. (in Chinese))
- [3] Tahar A, Kim M H. Coupled-dynamic analysis of floating structures with polyester mooring lines[J]. *Ocean Engineering*, 2008, 35(17/18): 1676-1685.
- [4] Paulling J R, Webster W C. A consistent large-amplitude analysis of the coupled response of a TLP and tension system[C]//*Proceedings of the Fifth International Offshore Mechanics and Arctic Engineering Symposium*, Tokyo, 1986.
- [5] 白兴兰, 黄维平. 深水钢悬链线立管非线性有限元静力分析[J]. 工程力学, 2011, 28(4): 208-213. (BAI Xing-lan, HUANG Wei-ping. Static analysis of deepwater steel catenary riser using nonlinear finite element method[J]. *Engineering Mechanics*, 2011, 28(4): 208-213. (in Chinese))
- [6] MA Gang, SUN Li-ping, WANG Hong-wei. Implementation of a visco-elastic model into slender rod theory for deepwater polyester mooring line[C]//*International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering*, San Francisco, California, 2014.
- [7] Webster W C, Lambrakos K, Kim Jang-whan, JING Xiao-ning. Rod dynamics with large stretch[C]//*Proceedings of the ASME 2012 31st International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering*, Rio de Janeiro, Brazil, 2012.
- [8] Arcandra T. Hull/mooring/riser coupled dynamic analysis of a deepwater floating platform with polyester lines[D]. PhD Thesis. Texas: Texas A & M University, 2001.
- [9] 王金龙, 段梦兰, 田凯. 海流作用下的深水懒波型立管形态研究[J]. 应用数学和力学, 2014, 35(9): 959-967. (WANG Jin-long, DUAN Meng-lan, TIAN Kai. Research on the configuration of the deepwater steel lazy-wave riser under effects of ocean currents[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, 35(9): 959-967. (in Chinese))
- [10] CHEN Xiao-hong, ZHANG Jun, Johnson P, Irani M. Dynamic analysis of mooring lines with

- inserted springs[J]. *Applied Ocean Research*, 2001, **23**(5): 277-284.
- [11] Gerstmayr J, Irschik H. On the correct representation of bending and axial deformation in the absolute nodal coordinate formulation with an elastic line approach[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2008, **318**(3): 461-487.
- [12] 齐朝晖, 方慧青, 张志刚, 王刚. 基于曲率离散的几何非线性空间梁单元[J]. 应用数学和力学, 2014, **35**(5): 498-509. (QI Zhao-hui, FANG Hui-qing, ZHANG Zhi-gang, WANG Gang. Geometric nonlinear spatial beam elements with curvature interpolation[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, **35**(5): 498-509. (in Chinese))
- [13] Garrett D L. Dynamic analysis of slender rods[J]. *Journal of Energy Resources Technology*, 1982, **104**(4): 302-306.
- [14] 张志刚, 齐朝晖, 吴志刚. 基于曲率插值的大变形梁单元[J]. 应用数学和力学, 2013, **34**(6): 620-629. (ZHANG Zhi-gang, QI Zhao-hui, WU Zhi-gang. Large deformation beam element based on curvature interpolation[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2013, **34**(6): 620-629. (in Chinese))
- [15] 古雅琦, 王海龙, 杨怀宇. 一种大变形几何非线性 Euler-Bernoulli 梁单元[J]. 工程力学, 2013, **30**(6): 11-15. (GU Ya-qi, WANG Hai-long, YANG Huai-yu. A large deformation geometric nonlinear Euler-Bernoulli beam element[J]. *Engineering Mechanics*, 2013, **30**(6): 11-15. (in Chinese))

A Nonlinear Mechanical Model for Extensible Slender Rods

MA Gang, SUN Li-ping, AI Shang-mao, WANG Hong-wei
(College of Shipbuilding Engineering, Harbin Engineering University,
Harbin 150001, P.R.China)

Abstract: The polyester mooring line is a flexible rod liable to axial extension and bending deformation. Due to its large axial deformation in tension, the polyester line's deformed configurations shall be distinguished from the undeformed ones, and the slender rod model based on the small extension hypothesis shall be improved in view of its nonnegligible length change. The global coordinates and slopes were used to replace the rotation angles in the Euler-Bernoulli beam to deal with the geometrically nonlinear problem of large spatial rotation based on Garrett's slender rod theory. Then the point-to-point mapping method was proposed to correlate the 2 configurations before and after axial extension in the slender rod theory, with 2 element nodes, 1 intermediate point and 3 quadratic polynomial combined to derive the differential equations of motion for the slender rod element in tension. Through comparison between the numerical results and the analytical solution of an extensible cantilever beam example, convergence and accuracy of the proposed model are proved.

Key words: axial extension; slender rod; nonlinear; polyester line; large rotation