**文章编号:**1000-0887(2015)04-0378-08　

# 结构动力方程求解的改进精细 Runge-Kutta 方法*

张继锋，　邓子辰，　张　凯

(西北工业大学 力学与土木建筑学院, 西安 710072)

(我刊编委邓子辰来稿)

**摘要：** 在已有精细 Runge-Kutta(龙格-库塔)方法的基础上,考虑了状态空间方程非齐次项的特点和外荷载的特殊性,提出了求解结构动力方程的改进精细 Runge-Kutta 方法.通过对矩阵进行分块计算,在利用原有精细 Runge-Kutta 方法高精度的同时进一步提高了计算效率,有利于大型结构的长时间仿真.将改进精细 Runge-Kutta 方法应用于结构动力方程求解,为其求解提供一种新方法.数值算例表明了改进方法的正确性和有效性.

**关　键　词：** 结构动力方程； 精细积分； 简化计算； Runge-Kutta 方法

**中图分类号：** O313　　**文献标志码：** A

doi：10.3879/j.issn.1000-0887.2015.04.005

## 引　　言

航空、航天、机械以及土木工程等多个领域结构计算和设计的核心就是求解结构动力学方程,如何高精度高效率求解一直备受关注.传统差分方法都存在精度不高的缺点,由钟万勰等提出的精细积分法[1-2],在应用于求解线性定常结构动力方程时,能够在数值上得到精确解,它具有精度高、绝对稳定、可以用大步长等优点.为了避免矩阵求逆,一些学者对非齐次项的 Duhamel 积分进行数值积分求解,得到了一些新的计算方法[3-4].Zhang(张素英)等[5]将精细积分方法和 Runge-Kutta 方法相结合,提出了精细 Runge-Kutta 方法,并将其应用于求解非线性动力学方程.由于大型结构的结构动力方程求解需要很长时间,为了提高计算效率,还有很多学者做了很多有益的工作[6-8].

本文将精细 Runge-Kutta 方法引入求解结构动力方程,利用精细积分方法的高精度和 Runge-Kutta 方法的通用性,同时考虑由结构动力方程转化所得的状态空间方程非齐次项的特点和外荷载的特殊性,提出结构动力方程求解的改进精细 Runge-Kutta 方法,对其进行编程计算,并与传统的 Runge-Kutta 方法进行对比,说明方法的正确性和有效性.

* **收稿日期：** 2014-12-30

**基金项目：** 国家自然科学基金(重点项目)(11432010)； 国家重点基础研究发展计划(973 计划)(2011CB610300)； 111 引智计划项目(B07050)；高校博士点基金(20126102110023)

**作者简介：** 张继锋(1982—),男,湖北襄阳人,博士生(E-mail：zhangjifeng@ mail.nwpu.edu.cn)；
邓子辰(1964—),男,辽宁人,教授,博士生导师(通讯作者. E-mail：dweifan@ nwpu.edu.cn).

# 1　精细 Runge-Kutta 方法

## 1.1　构造状态空间方程[6]

当采用集中质量法或有限元法时,可得如下所示的结构动力方程:

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{M}\boldsymbol{I}\ddot{u}_g, \tag{1}$$

其中,初始值 $\boldsymbol{x}(0)$,$\dot{\boldsymbol{x}}(0)$ 给定,$\boldsymbol{M},\boldsymbol{C},\boldsymbol{K} \in R^{n\times n}(\boldsymbol{x} \in R^n)$,$\boldsymbol{I}\ddot{u}_g$ 为外部荷载列向量.

对式(1)两边同时左乘 $\boldsymbol{M}^{-1}$, 可将方程表示如下:

$$\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K}\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{I}\ddot{u}_g. \tag{2}$$

引入状态变量 $\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{x}$,$\boldsymbol{X}_2 = \dot{\boldsymbol{x}}$,则状态向量为 $\boldsymbol{X} = \begin{Bmatrix}\boldsymbol{X}_1\\ \boldsymbol{X}_2\end{Bmatrix}$, 可以把方程(1)转化为状态空间方程:

$$\dot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{F}(t), \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{F}(t)$ 分别为

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}\\ -\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K} & -\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{C}\end{bmatrix}_{2n\times 2n},\ \boldsymbol{F}(t) = \begin{bmatrix}\boldsymbol{0}\\ -\boldsymbol{I}\ddot{u}_g\end{bmatrix}_{2n\times 1}.$$

## 1.2　精细 Runge-Kutta 方法[5]

根据常微分方程理论,对于如下的一个非齐次方程:

$$\dot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{F}(t), \tag{4}$$

其解可以表示为

$$\boldsymbol{X}(t) = \exp[\boldsymbol{A}(t - t_0)]\boldsymbol{X}_0 + \int_{t_0}^{t}\exp[\boldsymbol{A}(t - t_1)]\boldsymbol{F}(t_1)\mathrm{d}t_1. \tag{5}$$

令 $t = t_{k+1}$,$t_0 = t_k$,$\Delta t = t_{k+1} - t_k$, 可得如下格式:

$$\boldsymbol{X}_{k+1} = \exp(\boldsymbol{A}\Delta t)\boldsymbol{X}_k + \int_0^{\Delta t}\exp[\boldsymbol{A}(\Delta t - \xi)]\boldsymbol{F}(t_k + \xi)\mathrm{d}\xi. \tag{6}$$

上式右边的积分可以用四阶 Runge-Kutta 方法计算,可得

$$\boldsymbol{X}_{k+1} = \exp(\boldsymbol{A}\Delta t)\boldsymbol{X}_k + \frac{\Delta t}{6}(\boldsymbol{K}_1 + 2\boldsymbol{K}_2 + 2\boldsymbol{K}_3 + \boldsymbol{K}_4), \tag{7}$$

其中

$$\begin{cases}\boldsymbol{K}_1 = \exp(\boldsymbol{A}\Delta t)\boldsymbol{F}(t_k) = \boldsymbol{T}_1\boldsymbol{F}(t_k) = \boldsymbol{D}_1,\\ \boldsymbol{K}_2 = \exp\left(\dfrac{1}{2}\boldsymbol{A}\Delta t\right)\boldsymbol{F}\left(t_k + \dfrac{\Delta t}{2}\right) = \boldsymbol{T}_2\boldsymbol{F}\left(t_k + \dfrac{\Delta t}{2}\right) = \boldsymbol{D}_2,\\ \boldsymbol{K}_3 = \exp\left(\dfrac{1}{2}\boldsymbol{A}\Delta t\right)\boldsymbol{F}\left(t_k + \dfrac{\Delta t}{2}\right) = \boldsymbol{T}_3\boldsymbol{F}\left(t_k + \dfrac{\Delta t}{2}\right) = \boldsymbol{D}_3,\\ \boldsymbol{K}_4 = \boldsymbol{F}(t_k + \Delta t),\end{cases} \tag{8}$$

上式中所出现的 $\exp(\boldsymbol{A}\Delta t)$ 和 $\exp(\boldsymbol{A}\Delta t/2)$ 均可以用精细计算[2]得到.

# 2　改进精细 Runge-Kutta 方法

对于大型结构来说,所得到的结构动力方程比较复杂,结构自由度比较高,使得结构动力方程求解所需时间比较长,下面来考虑如何对精细 Runge-Kutta 方法进行改进.

## 2.1　考虑 Runge-Kutta 方法特点的改进

如果结构动力方程求解时的外荷载只有和时间相关的外荷载向量,为了提高计算效率,可

以将式(7)改写如下:

$$\boldsymbol{X}_{k+1}=\exp(\boldsymbol{A}\Delta t)\boldsymbol{X}_k+\frac{\Delta t}{6}(\boldsymbol{K}_1+4\boldsymbol{K}_2+\boldsymbol{K}_3), \tag{9}$$

其中

$$\begin{cases}\boldsymbol{K}_1=\exp(\boldsymbol{A}\Delta t)\boldsymbol{F}(t_k)=\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{F}(t_k)=\boldsymbol{D}_1,\\ \boldsymbol{K}_2=\exp\left(\dfrac{1}{2}\boldsymbol{A}\Delta t\right)\boldsymbol{F}\left(t_k+\dfrac{\Delta t}{2}\right)=\boldsymbol{T}_2\boldsymbol{F}\left(t_k+\dfrac{\Delta t}{2}\right)=\boldsymbol{D}_2,\\ \boldsymbol{K}_3=\boldsymbol{F}(t_k+\Delta t).\end{cases} \tag{10}$$

需要指出的是由于 $\exp(\boldsymbol{A}\Delta t)$ 可以由 $\exp(\boldsymbol{A}\Delta t/2)$ 计算得到,所以计算时可以把 $\exp(\boldsymbol{A}\Delta t/2)$ 先计算出来,再利用 $\exp(\boldsymbol{A}\Delta t/2)$ 计算 $\exp(\boldsymbol{A}\Delta t)$.

### 2.2 考虑非齐次项特点的改进[6]

观察式(3)可以发现,转化所得状态空间方程中的 $\boldsymbol{F}(t)$ 是一个 $2n\times 1$ 的列向量,并且前 $n$ 行均为 0.

对式(9)中的 $\boldsymbol{T}$ 和 $\boldsymbol{F}(t)$ 进行如下分块:

$$\boldsymbol{T}_{2n\times 2n}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{T}^{(1)}_{2n\times n} & \boldsymbol{T}^{(2)}_{2n\times n}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{F}(t)_{2n\times 1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{F}^{(1)}_{n\times 1}\\ \boldsymbol{F}^{(2)}_{n\times 1}\end{bmatrix}, \tag{11}$$

分块以后得到的 $\boldsymbol{F}^{(1)}_{n\times 1}$ 是 $\boldsymbol{0}$,这样可以得到

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{T}_{2n\times 2n}\times\boldsymbol{F}(t)_{2n\times 1}=\boldsymbol{T}^{(2)}_{2n\times n}\times\boldsymbol{F}^{(2)}_{n\times 1}. \tag{12}$$

从式(12)可知精细 Runge-Kutta 方法可以简化计算,在每一个时间步内进行式(9)运算时,都用式(12)来代替计算,和文献[6]有异曲同工之妙.

这样把精细 Runge-Kutta 方法简化为

$$\boldsymbol{X}_{k+1}=\exp(\boldsymbol{A}\Delta t)\boldsymbol{X}_k+\frac{\Delta t}{6}(\boldsymbol{K}_1+4\boldsymbol{K}_2+\boldsymbol{K}_3), \tag{13}$$

其中

$$\begin{cases}\boldsymbol{K}_1=\exp(\boldsymbol{A}\Delta t)\boldsymbol{F}(t_k)=\boldsymbol{T}^{(2)}_1\boldsymbol{F}^{(2)}(t_k)=\boldsymbol{D}_1,\\ \boldsymbol{K}_2=\exp\left(\dfrac{1}{2}\boldsymbol{A}\Delta t\right)\boldsymbol{F}\left(t_k+\dfrac{\Delta t}{2}\right)=\boldsymbol{T}^{(2)}_2\boldsymbol{F}^{(2)}\left(t_k+\dfrac{\Delta t}{2}\right)=\boldsymbol{D}_2,\\ \boldsymbol{K}_3=\boldsymbol{F}(t_k+\Delta t).\end{cases} \tag{14}$$

### 2.3 考虑外荷载特点的进一步改进

一般情况下,外部荷载不一定都作用在每个质点上,所以外荷载有些行有数值,有些行可能是 0,所以可以将外荷载是 0 的部分行不参与计算.根据以上特点,假设外荷载不为 0 的部分为 $m$ 行,式(11)的计算可以继续分块计算如下:

$$\begin{cases}\boldsymbol{T}_{2n\times 2n}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{T}^{(1)}_{2n\times n} & \boldsymbol{T}^{(2)}_{2n\times n}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{T}^{(1)}_{2n\times n} & \boldsymbol{T}^{(2)}_{2n\times(n-m)} & \boldsymbol{T}^{(3)}_{2n\times m}\end{bmatrix},\\ \boldsymbol{F}(t)_{2n\times 1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{F}^{(1)}_{n\times 1}\\ \boldsymbol{F}^{(2)}_{n\times 1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{F}^{(1)}_{n\times 1}\\ \boldsymbol{F}^{(2)}_{(n-m)\times 1}\\ \boldsymbol{F}^{(3)}_{m\times 1}\end{bmatrix}.\end{cases} \tag{15}$$

分块以后得到的 $\boldsymbol{F}^{(1)}_{n\times 1}$ 和 $\boldsymbol{F}^{(2)}_{(n-m)\times 1}$ 是 $\boldsymbol{0}$,则相应的式(12)可以改写为

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{T}_{2n\times 2n}\times\boldsymbol{F}(t)_{2n\times 1}=\boldsymbol{T}^{(2)}_{2n\times n}\times\boldsymbol{F}^{(2)}_{n\times 1}=\boldsymbol{T}^{(3)}_{2n\times m}\times\boldsymbol{F}^{(3)}_{m\times 1}. \tag{16}$$

与此同时根据式(16)进一步将式(14)简化为

$$X_{k+1} = \exp(A\Delta t)X_k + \frac{\Delta t}{6}(K_1 + 4K_2 + K_3), \tag{17}$$

其中

$$\begin{cases} K_1 = \exp(A\Delta t)F(t_k) = T_1^{(3)}F^{(3)}(t_k) = D_1, \\ K_2 = \exp\left(\frac{1}{2}A\Delta t\right)F\left(t_k + \frac{\Delta t}{2}\right) = T_2^{(3)}F^{(3)}\left(t_k + \frac{\Delta t}{2}\right) = D_2, \\ K_3 = F(t_k + \Delta t). \end{cases} \tag{18}$$

### 2.4 改进算法的精度和效率分析

对于精度来讲,对比计算式(17)和(7)可以知道由于改进过程中不会有计算精度的变化,所以改进方法仍能保持原有精细 Runge-Kutta 方法的高精度.

对于计算量来说,式(10)要比式(8)形式简洁,计算量较小.当考虑非齐次项特点对矩阵进行分块计算时,通过式(12)的简化可以将 $2n \times 2n$ 次乘法变为 $2n \times n$ 次乘法.当考虑外荷载特点进行简化计算时,通过式(16) 的改进又可以将 $2n \times n$ 次乘法变为 $2n \times m$ 次乘法.

定量分析式(13),只考虑乘法计算,可知改进前一个步长内乘法计算量为

$$4n^2 + 4n^2 + 4n^2 + 2n + 2n, \tag{19}$$

按照式(13)改进后一个步长内乘法计算量为

$$4n^2 + 2n \times n + 2n \times n + 2n + 2n, \tag{20}$$

式(13)改进方法提高的效率为

$$\frac{4n^2 + 2n \times n + 2n \times n + 2n + 2n}{4n^2 + 4n^2 + 4n^2 + 2n + 2n} = \frac{2n + 1}{3n + 1}; \tag{21}$$

按照式(17)改进后一个步长内乘法计算量为

$$4n^2 + 2n \times m + 2n \times m + 2n + 2n, \tag{22}$$

式(17)改进方法提高的效率为

$$\frac{4n^2 + 2n \times m + 2n \times m + 2n + 2n}{4n^2 + 4n^2 + 4n^2 + 2n + 2n} = \frac{n + m + 1}{3n + 1}. \tag{23}$$

式(21)和式(23)给出了改进方法节约计算时间的理论预估公式.当结构的自由度很大时, 从式(21)可知当外部荷载没有零项时, 改进方法需要原有精细 Runge-Kutta 方法时间的67%; 从式(23)可知当外部荷载有零项时, 改进方法需要原有精细 Runge-Kutta 方法时间的33%~67%.

## 3 算例分析

### 3.1 算例 1

本算例取自文献[3],方程如下:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2.5 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\sin t \\ 0.5\sin t \end{Bmatrix},$$

初始条件: $x_1(0) = 2.5$, $x_2(0) = 0$, $\dot{x}_1(0) = 1.0$, $\dot{x}_2(0) = 1.0$.

算例解析解为

$$x_1 = 2\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) + 0.5\cos(\sqrt{3}t) + \sin t,$$

$$x_2 = \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2} t\right) - \cos(\sqrt{3} t) + \sin t.$$

将传统四阶 Runge-Kutta 方法所用步长取为 0.000 1 s，将精细 Runge-Kutta 方法和本文的改进精细 Runge-Kutta 方法的步长取为 $\Delta t = 0.02$ s，$N = 20$，计算结果列于表 1。

**表 1　$x_1$ 的数值计算结果的比较**

Table 1　Comparison of the numerical calculation results

| $t$ /s | analytic solution | Runge-Kutta method[9] | precise Runge-Kutta method[5] | improved precise Runge-Kutta method |
|---|---|---|---|---|
| 5 | −3.166 587 | −3.166 462 | −3.166 587 | −3.166 587 |
| 10 | 0.887 543 | 0.887 375 | 0.887 543 | 0.887 543 |
| 15 | 0.222 546 | 0.222 529 | 0.222 546 | 0.222 546 |
| 20 | 0.404 750 | 0.404 771 | 0.404 750 | 0.404 750 |
| 25 | 1.032 940 | 1.033 008 | 1.032 940 | 1.032 940 |
| 30 | −2.475 205 | −2.475 107 | −2.475 205 | −2.475 205 |
| 35 | 1.127 853 | 1.127 640 | 1.127 853 | 1.127 853 |
| 40 | −0.761 744 | −0.761 671 | −0.761 744 | −0.761 744 |
| 45 | 2.276 627 | 2.276 553 | 2.276 627 | 2.276 627 |
| 50 | −1.555 298 | −1.555 114 | −1.555 298 | −1.555 298 |

从表 1 可得精细 Runge-Kutta 方法具有很高的精度，传统的 Runge-Kutta 方法即使取步长 0.000 1 s 时仍然没有达到精细 Runge-Kutta 方法的精度，本文方法计算结果和精细 Runge-Kutta 方法一样，仍然保持了原有精细 Runge-Kutta 方法的高精度特性。

### 3.2　算例 2

为了进一步验证改进精细 Runge-Kutta 方法的计算效率，选取如下结构动力方程：

$$\boldsymbol{M}\ddot{x} + \boldsymbol{C}\dot{x} + \boldsymbol{K}x = \boldsymbol{f}(t),$$

其中

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 153 & & & & & & \\ & 170 & & & & & \\ & & 170 & & & & \\ & & & 170 & & & \\ & & & & 170 & & \\ & & & & & 170 & \\ & & & & & & 183 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 3\,510 & -5\,780 & 1\,830 & 425 & 121 & 29.6 & 8.74 \\ -5\,780 & 13\,500 & -8\,950 & 1\,090 & 215 & 69.4 & 16.5 \\ 1\,830 & -8\,950 & 14\,500 & -8\,740 & 1\,160 & 231 & 78.5 \\ 425 & 1\,090 & -8\,740 & 14\,600 & -8\,720 & 1\,170 & 251 \\ 121 & 215 & 1\,160 & -8\,720 & 14\,600 & -8\,710 & 1\,230 \\ 29.6 & 69.4 & 231 & 1\,170 & -8\,710 & 14\,600 & -8\,430 \\ 8.74 & 16.5 & 28.5 & 251 & 1\,230 & -8\,430 & 13\,900 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{K} = 10^4 \times \begin{bmatrix} 204 & -350 & 111 & 25.7 & 7.30 & 1.79 & 0.529 \\ -350 & 808 & -542 & 66.2 & 13 & 4.2 & 1 \\ 111 & -542 & 870 & -529 & 70.3 & 14 & 4.75 \\ 25.7 & 66.2 & -529 & 874 & -528 & 70.7 & 15.2 \\ 7.30 & 13 & 70.3 & -528 & 875 & -527 & 74.6 \\ 1.79 & 4.2 & 14 & 70.7 & -527 & 876 & -510 \\ 0.529 & 1 & 4.75 & 15.2 & 74.6 & -510 & 833 \end{bmatrix},$$

荷载列向量

$$\boldsymbol{f}(t) = \begin{bmatrix} 153 & & & & & & \\ & 170 & & & & & \\ & & 170 & & & & \\ & & & 170 & & & \\ & & & & 170 & & \\ & & & & & 170 & \\ & & & & & & 183 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sin(\pi t) \end{bmatrix},$$

初始条件为

$$x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = 0.$$

本算例的矩阵维数 $n = 7, m = 1$，代入时间预估公式(23)可得本文改进方法需要时间为精细 Runge-Kutta 方法的 41%.

取相同步长情况下，利用本文方法和精细 Runge-Kutta 方法对算例进行了计算，所需时间的比较结果列于表 2.

**表 2　数值计算效率的比较**

Table 2　Comparison of the numerical calculation efficiency

| step $N$ | precise Runge-Kutta method[5] $A$ /s | improved precise Runge-Kutta method $B$ /s | time ratio $(B/A)$ /% |
|---|---|---|---|
| 1 000 | 0.07 | 0.03 | 43 |
| 5 000 | 0.35 | 0.15 | 43 |
| 10 000 | 0.70 | 0.27 | 40 |
| 50 000 | 3.45 | 1.41 | 42 |
| 100 000 | 6.92 | 2.80 | 42 |
| 500 000 | 34.29 | 13.90 | 41 |

从表 2 可得本文方法提高了计算效率，在相同的迭代步数下，本文算法约为文献[5]所需时间的 42%，验证了式(23)计算所得结果，这对于航空、航天、机械以及土木工程中的各种大型结构计算以及长时间仿真，有重要意义.本算例自由度并不大，当结构自由度更大时更能显示本文改进方法的优越性.

## 4　结　论

本文给出了精细 Runge-Kutta 方法的改进公式，提出了求解结构动力方程的改进精细 Runge-Kutta 方法，同时给出了改进方法提高计算效率的预估公式.

本文方法具有以下优点：首先，改进公式没有改变原有精细 Runge-Kutta 方法的基本形式，保持了原有算法的高精度；其次，本文改进方法考虑了非齐次项和外荷载的特点，可以进一步

提高求解的计算效率。数值算例证明了本文方法的有效性。

**致谢** 作者衷心感谢西北工业大学基础研究基金(310201401JCQ01001)对本文的资助。

## 参考文献(References):

[1] 钟万勰. 结构动力方程的精细时程积分法[J]. 大连理工大学学报, 1994, **34**(2): 131-136. (ZHONG Wan-xie. On precise time-intergration method for structural dynamics[J]. *Journal of Dalian University of Technology*, 1994, **34**(2): 131-136. (in Chinese))

[2] Zhong W X, Williams F W. A precise time step integration method[J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, *Part C*: *Journal of Mechanical Engineering Science*, 1994, **208**(6): 427-430.

[3] 储德文, 王元丰. 精细直接积分法的积分方法选择[J]. 工程力学, 2002, **19**(6): 115-119. (CHU De-wen, WANG Yuan-feng. Integration formula selection for precise direct integration method [J]. *Engineering Mechanics*, 2002, **19**(6): 115-119. (in Chinese))

[4] 汪梦甫, 周锡元. 结构动力方程的高斯精细时程积分法[J]. 工程力学, 2004, **21**(4): 13-16. (WANG Meng-fu, ZHOU Xi-yuan. Gauss precise time-integration of structure dynamic analysis[J]. *Engineering Mechanics*, 2004, **21**(4): 13-16. (in Chinese))

[5] ZHANG Su-ying, DENG Zi-chen, LI Wen-cheng. A precise Runge-Kutta integration and its application for solving nonlinear dynamical systems[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2007, **184**(2): 496-502.

[6] 张继锋, 邓子辰, 胡伟鹏. 结构动力方程精细直接积分的简化计算[J]. 动力学与控制学报, 2008, **6**(2): 107-111. (ZHANG Ji-feng, DENG Zi-chen, HU Wei-peng. Simplified computation of precise immediate integration method for structure dynamic equation[J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2008, **6**(2): 107-111. (in Chinese))

[7] 高强, 吴锋, 张洪武, 林家浩, 钟万勰. 大规模动力系统改进的快速精细积分方法[J]. 计算力学学报, 2011, **28**(4): 493-498. (GAO Qiang, WU Feng, ZHANG Hong-wu, LIN Jia-hao, ZHONG Wan-xie. A fast precise integration method for large-scale dynamic structures[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2011, **28**(4): 493-498. (in Chinese))

[8] 高强, 姚伟岸, 吴锋, 张洪武, 林家浩, 钟万勰. 周期结构动力响应的高效数值方法[J]. 力学学报, 2011, **43**(6): 1181-1185. (GAO Qiang, YAO Wei-an, WU Feng, ZHANG Hong-wu, LIN Jia-hao, ZHONG Wan-xie. An efficient algorithm for dynamic response of periodic structures [J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2011, **43**(6): 1181-1185. (in Chinese))

[9] 封建湖, 车刚明, 聂玉峰. 数值分析原理[M]. 北京: 科学出版社, 2001. (FENG Jian-hu, CHE Gang-ming, NIE Yu-feng. *Numerical Analysis Principle*[M]. Beijing: Science Press, 2001. (in Chinese))

# An Improved Precise Runge-Kutta Method for Structural Dynamic Equations

ZHANG Ji-feng, DENG Zi-chen, ZHANG Kai

(*School of Mechanics and Civil Engineering & Architecture*, *Northwestern Polytechnical University*, *Xi'an* 710072, *P.R.China*)

(Contributed by DENG Zi-chen, M. AMM Editorial Board)

**Abstract**: Based on the precise Runge-Kutta method, in view of the characteristics of the non-homogeneous terms of the state space equations and the particular distribution of the loads, a new improved precise Runge-Kutta method was presented for solving the structural dynamic equations. Through partitioning of the related state space matrices, the improved method not only inherited the advantage of high precision of the precise Runge-Kutta method, but also greatly promoted the computational efficiency, making it suitable for solving large-scale structural dynamic problems and conducting long-time simulations. The results of numerical examples show the correctness and validity of the proposed simplified method.

**Key words**: structural dynamic equation; precise integration; simplified calculation; Runge-Kutta method

**Foundation item**: The National Natural Science Foundation of China (Key Program) (11432010); The National Basic Research Program of China (973 Program) (2011CB610300)