

拟弧长延拓法在静电激励 MEMS 吸合特性研究中的应用*

梁斌斌¹, 张 龙¹, 王炳雷^{1,2}, 周慎杰³

- (1. 山东大学 工程力学系, 济南 250061;
2. 机械结构强度与振动国家重点实验室(西安交通大学), 西安 710049;
3. 山东大学 机械工程学院, 济南 250061)

摘要: 在静电激励微机电系统 MEMS(micro-electro-mechanical systems)吸合特性研究中,基于应变梯度理论的微梁结构的控制方程是非线性高阶微分方程,给方程的求解带来了困难.由于该问题的数学模型本质上是分叉问题,方程的解支上出现奇异点,而运用局部延拓法无法通过奇异点,因此,通过运用广义微分求积法将控制方程降阶离散,结合拟弧长延拓法使迭代顺利通过奇异点,求出了整个解曲线.结果表明,拟弧长延拓法能有效并准确地求解具有分叉现象的高阶微分方程问题,为精确预测静电激励 MEMS 的吸合电压提供有力帮助.

关键词: MEMS; 吸合特性; 奇异点; 拟弧长延拓法

中图分类号: O302 **文献标志码:** A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2015.04.006

引 言

随着科学技术的发展,静电激励微机电系统 MEMS 以其体积小、重量轻、能耗低、谐振频率高以及响应时间短等诸多优点,在物理、化学和生物等多个领域中得到了广泛应用,如谐振器、传感器、微型全分析系统等.研究吸合特性,计算吸合电压值是这类结构研究和设计的关键.国内外很多学者基于经典梁理论研究了静电激励微梁的吸合特性.由于系统的控制方程是非线性微分方程,要得到闭合的解析解非常困难,于是,数值分析方法成为研究这类非线性问题的合适选择.在 Galerkin(伽辽金)方法的基础上,Younis 等^[1]研究了静电激励微梁的静动态吸合特性,Pamidighantam 等^[2]用有限元方法研究了两端固支和悬臂微梁的静态激励吸合电压,Kuang 等^[3]运用微分求积法研究了固支微梁的动态特性.但实验发现微尺度结构存在尺寸效应,使得经典理论无法给出合理的解释.徐晓建等^[4]基于非局部理论和表面能理论研究了微纳米传感器振动特性.Lam 等^[5]在 Mindlin^[6]高阶应力理论的基础上提出了应变梯度弹性理论.基于应变梯度理论,Kong(孔胜利)等^[7]研究了 Euler(欧拉)梁的尺寸效应,Wang(王炳雷)

* 收稿日期: 2014-10-30; 修订日期: 2014-12-18

基金项目: 国家自然科学基金(11202117;11272186);山东省自然科学基金(ZR2012AM014;BS2012ZZ006)

作者简介: 梁斌斌(1991—),男,贵州遵义人,硕士生(E-mail: binliang-100@163.com);

王炳雷(1980—),男,山东泰安人,讲师,博士,硕士生导师(通讯作者. E-mail: bwang@sdu.edu.cn).

等^[8-10]提出了 Timoshenko(铁木辛柯)梁、Kirchhoff 微板的尺寸效应模型,又研究了静电激励微梁的吸合特性尺寸效应,其结果与实验结果非常吻合。

本文基于应变梯度理论,建立静电激励微梁模型,运用广义微分求积法对其控制方程降阶离散.广义微分求积法是 Shu 和 Richards^[11]在 Bellman 等^[12]的微分求积法基础上提出来的,可以用任意的离散形式来确定第一阶的离散点加权系数.但降阶后的方程的解支上有奇异点出现,局部延拓法无法求出方程完整的解.于是引入拟弧长延拓法^[13],这是上世纪 70 年代末, Keller^[14]和 Riks^[15]用来研究非线性分歧问题的一种方法.拟弧长延拓法的思想是在局部延拓法的基础上,引入拟弧长参数,将原来的方程替换成由拟弧长参数来表示的参数方程,并加入拟弧长条件,从而使迭代能够顺利的通过奇异点.本文借助于拟弧长延拓法的计算思想,使方程得以顺利求解,进而研究两端固支梁模型的静电激励 MEMS 的吸合特性尺寸效应。

1 拟弧长延拓法计算思想

拟弧长延拓法是解决非线性问题的有效方法^[13],考虑:

$$f(\mathbf{u}, \lambda) = \mathbf{0}, \quad (1)$$

其中, $f: R^n \times R \rightarrow R^n$, $\lambda \in R$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, u_n)$, $\mathbf{u} \in R^n$.

假定 $(\mathbf{u}^*, \lambda^*)$ 是解支 Γ 上的一个点, $(\dot{\mathbf{u}}^*, \dot{\lambda}^*)$ 是该点处的单位切向量.引入拟弧长参数 s 把原来的变量 \mathbf{u} 和 λ 看作是 s 的函数,得到下面的拟弧长条件:

$$F(\mathbf{u}, \lambda, s) = \dot{\mathbf{u}}^* \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) + \dot{\lambda}^* \cdot (\lambda - \lambda^*) - (s - s^*) = 0. \quad (2)$$

这里, $\Delta s = s - s^*$, 表示沿向量 $(\dot{\mathbf{u}}^*, \dot{\lambda}^*)$ 方向上离开点 $(\mathbf{u}^*, \lambda^*)$ 的距离. $(\dot{\mathbf{u}}^*, \dot{\lambda}^*)$ 是过点 $(\mathbf{u}^*, \lambda^*)$ 的单位切向量,如图 1 所示.由式(2)进一步整理得到

$$\boldsymbol{\tau} \cdot [(\mathbf{u}^p, \lambda^p) - (\mathbf{u}, \lambda)]^T = 0, \quad (3)$$

其中, $\boldsymbol{\tau} = (\dot{\mathbf{u}}^*, \dot{\lambda}^*)$, $(\mathbf{u}^p, \lambda^p) = (\mathbf{u}^*, \lambda^*) + \Delta s \cdot \boldsymbol{\tau}$.

式(3)是运用拟弧长法求解非线性方程组(1)所需引入的拟弧长条件.于是求解非线性方程组(1)就变成求解非线性方程组(4),表示如下:

$$\begin{cases} f(\mathbf{u}, \lambda) = \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{\tau} \cdot [(\mathbf{u}^p, \lambda^p) - (\mathbf{u}, \lambda)]^T = 0, \end{cases} \quad (4)$$

其中, $\boldsymbol{\tau}$ 可以由线性方程组(5)求得.

$$\begin{cases} [f_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}^*, \lambda^*), f_{\lambda}(\mathbf{u}^*, \lambda^*)] \cdot \boldsymbol{\tau}^T = 0, \\ |\boldsymbol{\tau}| - 1 = 0. \end{cases} \quad (5)$$

令 $\mathbf{y} = [\mathbf{u}, \lambda] = [u_1, u_2, \dots, u_n, \lambda]$, 式(4)可表示为

$$N(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} f(\mathbf{y}) \\ \boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{y}^p - \mathbf{y})^T \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (6)$$

式(5)可表示为

$$\begin{cases} f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}) \cdot \boldsymbol{\tau}^T = 0, \\ |\boldsymbol{\tau}| - 1 = 0. \end{cases} \quad (7)$$

$f(\mathbf{y})$ 的 Jacobi(雅可比)矩阵 $D_{f(\mathbf{y})}$ 可表示为

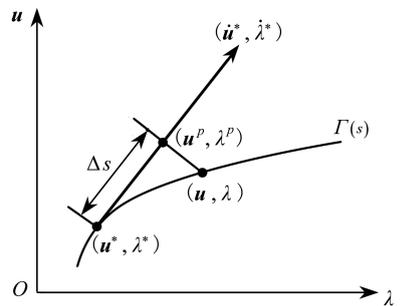


图 1 拟弧长延拓法计算思想图解

Fig. 1 Idea diagram of the pseudo-arclength continuation algorithm

$$D_{f(y)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial y_1} & \frac{\partial f}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial y_{n+1}} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

令

$$J_i = (-1)^{i+1} \det \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial y_{i-1}} & \frac{\partial \hat{f}}{\partial y_i} & \frac{\partial f}{\partial y_{i+1}} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial y_{n+1}} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

这里, 向量上的“ $\hat{\cdot}$ ”表示从该矩阵中去掉这一列. 于是可以得到

$$V(y) = (J_1, J_2, \cdots, J_n, J_{n+1})^T. \quad (10)$$

显然, $V(y)$ 是式(7) 中线性方程组 $f_y(y) \cdot \tau^T = 0$ 的一个解向量. 于是只需单位化 $V(y)$ 便可求出 τ :

$$\tau = V(y) / \|V(y)\|. \quad (11)$$

根据上述推导, 若函数 f 的初始点 $y_0 = (u_0, \lambda_0)$, 取 $\Delta s (\Delta s \ll 1)$, 就可以得到

$$y_1^p = y_0 + \Delta s \cdot \tau_0, \quad (12)$$

其中, τ_0 由线性方程组(7) 计算得到. 然后求解非线性方程组(6), 即: 沿 τ_0 的法线方向经迭代至收敛, 可以得到函数 $N(y)$ 的解 y_1 , 如图 2(a) 所示.

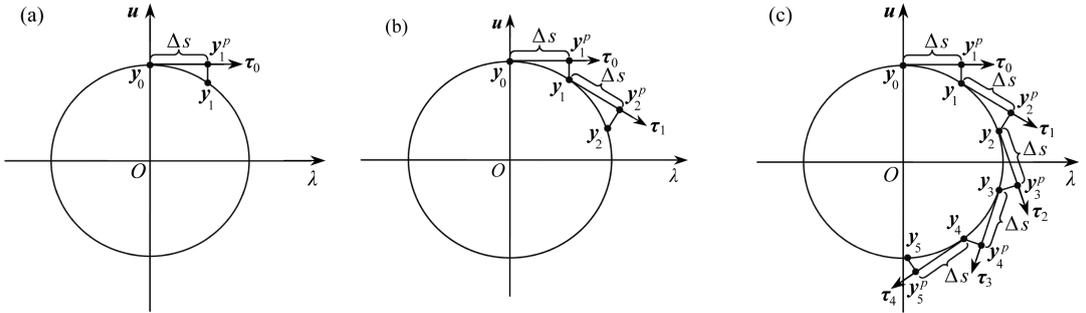


图 2 拟弧长延拓法流程图

Fig. 2 Iteration process diagram of the pseudo-arclength continuation algorithm

$$y_1 = [u^1, \lambda^1] = [u_1^1, u_2^1, \cdots, u_n^1, \lambda^1]. \quad (13)$$

显然, y_1 是函数 f 的解, 于是按照上述方法, 由 y_1 和 $\Delta s (\Delta s \ll 1)$ 可以得到 y_2^p , 然后解非线性方程组(6): 沿 τ_1 的法线方向迭代至收敛可以得到 y_2 , 如图 2(b) 所示. 依次类推便可以求出整个解曲线, 如图 2(c) 所示.

2 基于应变梯度理论的两端固支微梁模型

图 3 是典型的两端固支静电激励微梁结构. 它是由一个可变形的微梁(长度 l 、宽度 b 、厚度 h) 和一个固定电极构成. 两电极之间是空气或真空等介质, 初始距离为 g . 在两电极之间施加电压后, 由于静电力的作用, 可变电极发生弯曲变形. 当施加的电压超过某一个临界值时, 电极之间的静电载荷将大于可变电极变形引起的恢复力, 导致其变形突然增加而与固定电极粘接在一起, 这就是吸合现象. 此时, 所对应的电压和位移分别是吸合电压 V_{pl} 和吸合位移 w_{pl} .

对于静态问题, 基于应变梯度理论^[5,10], 该静电激励微梁的归一化控制方程可表示为

$$a_0 \frac{d^6 w}{dx^6} + \frac{d^4 w}{dx^4} = \left[a_1 \int_0^1 \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx + N \right] \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{a_2 V^2}{(1-w)^2}, \quad (14)$$

其中

$$\begin{cases} a_0 = -\frac{K}{Sl^2}, a_1 = \frac{EAg^2}{2S}, a_2 = \frac{\bar{\varepsilon}bl^4}{2Sg^3}, N = \frac{l^2}{S}\hat{N}, \\ K = \mu I \left(2l_0^2 + \frac{4}{5}l_1^2 \right), S = EI + \mu A \left(2l_0^2 + \frac{8}{15}l_1^2 + l_2^2 \right), \end{cases} \quad (15)$$

其中, μ 是材料剪切模量, E 是材料弹性模量, A 是梁横截面面积, \hat{N} 是轴向拉伸或压缩力, $\bar{\varepsilon}$ 是介电常数, l_0, l_1 和 l_2 是材料内禀参数。

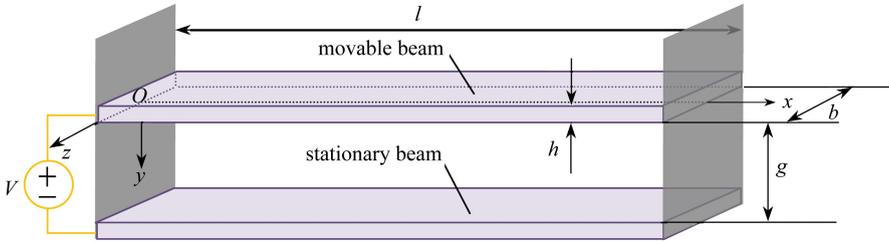


图3 静电激励微梁结构示意图

Fig. 3 Schematic of an electrostatically actuated microbeam

基于广义微分求积法^[11], $e^{(k)}$ 是未考虑边界条件的 k 阶权系数矩阵 (n 阶矩阵), 相应无量纲边界条件为

$$w_1 = 0, w_n = 0; \sum_{j=1}^N e_{ij}^{(1)} w_j = 0, \sum_{j=1}^N e_{nj}^{(1)} w_j = 0; \sum_{j=1}^N e_{ij}^{(3)} w_j = 0, \sum_{j=1}^N e_{nj}^{(3)} w_j = 0. \quad (16)$$

引入边界条件, 结合广义微分求积法, 可将式(14)整理为

$$f(w, V) = a_0 \{ c_{ij}^{(6)} w_j \} + \{ c_{ij}^{(4)} w_j \} - \left[a_1 \sum_{k=1}^N C_k (e_{kj}^{(1)} w_j)^2 + N \right] \{ c_{ij}^{(2)} w_j \} - a_2 V^2 \left[\frac{1}{(1 - w_j)^2} \right] = 0. \quad (17)$$

上式的张量表示中, i 和 j 取 $1 \sim (n - 6)$, $c^{(m)}$ 是引入边界条件后的第 m 阶权系数矩阵 ($n - 6$ 阶矩阵), C_k 表示如下:

$$C_k = \int_0^1 \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^N \frac{x - x_i}{x_k - x_i} dx. \quad (18)$$

3 数值计算结果与讨论

在实际工程中, 材料的 3 个内禀参数 l_0, l_1 和 l_2 通常是不相同的, 它们是通过不同尺寸试件基本力学实验获得, 如单轴拉伸、压缩, 弯曲试验以及纯扭转试验。为了计算的方便, 假设材料的 3 个内禀参数都一样, 即: $l_0 = l_1 = l_2 = C_l$ 。

通过一个具体的实例来阐述拟弧长法在静电激励 MEMS 吸合特性尺寸效应研究中的应用。设 $C_l = 0$, 计算其最大无量纲位移 (即梁中点处位移) 与电压 V 的关系曲线, 如图 4 所示。计算所用的参数为: $l = 510 \mu\text{m}$, $b = 100 \mu\text{m}$, $h = 1.5 \mu\text{m}$, $g = 1.18 \mu\text{m}$ 以及残余应变 40.4×10^{-6} , 材料弹性模量 $E = 151 \text{ GPa}$, Poisson (泊松) 比 $\nu = 0.3$, 与文献[16]中参数保持一致。从图 4 中可看出, 解支在点划线与实线交汇处产生分歧 (即分叉), 交点就是解支上的奇异点, 如果运用局部延拓法只能求出稳定区域内的解支 (即实线部分), 无法通过奇异点求出不稳定区域内的解支 (点划线部分)。而应用拟弧长延拓法能使迭代顺利通过奇异点, 计算出不稳定区域内的解支。并且在图 4 中, 点划线与实线的交点所对应的电压就是所求的吸合电压 V_{pl} , 为 6.45 V 。与

文献[16]的实验结果 6.57 V 相比,误差为 1.75%。同时比 Kuang-Chen^[3]的研究结果 6.40 V 和 Rokni 等^[17]研究的结果 6.42 V 更接近实验结果^[16]。这表明该模型和求解算法是可靠的。需要说明的是,不稳定区域仅仅是理论稳定点,只能在理想状态下存在,实际当中不能出现。因为在不稳定区域,任何一个细微的干扰都会打破平衡。

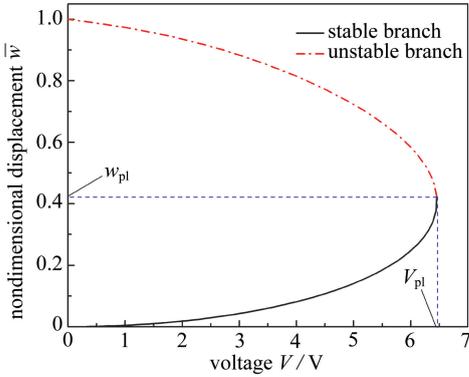


图4 无量纲位移与电压的关系曲线

Fig. 4 The curves of nondimensional displacement vs. voltage

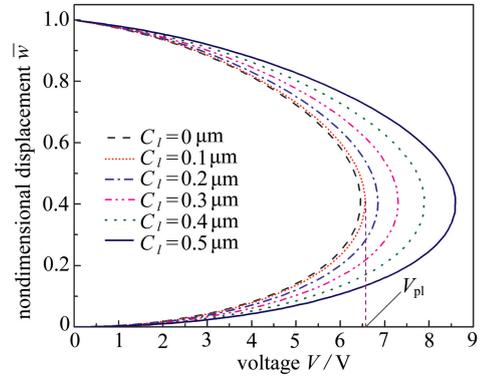


图5 不同内禀参数对应的无量纲位移与电压的关系曲线

Fig. 5 The curves of nondimensional displacement vs. voltage for different material intrinsic parameters

下面研究不同材料内禀参数对于吸合电压的影响。同上一算例所用的几何参数和材料参数,而考虑不同的材料内禀参数,计算结果如图5所示。从图中可见,随着内禀参数的递增,所求得的吸合电压 V_{pi} 也随之增大,这是由于材料内禀参数的增加会使得控制方程中的高阶项系数变大,使得材料的弹性恢复力增大,因而就需要更大的吸合电压才能使系统达到平衡状态。从图5可见,考虑 $C_l = 0.1 \mu\text{m}$, 得 $V_{pi} = 6.56 \text{ V}$, 与实验结果^[16]相比,误差仅为 0.15%。这说明基于应变梯度理论,上个实例中,若材料内禀参数取 $0.1 \mu\text{m}$, 计算结果与实验结果^[16]吻合得更好。这也正好与 Aifantis^[18]所得的结论(多晶硅材料内禀常数在 $0.1 \mu\text{m}$ 的数量级)相吻合。并且,从图4和5中不难发现,运用拟弧长法可以使迭代顺利通过解支上的奇异点,从而求出整条解曲线。

4 结 论

本文基于应变梯度理论和广义微分求积法,引入拟弧长延拓法计算思想,解决了静电激励 MEMS 研究中的解支分叉问题。拟弧长延拓法有效地跟踪解支,并使迭代顺利地通过了奇异点,快速地使结果达到了收敛。数值结果表明:一方面,基于应变梯度理论的这个新尺寸效应模型能很好地预测静电激励 MEMS 的吸合特性;另一方面,拟弧长延拓法能有效并准确地解决静电激励 MEMS 吸合特性研究中的微分方程解支分叉问题。

致谢 作者衷心感谢机械结构强度与振动国家重点实验室(西安交通大学)开放课题对本文的资助。

参考文献 (References):

- [1] Younis M I, Abdel-Rahman E M, Nayfeh A. A reduced-order model for electrically actuated microbeam-based MEMS[J]. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 2003, 12(5): 672-

- 680.
- [2] Pamidighantam S, Puers R, Baert K, Tilmans H A C. Pull-in voltage analysis of electrostatically actuated beam structures with fixed-fixed and fixed-free end conditions[J]. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 2002, **12**(4): 458-464.
- [3] Kuang J H, Chen C J. Dynamic characteristics of shaped micro-actuators solved using the differential quadrature method[J]. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 2004, **14**(4): 647-655.
- [4] 徐晓建, 邓子辰. 非局部因子和表面效应对微纳米材料振动特性的影响[J]. *应用数学和力学*, 2013, **34**(1): 10-17. (XU Xiao-jian, DENG Zi-chen. Surface effects of adsorption-induced resonance analysis of micro/nanobeams via nonlocal elasticity [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2013, **34**(1): 10-17. (in Chinese))
- [5] Lam D C C, Yang F, Chong A C M, Wang J, Tong P. Experiments and theory in strain gradient elasticity[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2003, **51**(8): 1477-1508.
- [6] Mindlin R D. Second gradient of strain and surface-tention in linear elasticity[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1965, **1**(4): 417-438.
- [7] KONG Sheng-li, ZHOU Shen-jie, NIE Zhi-feng, WANG Kai. Static and dynamic analysis of micro beams based on strain gradient elasticity theory[J]. *International Journal of Engineering Science*, 2009, **47**(4): 487-498.
- [8] WANG Bing-lei, ZHAO Jun-feng, ZHOU Shen-jie. A micro scale Timoshenko beam model based on strain gradient elasticity theory [J]. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 2010, **29**(4): 591-599.
- [9] WANG Bing-lei, ZHOU Shen-jie, ZHAO Jun-feng, CHEN Xi. A size-dependent Kirchhoff micro-plate model based on strain gradient elasticity theory[J]. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 2011, **30**(4): 517-524.
- [10] WANG Bing-lei, ZHOU Shen-jie, ZHAO Jun-feng, CHEN Xi. A size-dependent pull-in instability of electrostatically actuated microbeam-based MEMS[J]. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 2011, **21**(2): 027001.
- [11] SHU Chang, Richards B E. Application of generalized differential quadrature to solve 2-dimensional incompressible Navier-Stokes equations [J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 1992, **15**(7): 791-798.
- [12] Bellman R, Casti J, Kashef B G. Differential quadrature-technique for rapid solution of nonlinear partial differential equations[J]. *Journal of Computational Physics*, 1972, **10**(1): 40-52.
- [13] 杨忠华. 非线性分歧:理论和计算[M]. 北京: 科学出版社, 2007: 41-49. (YANG Zhong-hua. *Nonlinear Bifurcation: Theory and Calculation*[M]. Beijing: Science Press, 2007: 41-49. (in Chinese))
- [14] Keller H B. *Numerical Solution of Bifurcation and Nonlinear Eigenvalue Problems, in Applications of Bifurcation Theory*[M]. Rabinowitz P H ed. New York: Academic Press Inc, 1977.
- [15] Riks E. Incremental approach to the solution of snapping and buckling problems[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1979, **15**(7): 529-551.
- [16] Tilmans H A C, Legtenberg R. Electrostatically driven vacuum-encapsulated polysilicon resonators—part II: theory and performance[J]. *Sensors and Actuators A: Physical*, 1994, **45**(1): 67-84.
- [17] Rokni H, Seethaler R J, Milani A S, Hosseini-Hashemi S, LI Xian-fang. Analytical closed-form

solutions for size-dependent static pull-in behavior in electrostatic micro-actuators via Fredholm integral equation[J]. *Sensors and Actuators A: Physical*, 2013, **190**: 32-43.

- [18] Aifantis E C. Exploring the applicability of gradient elasticity to certain micro/nano reliability problems[J]. *Microsystem Technologies*, 2009, **15**(1): 109-115.

Application of the Pseudo-Arclength Continuation Algorithm to Investigate the Size-Dependent Pull-in Instability of the Electrostatically Actuated MEMS

LIANG Bin-bin¹, ZHANG Long¹, WANG Bing-lei^{1,2}, ZHOU Shen-jie³

(1. *Department of Engineering Mechanics, Shandong University, Jinan 250061, P.R.China;*

2. *State Key Laboratory for Strength and Vibration of Mechanical Structures (Xi'an Jiaotong University), Xi'an 710049, P.R.China;*

3. *School of Mechanical Engineering, Shandong University, Jinan 250061, P.R.China)*

Abstract: In the study of the electrostatically actuated MEMS (micro-electro-mechanical systems), based on the strain gradient elasticity theory, the governing equations for the microbeam are nonlinear differential equations that are difficult to solve. The mathematical model for this problem is of essential bifurcation, and the solution branches of the equations have inflection points. The iteration process can't go through the inflection points with the local continuation method. Therefore, the generalized differential quadrature method was applied to discretize and reduce the order of the governing equations, and the pseudo-arclength continuation algorithm was used to enable the iteration process to go smoothly through the inflection points, with the complete solution curve calculated. The numerical results show that the pseudo-arclength continuation algorithm makes an effective way precisely solving the nonlinear high-order differential equations with bifurcation phenomenon embedded, and helps to accurately predict the pull-in voltage of the electrostatically actuated MEMS.

Key words: MEMS; pull-in instability; inflection point; pseudo-arclength continuation algorithm

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11202117; 11272186)