

# 连接阻尼对弹性杆纵向碰撞响应的影响\*

焦晓娟, 马建敏

(复旦大学 力学与工程科学系, 上海 200433)

**摘要:** 分析了刚度和阻尼并存的一般边界条件下弹性杆与刚体的纵向碰撞过程,得到了碰撞后第一个波动周期杆振动的位移、速度和应力的解析表达式,讨论了碰撞持续时间为2倍杆长与波速比的条件.将导出的解析表达式通过具体的算例代入计算,讨论了不同质量比、不同连接刚度条件下连接阻尼对于碰撞过程中杆中质点速度及应力响应的影响.研究表明,连接阻尼改变了受碰撞弹性杆的振动模式,连接阻尼影响着碰撞反射波速度和应力的突变幅度;连接阻尼增大,杆中速度和应力响应分布变平缓;在连接刚度较大的情况下,连接阻尼变化对于杆中质点速度和应力影响较大;碰撞持续时间与质量比、连接刚度、连接阻尼及杆长有关,与碰撞的初速度无关;在质量比较大的情况下,连接阻尼使得反射波到达杆碰撞端时,杆端的应力有显著的变化.

**关键词:** 弹性杆; 纵向碰撞; 连接阻尼; 波动分析法

**中图分类号:** TB122; TB123; O327; O347.4<sup>+</sup>1      **文献标志码:** A

**doi:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2015.04.007

## 引言

碰撞是工程实践中的常见现象,碰撞模型的正确处理是解决接触碰撞动力学问题的关键所在<sup>[1]</sup>.在过去的几十年间,对碰撞问题的研究主要集中在高速碰撞领域,高速碰撞分析的重点侧重在碰撞前后的效果.而目前人们所关注的非破坏性低速碰撞问题,更加强调碰撞接触的短暂瞬间各参量的动态变化及碰撞后结构的动力学响应,对计算精度要求较高.对于经典的杆碰撞问题,国内外学者在建模理论、计算方法和实验研究等方面针对特殊边界条件(固定或自由)杆与刚体纵向碰撞做了大量的工作.Timoshenko等<sup>[2]</sup>给出了质点与均匀弹性杆纵向碰撞波传播的解析解;诸德超、邢誉峰<sup>[3]</sup>把刚体撞击弹性体问题视为由接触力连接的振动系统,给出了系统的特征频率和特征方程的分析表达式;马炜等<sup>[4]</sup>根据应力波传播过程中波的叠加规律,得到了一维弹性杆轴向碰撞过程的应力函数、位移函数的解析解;蹇朋波等<sup>[5]</sup>和Shen(沈煜年)等<sup>[6]</sup>分别采用动态子结构方法,得到了撞击引发的弹塑性波传播、反射、弹性波和塑性波相互作用等瞬态波传播规律;李敏等<sup>[7]</sup>依据Hertz接触理论,利用NASTRAN软件数据卡实现非线性接触力的导入,进而通过常规动力响应分析方法计算出低速碰撞杆的速度响应,并与试验数据进行了比较;剧锦三等<sup>[8]</sup>使用数值方法得到了不同质量比、不同冲击速度时的弹性和弹塑性冲击荷载;Behner等<sup>[9]</sup>通过金刚砂与自由杆在不同速度下的碰撞实验得到碰撞不同阶段的渗透性能;Argatov等<sup>[10]</sup>采用Kelvin-Voigt单元研究了半无限长杆碰撞的解析解,并针

\* 收稿日期: 2014-09-09; 修订日期: 2015-02-16

作者简介: 焦晓娟(1975—),女,河南孟津人,高级工程师(E-mail: 11110290005@fudan.edu.cn);  
马建敏(1960—),男,陕西人,教授(通讯作者. E-mail: jmama@fudan.edu.cn).

对压缩脉冲时间研究了接触刚度的优化问题; Seifried 等<sup>[11]</sup>分析了自由边界粘塑性材料杆碰撞的恢复系数; Willmott 等<sup>[12]</sup>通过实验研究了玻璃杆在 Taylor(泰勒)碰撞过程冲击压力和失效的关系; Gan 等<sup>[13]</sup>利用传递矩阵研究了变截面阶梯杆中纵波的传播; Shen 等<sup>[14]</sup>分析了一端固定的分级蜂窝杆受撞之后的变形模式并与有限元分析结果进行了对比; Bityurin 等<sup>[15]</sup>研究了刚性约束阶梯杆的碰撞问题,通过解析法研究了具有初速度的阶梯杆与刚性边界碰撞的临界速度<sup>[16]</sup>;对于一般边界条件的杆与刚体的纵向碰撞问题,吴家强等<sup>[17]</sup>以模态分析法、张继业等<sup>[18]</sup>以波传播分析法分别以连接刚度表示边界连接条件给出了碰撞过程的详细分析,获得了碰撞过程杆振动的解析解,并分析得到了碰撞持续时间为 2 倍杆长与波速的比.对于含连接阻尼的一般边界条件杆与刚体的碰撞问题,目前则鲜有人研究.本文采用波动分析法对刚体与含连接阻尼的一般边界条件线弹性杆的纵向碰撞过程进行了研究,旨在探讨连接阻尼对刚体与弹性杆纵向碰撞过程的杆速度响应、应力响应以及碰撞持续时间的影响.从弹性杆的纵向控制方程出发,通过同时考虑连接边界的阻尼和刚度,建立含连接阻尼的弹性杆碰撞模型,进而得到阻尼与刚度并存的一般边界连接条件下弹性杆与刚体碰撞过程第一个波动周期内杆振动的位移、应力和速度分布的解析解表达式,通过杆碰撞端的应力正负情况判定,讨论了刚体与弹性杆碰撞持续时间的影响因素.最后将含连接阻尼的杆碰撞第一波动周期的杆速度、应力表达式以具体的算例代入计算并分析讨论了连接阻尼在相同连接刚度、不同连接刚度、不同质量比情况下对杆中速度响应、应力响应的影响.

## 1 含连接阻尼的弹性杆碰撞模型

如图 1 所示,均匀线弹性杆长为  $L$ ,横截面积为  $A$ ,质量密度为  $\rho$ ,弹性模量为  $E$ ,杆连接端的弹簧系数(简称连接刚度)为  $k$ ,连接端的阻尼系数(简称连接阻尼)为  $C_b$ .刚体块质量为  $M$ ,以初速  $v$  与初始静止的线弹性杆纵向相撞.以  $Ox$  为坐标系,以刚体块接触杆碰撞端的第一瞬间计为  $t = 0$ ,杆中  $x$  位置的质点在  $t$  时刻的位移以  $u(x, t)$  表示.

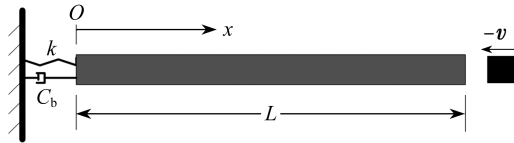


图 1 含连接阻尼的弹性杆与刚体块纵向碰撞模型

Fig. 1 The longitudinal impact model for an elastic rod with damping boundary condition

弹性杆的纵向控制方程<sup>[8]</sup>为

$$\rho A \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = EA \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}. \quad (1)$$

St.Venant 方法在处理弹性杆纵向碰撞问题<sup>[4]</sup>时认为,当刚体与弹性杆碰撞时,弹性杆的碰撞端面在碰撞瞬时即获得了与碰撞刚体相同的速度,这一思想可以等效为刚体与弹性杆在碰撞接触边界处位移和速度是连续的,即在撞击持续过程中碰撞面的两侧具有相同的位移和速度.

弹性杆初始静止,综上可得初始条件为

$$u(x, 0) = 0 \quad (0 \leq x \leq L), \quad (2)$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \begin{cases} 0 & (0 \leq x < L), \\ -v & (x = L). \end{cases} \quad (3)$$

碰撞发生过程中,由刚体块的动力学平衡方程可以得到碰撞端的边界条件为

$$AE \frac{\partial u(L,t)}{\partial x} = -M \frac{\partial^2 u(L,t)}{\partial t^2}. \quad (4)$$

根据弹性杆连接端的力平衡条件,得到边界条件为

$$AE \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} - ku(0,t) - C_b \frac{\partial u(0,t)}{\partial t} = 0. \quad (5)$$

弹性杆纵向控制方程、杆的边界条件及杆的初始条件,即式(1)~(5),构成了含连接阻尼的弹性杆碰撞模型。

## 2 含连接阻尼的碰撞过程求解

弹性杆的纵向控制方程(1)的通解为

$$u(x,t) = \bar{f}_1(ct-x) + \bar{f}_2(ct+x),$$

其中  $c^2 = E/\rho$ ,  $c$  为波速。

根据弹性杆的连续性,碰撞过程中位移  $u(x,t)$  连续,即  $\bar{f}_1, \bar{f}_2$  是连续函数。下面将弹性杆振动的通解表达式代入弹性杆初始条件、边界条件,根据  $\bar{f}_1, \bar{f}_2$  的连续性,经变量代换,分段获得  $\bar{f}_1, \bar{f}_2$  的表达式,进一步得到杆振动的位移、应力和速度表达式。

利用式(3)的初始条件,在  $0 \leq x < L$  时:

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = c\bar{f}_1'(-x) + c\bar{f}_2'(x) = 0, \\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial x} = -\bar{f}_1'(-x) + \bar{f}_2'(x) = 0. \end{cases}$$

从而可以得到,在  $0 \leq x < L$  时,  $\bar{f}_2(x) = -\bar{f}_1(-x) = -C_1$ , 其中  $C_1$  为待定常数。

令

$$ct = z, \beta = \frac{-k}{AE + C_b c}, \gamma = \frac{AE - C_b c}{AE + C_b c},$$

结合式(5)可得

$$\begin{cases} -\bar{f}_1'(z) + \beta\bar{f}_1(z) + \beta C_1 = 0 & (0 \leq z < L), \\ [\bar{f}_1'(z) - \gamma\bar{f}_2'(z) - \beta[\bar{f}_1(z) + \bar{f}_2(z)]] = 0 & (z \geq 0). \end{cases} \quad (6)$$

由式(6)可得,  $0 \leq z < L$  时,  $\bar{f}_1(z) = C_1(e^{\beta z} + 1)$ , 即  $\bar{f}_1(0) = C_1(1 + 1) = 2C_1$ , 而  $\bar{f}_1(-0) = C_1$ , 从而可知,  $C_1 = 0$ , 即

$$\begin{cases} \bar{f}_1(z) = 0 & (0 \leq z < L), \\ \bar{f}_2(z) = 0 & (0 \leq z < L). \end{cases} \quad (7)$$

令  $\lambda = M/(AL\rho)$ ,  $\tilde{z} = ct + L$ , 结合碰撞端边界条件(4)得

$$\bar{f}_2''(\tilde{z}) + \frac{1}{\lambda L} \bar{f}_2'(\tilde{z}) = -\bar{f}_1''(\tilde{z} - 2L) + \frac{1}{\lambda L} \bar{f}_1'(\tilde{z} - 2L) \quad (\tilde{z} \geq L). \quad (8)$$

在  $L \leq \tilde{z} < 3L$  时, 即  $0 \leq \tilde{z} - 2L < L$ , 式(8)变为

$$\bar{f}_2''(\tilde{z}) + \frac{1}{\lambda L} \bar{f}_2'(\tilde{z}) = 0 \quad (L \leq \tilde{z} < 3L).$$

进一步求解,可得到

$$\bar{f}_2'(\tilde{z}) = C_2 e^{-\tilde{z}/(\lambda L)} \quad (L \leq \tilde{z} < 3L). \quad (9)$$

那么,式(9)中的待定系数  $C_2 = \bar{f}_2'(L) e^{L/(\lambda L)}$ , 以  $(-L+0)$  与  $(L+0)$  表示右极限,由碰撞端初始条件(3)并结合式(7)可得

$$\bar{f}_2'(L) = \bar{f}_2'(L+0) = -\frac{v}{c}.$$

所以,在  $L \leq \tilde{z} < 3L$  时,即  $L \leq ct + L < 3L$  时有

$$\bar{f}_2'(\tilde{z}) = -\frac{v}{c} e^{-(\tilde{z}-L)/(\lambda L)} \quad (L \leq \tilde{z} < 3L). \quad (10)$$

根据  $u(L,0)$  的连续性,以及  $\bar{f}_1(-L+0) = \bar{f}_2(L) = 0$ , 可得到

$$\bar{f}_1(-L-0) + \bar{f}_2(L-0) = \bar{f}_1(-L+0) + \bar{f}_2(L+0) = 0.$$

由式(10)进一步得到

$$\begin{aligned} \bar{f}_2(\tilde{z}) &= \lambda L \frac{v}{c} e^{-(\tilde{z}-L)/(\lambda L)} + \bar{f}_2(L) - \lambda L \frac{v}{c} = \\ & \lambda L \frac{v}{c} (e^{-(\tilde{z}-L)/(\lambda L)} - 1) \quad (L \leq \tilde{z} < 3L). \end{aligned} \quad (11)$$

结合式(6)、(10)、(11)可得

$$\begin{aligned} \bar{f}_1'(z) - \beta \bar{f}_1(z) &= \\ & -\frac{v}{c} \gamma e^{-(z-L)/(\lambda L)} + \left[ \beta \lambda L \frac{v}{c} (e^{-(z-L)/(\lambda L)} - 1) \right] \quad (L \leq z < 3L). \end{aligned} \quad (12)$$

根据式(7)和(11),并结合  $u(x,t)$  在  $(0, L/c)$  点的连续性,可得

$$\begin{aligned} \bar{f}_1(z) &= \frac{v}{c} \left( -\frac{\lambda^2 L^2 \beta}{\lambda \beta L + 1} e^{-(-L+z)/(\lambda L)} + \lambda L + \frac{\lambda L}{\lambda \beta L + 1} e^{-(-L+z)/(\lambda L)} - \right. \\ & \left. \frac{\lambda L(1+\gamma)}{\lambda \beta L + 1} e^{\beta(z-L)} \right) \quad (L \leq z < 3L), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \bar{f}_1'(z) &= \frac{v}{c} \left( \frac{\lambda \beta L}{\lambda \beta L + 1} e^{-(-L+z)/(\lambda L)} - \frac{1}{\lambda \beta L + 1} e^{-(-L+z)/(\lambda L)} - \right. \\ & \left. \frac{\lambda L \beta (1+\gamma)}{\lambda \beta L + 1} e^{\beta(z-L)} \right) \quad (L \leq z < 3L). \end{aligned} \quad (14)$$

式(13)、(14)要求  $\lambda \beta L + 1 \neq 0$ .

对于  $\lambda \beta L + 1 = 0$  的情况,根据式(7)和(11)、(12),并结合  $u(x,t)$  在  $(0, L/c)$  点的连续性,可得

$$\bar{f}_1(z) = \frac{v}{c} (1+\gamma) (e^{-(-L+z)/(\lambda L)} z - L) \quad (L \leq z < 3L), \quad (15)$$

$$\bar{f}_1'(z) = \frac{v}{c} (1+\gamma) e^{-(-L+z)/(\lambda L)} \left( 1 - \frac{z}{\lambda L} \right) \quad (L \leq z < 3L). \quad (16)$$

以上过程,可以得到含连接阻尼的弹性杆与刚体碰撞持续  $2L/c$  时间内(即一个波动周期)的杆振动位移、应力和速度的分布表达式。

当  $-L < ct - x \leq L, 0 \leq ct + x < L$  时,即波还未到达的区域:

$$u(x, t) = 0, \sigma(x, t) = 0, \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = 0. \quad (17)$$

当  $-L < ct - x \leq L, L \leq ct + x < 3L$  或  $0 < ct - x \leq L, L \leq ct + x < 3L$  时:

$$\begin{cases} u(x, t) = \lambda L \frac{v}{c} (e^{-(ct+x-L)/(\lambda L)} - 1), \\ \sigma(x, t) = -E \frac{v}{c} e^{-(ct+x-L)/(\lambda L)}, \\ \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = -ve^{-(ct+x-L)/(\lambda L)}. \end{cases} \quad (18)$$

当  $L \leq ct - x \leq 3L, L \leq ct + x < 3L$  时, 且  $\lambda\beta L + 1 \neq 0$  情况下:

$$\begin{cases} u(x, t) = \frac{v}{c} \left( \left( \frac{-\lambda^2 L^2 \beta + \lambda L}{\lambda\beta L + 1} \right) e^{-(ct+x-L)/(\lambda L)} + \lambda L - \frac{\lambda L(1 + \gamma)}{\lambda\beta L + 1} e^{\beta(ct-x-L)} \right) + \\ \lambda L \frac{v}{c} (e^{-(ct+x-L)/(\lambda L)} - 1), \\ \sigma(x, t) = E \frac{v}{c} \left( -\frac{\lambda L\beta - 1}{\lambda\beta L + 1} e^{-(ct+x-L)/(\lambda L)} + \frac{\lambda L\beta(1 + \gamma)}{\lambda\beta L + 1} e^{\beta(ct-x-L)} \right) - \\ E \frac{v}{c} e^{-(ct+x-L)/(\lambda L)}, \\ \dot{u}(x, t) = v \left( \frac{\lambda L\beta - 1}{\lambda\beta L + 1} e^{-(ct+x-L)/(\lambda L)} - \frac{\lambda L\beta(1 + \gamma)}{\lambda\beta L + 1} e^{\beta(ct-x-L)} \right) - ve^{-(ct+x-L)/(\lambda L)}. \end{cases} \quad (19)$$

当  $L \leq ct - x \leq 3L, L \leq ct + x < 3L$  时, 且  $\lambda\beta L + 1 = 0$  情况下:

$$\begin{cases} u(x, t) = \frac{v}{c} (1 + \gamma) (e^{-(ct-x-L)/(\lambda L)} (ct - x) - L) + \\ \lambda L \frac{v}{c} (e^{-(ct+x-L)/(\lambda L)} - 1), \\ \sigma(x, t) = E \frac{v}{c} (1 + \gamma) e^{-(ct-x-L)/(\lambda L)} \left( \frac{ct - x}{\lambda L} - 1 \right) - E \frac{v}{c} e^{-(ct+x-L)/(\lambda L)}, \\ \dot{u}(x, t) = v(1 + \gamma) e^{-(ct-x-L)/(\lambda L)} \left( -\frac{ct - x}{\lambda L} + 1 \right) - ve^{-(ct+x-L)/(\lambda L)}. \end{cases} \quad (19)'$$

以上式(17)~(19)是弹性直杆在受到刚块以初速  $v$  碰撞后, 第一波动周期内杆中不同位置的位移、速度、应力随时间变化的解析解。将具体算例的杆参数及刚块参数代入, 可直接得到碰撞后  $2L/c$  时间内杆中不同位置在各个时刻的位移、速度和应力。

### 3 含连接阻尼的弹性杆碰撞持续时间讨论

在刚体与杆碰撞过程中, 假定  $t = 2L/c$  时碰撞尚未结束, 杆碰撞端  $x = L$  处在此刻速度变化连续, 杆碰撞端承受压应力。一旦杆碰撞端部承受拉应力, 将与实际物理情况矛盾, 所以可采用碰撞端的应力的正负(即拉压应力)判断碰撞过程持续的时间。

在  $t = (2L/c)^-$  时刻,  $x = L$  面的应力为

$$\frac{\partial u(L, (2L - 0)/c)}{\partial x} = -\bar{f}'_1(L - 0) + \bar{f}'_2(3L - 0) = 0 + \left( -\frac{v}{c} e^{-2\lambda} \right) < 0.$$

根据速度连续  $\bar{f}'_1(L - 0) + \bar{f}'_2(3L - 0) = \bar{f}'_1(L + 0) + \bar{f}'_2(3L + 0)$ , 结合式(10)、(14)及

(16)有:

$\lambda\beta L + 1 \neq 0$ 时,

$$\bar{f}'_2(3L + 0) = -\frac{v}{c} e^{-2\lambda} + \frac{v}{c} \frac{\lambda\beta L\gamma + 1}{\lambda\beta L + 1};$$

$\lambda\beta L + 1 = 0$ 时,

$$\bar{f}'_2(3L + 0) = -\frac{v}{c} e^{-2\lambda} - \frac{v}{c}(1 + \gamma)\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right).$$

考虑  $t = (2L/c)^+$  时刻,  $x = L$  面的应力:

$$\frac{\partial u(L, (2L + 0)/c)}{\partial x} = -\bar{f}'_1(L + 0) + \bar{f}'_2(3L + 0) = \begin{cases} 2\frac{v}{c} \frac{\lambda\beta L\gamma + 1}{\lambda\beta L + 1} - \frac{v}{c} e^{-2\lambda} & (\lambda\beta L + 1 \neq 0), \\ -\frac{v}{c} e^{-2\lambda} - 2\frac{v}{c}(1 + \gamma)\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) & (\lambda\beta L + 1 = 0). \end{cases} \quad (20)$$

由式(20)可以看出,  $2L/c$  时刻碰撞结束的条件与质量比、连接刚度、连接阻尼以及杆长有关,与刚体初速度无关。 $t = 2L/c$  时刻刚体与弹性杆碰撞结束(即碰撞持续时间为  $2L/c$ ) 的条件是

$$\begin{cases} \frac{\lambda\beta L\gamma + 1}{\lambda\beta L + 1} > \frac{e^{-2\lambda}}{2} & (\lambda\beta L + 1 \neq 0), \\ (1 + \gamma)\left(\frac{1}{\lambda} - 1\right) > \frac{e^{-2\lambda}}{2} & (\lambda\beta L + 1 = 0). \end{cases} \quad (21)$$

#### 4 连接阻尼对于杆碰撞响应影响的计算分析

为了讨论连接阻尼对碰撞过程杆中质点的速度、应力影响,采用碰撞第一波动周期内杆振动的速度、应力解析式(18)和(19),将表1所列出的杆参数和刚体块参数进行代入计算,得到  $0 \leq t \leq 2L/c$  时间内杆中质点的应力和速度分布图。其中以无量纲量  $k_1 = kL/(AE)$  表示相对连接刚度,  $k_1$  分别取 0.5(连接刚度小于杆刚度)和 5(连接刚度大于杆刚度)两种情况;以  $C_{b1} = C_b/k$  表示相对连接阻尼,  $C_{b1}$  分别取 0, 0.000 01, 0.000 1, 0.001, 0.01 以及 0.1。

表 1 弹性杆和刚体块参数

Table 1 Parameters of the elastic rod and the rigid body

$L/m$	$A/m^2$	$\rho/(kg/m^3)$	$E/GPa$	$M/kg$	$v/(m/s)$
0.3	$9 \times 10^{-4}$	7 900	210	2.133	1

根据应力波和速度波的波速  $c$ ,显然在碰撞过程的前  $L/c$  时段,碰撞端引发的入射应力波和速度波的波阵面尚未到达杆的连接约束端,杆中没有来自连接约束边界的反射波,杆中只有入射波作用,该段时间内边界连接约束条件对杆中质点的速度和应力没有影响。在此分别以碰撞的  $3L/(2c)$  时刻和  $2L/c$  时刻为例,计算反射波开始作用之后杆的速度和应力响应分布。

图 2~3 所示为连接刚度小于杆刚度情况下连接阻尼对于杆中质点速度、应力分布的影响;图 4~5 所示为连接刚度大于杆刚度情况下连接阻尼对于杆中质点速度、应力分布的影响。从图 2、图 4 可以看出,碰撞  $L/(2c)$  时刻,无论是连接刚度大于杆刚度还是小于杆刚度,杆中点均出现速度和应力的跳跃突变,这是因为反射波波阵面正好到达杆中点所致。杆中质点的速度和应力分布是由入射波与反射波共同叠加的作用决定,入射波为压缩波,波速方向与质点速

度同向,杆中质点速度与应力均为负;而反射波为拉伸波,波速方向与质点速度反向,拉伸波相应的应力为正.在相同连接刚度条件下,不同的连接阻尼,导致强度不一样的反射波,因而反射波波阵面处的速度和应力突变幅度也不一样,这说明连接阻尼改变了杆的振动模式.由图 2~5 可以看出,连接阻尼较大时,杆中应力分布和速度分布较无阻尼或较小阻尼更平缓,即沿杆长的速度梯度和应力梯度更小,这是由于大连接阻尼消耗了碰撞系统的能量从而减弱了杆的振动.比较图 3 与图 5 所代表的两种连接刚度条件下连接阻尼的影响,可以看出连接刚度大于杆刚度时,连接阻尼对于杆中速度分布和应力分布的影响更显著.同时通过变动弹性杆和刚体块参数进行计算,可看出对于一组弹性杆与刚体块参数,存在一个阻尼,使得碰撞过程刚体块向弹性杆传递的能量最大.

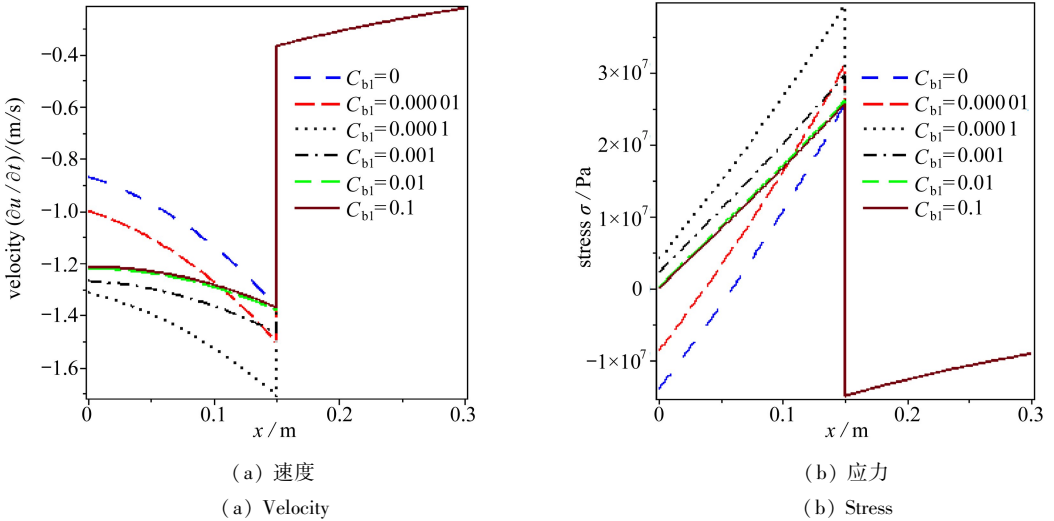


图 2 碰撞  $3L/(2c)$  时刻杆中速度和应力分布 ( $k_1 = 0.5$ )

Fig. 2 Velocity and stress distributions of the rod at time  $3L/(2c)$  for  $k_1 = 0.5$

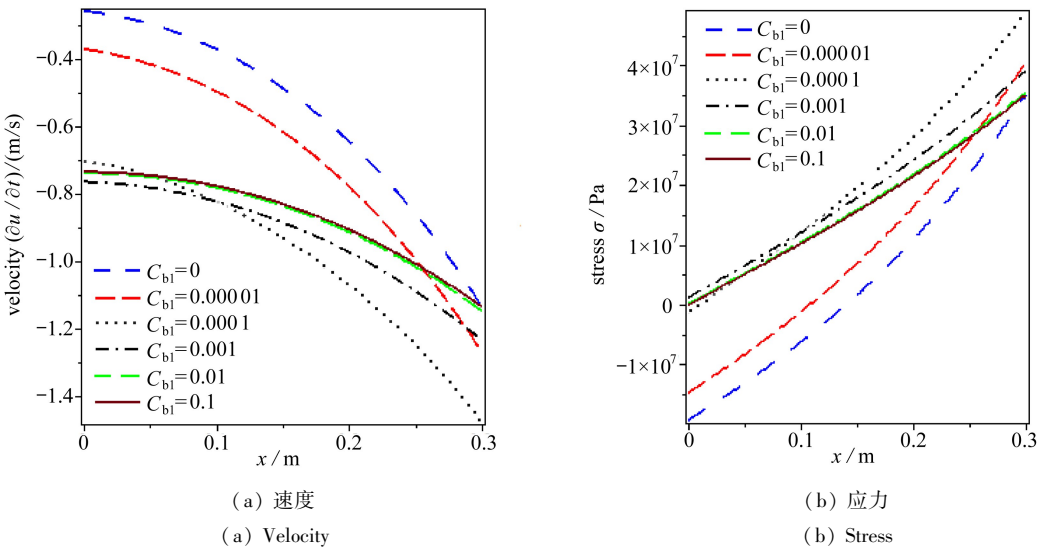
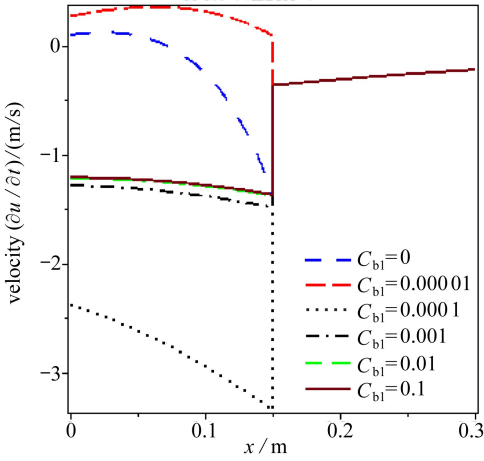


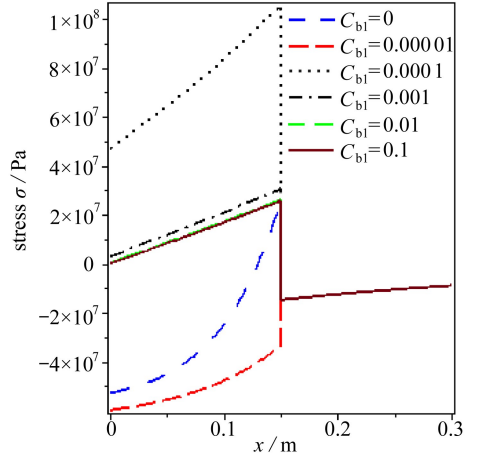
图 3 碰撞  $2L/c$  时刻杆中速度和应力分布 ( $k_1 = 0.5$ )

Fig. 3 Velocity and stress distributions of the rod at time  $2L/c$  for  $k_1 = 0.5$



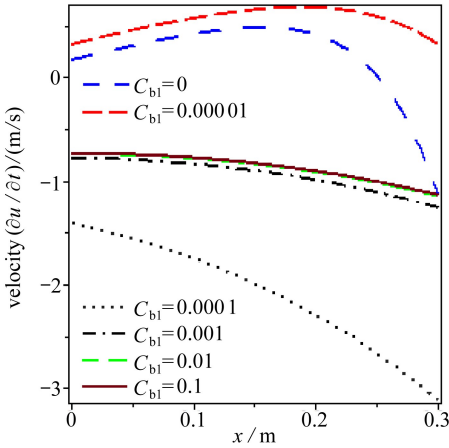
(a) 速度

(a) Velocity



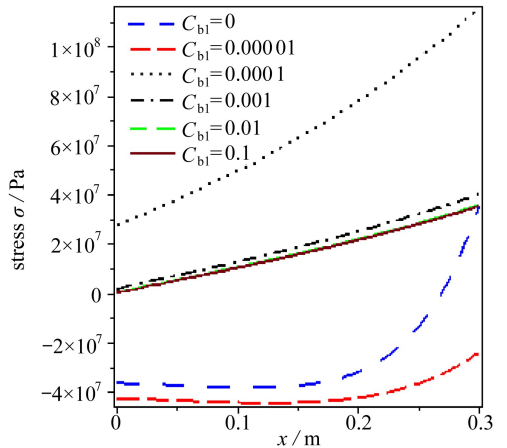
(b) 应力

(b) Stress

图4 碰撞  $3L/(2c)$  时刻杆中速度和应力分布 ( $k_1 = 5$ )Fig. 4 Velocity and stress distributions of the rod at time  $3L/(2c)$  for  $k_1 = 5$ 

(a) 速度

(a) Velocity



(b) 应力

(b) Stress

图5 碰撞  $2L/c$  时刻杆中速度和应力分布 ( $k_1 = 5$ )Fig. 5 Velocity and stress distributions of the rod at time  $2L/c$  for  $k_1 = 5$ 

## 5 连接阻尼和刚度的变化对杆响应的影响

为了讨论连接阻尼和连接刚度同时变化对杆速度响应和应力响应的影响,采用碰撞应力波反射后杆振动的速度、应力解析式(19),将表1所列的杆参数和刚体块参数代入,考虑相对连接刚度  $k_1$  在  $0.5 \sim 2$  区间,相对连接阻尼  $C_{bi}$  在  $0.001 \sim 0.01$  区间变化,得到在  $t = 2L/c$  时刻杆中点(即  $x = 0.15$  m)处的速度和应力随连接条件的变化图。

从图6可以看出,相对连接阻尼介于  $0.005 \sim 0.01$  时,同一相对连接阻尼(即阻尼与刚度比值相同)情况下,杆中点速度、应力在不同连接刚度下近乎不变,即边界连接刚度与连接阻尼比值相同时,边界条件对于杆中速度和应力响应几乎无影响;相对连接阻尼在  $0.001$  附近时,连接刚度对杆中点的速度和应力影响较大。



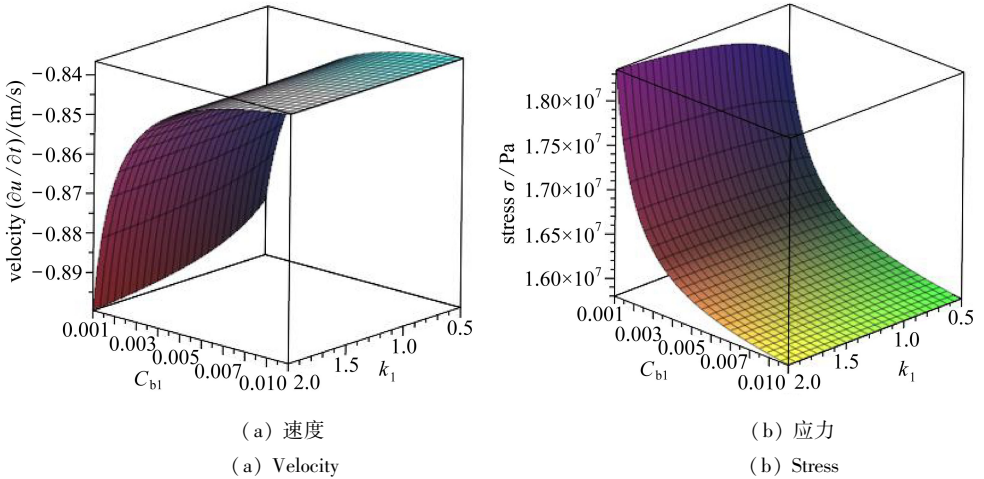


图6 碰撞  $2L/c$  时刻杆中点位置的速度和应力随连接刚度、连接阻尼的变化

Fig. 6 Velocity and stress of the rod midpoint vs. boundary stiffness and damping at time  $2L/c$

## 6 质量比与连接阻尼的变化对碰撞端应力的影响

为了讨论质量比和连接阻尼同时变化对杆速度响应和应力响应的影响,采用碰撞后  $t = (2L/c)^+$  时刻杆碰撞端(即  $x = L$  面)的应力解析解表达式(20),将表1所列的弹性杆参数和刚体块初速度代入,其中,相对连接刚度  $k_1$  分别取 0, 1, 2, 考虑质量比  $\lambda$  在 0.5~3 区间变化,考虑相对连接阻尼  $C_{bl}$  在 0.001~0.01 区间变化,计算得到  $t = (2L/c)^+$  时刻杆碰撞端( $x = 0.3$  m)的应力。

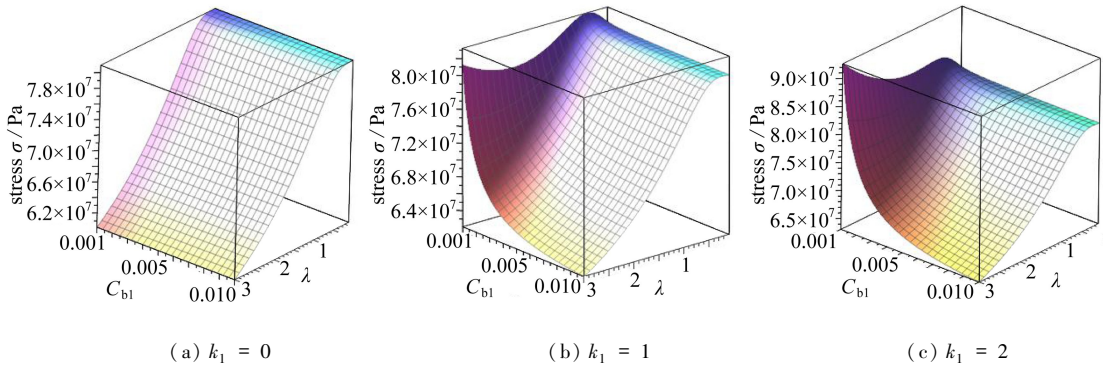


图7  $(2L/c)^+$  时刻碰撞端应力随质量比与连接阻尼的变化

Fig. 7 Stress of the impact end of the rod vs. mass ratio and boundary damping at time  $(2L/c)^+$

由图7可以看出,相对连接刚度  $k_1 = 0$  时,约束边界退化为自由端,连接阻尼对自由边界杆碰撞端在  $(2L/c)^+$  时刻的应力没有影响,即连接阻尼不影响碰撞的持续时间.在非自由边界情况下,质量比较大且连接阻尼较小时,连接阻尼的变化会导致杆碰撞端应力较大的变化,相对连接刚度越大,连接阻尼的影响越明显,这是因为连接刚度越大,同样  $C_{bl}$  相应的连接阻尼越大,边界条件对于杆中反射波的影响越大。

## 7 结 论

本文研究了连接刚度和连接阻尼并存的一般边界条件下弹性杆与刚体块的纵向碰撞过

程,得到碰撞过程一个波动周期的杆振动位移、速度和应力的解析表达式,并通过具体算例计算得到如下结论:

1) 连接阻尼与连接刚度一样,仅仅影响碰撞反射波发生作用的过程.连接阻尼的大小影响着反射波波阵面速度和应力的突变幅度.连接阻尼的增大,会减小杆中速度和应力的变化梯度.

2) 对应于一个确定的连接刚度,存在一个使得刚体传递至杆中能量最大的阻尼.

3) 在连接刚度较小的情况下,连接阻尼对于杆中质点速度和应力的影响较小;在连接刚度较大的情况下,连接阻尼的大小对于杆中质点速度和应力影响较大.

4) 反射波波阵面到达碰撞端时碰撞端应力的解析式表明,碰撞持续时间与质量比、连接刚度、连接阻尼以及杆长有关,与碰撞的初速度无关.在质量比较小的情况下,连接阻尼对于碰撞端的应力影响较小;在质量比较大的情况,连接阻尼对于杆碰撞端的应力有非常显著的影响.

### 参考文献(References):

- [1] 董富祥,洪嘉振.多体系统动力学碰撞问题研究综述[J].力学进展,2009,39(3):352-358.(DONG Fu-xiang, HONG Jia-zhen. Review of impact problem for dynamics of multi-body system[J]. *Advances in Mechanics*, 2009, 39(3): 352-358.(in Chinese))
- [2] Timoshenko S P, Goodier J N. *Theory of Elasticity*[M]. New York: MacGraw-Hill, 1970.
- [3] 诸德超,邢誉峰.点弹性碰撞问题之解析解[J].力学学报,1996,28(1):99-103.(ZHU De-chao, XING Yu-feng. Analytical solution of point elastic impact between structure[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 1996, 28(1): 99-103.(in Chinese))
- [4] 马炜,刘才山,黄琳.弹性杆轴向碰撞波动问题理论分析[C]//洪友士编.应用力学进展,2004:140-145.(MA Wei, LIU Cai-shan, HUANG Lin. Wave analysis of elastic rod axial impact [C]//HONG You-shi ed. *Advances in Applied Mechanics*, 2004: 140-145.(in Chinese))
- [5] 蹇朋波,尹晓春,沈煜年,杨钧.杆撞击中弹塑性波传播的动态子结构方法研究[J].力学季刊,2011,32(6):189-194.(QING Peng-bo, YIN Xiao-chun, SHEN Yu-nian, YANG Jun. Dynamic substructure technique for elastic-plastic wave propagation along flexible bar with impact[J]. *Chinese Quarterly of Mechanics*, 2011, 32(6): 189-194.(in Chinese))
- [6] SHEN Yu-nian, YIN Xiao-chun. Dynamic substructure analysis of stress waves generated by impacts on non-uniform rod structures[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2014, 74: 154-172.
- [7] 李敏,诸德超.球杆碰撞问题的数值分析和实验研究[J].北京航空航天大学学报,2001,27(1):62-65.(LI Min, ZHU De-chao. Analytical and experimental research of ball-bar impact under low velocity[J]. *Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics*, 2001, 27(1): 62-65.(in Chinese))
- [8] 剧锦三,杨蔚彪,蒋秀根.刚体撞击弹塑性直杆时冲击荷载之数值解[J].工程力学,2007,24(6):49-53.(JU Jin-san, YANG Wei-biao, JIANG Xiu-gen. Numerical solution for impact load of elasto-plastic bar subjected to rigid body impact[J]. *Engineering Mechanics*, 2007, 24(6): 49-53.(in Chinese))
- [9] Behner Th, Anderson Jr C E, Holmquist T J, Orphal D L, Wickerta M, Templeton D W. Penetration dynamics and interface defeat capability of silicon carbide against long rod impact [J]. *International Journal of Impact Engineering*, 2011, 38(6): 419-425.
- [10] Argatov I, Jokinen M. Longitudinal elastic stress impulse induced by impact through a spring-dashpot system: optimization and inverse problems for the spring stiffness[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2013, 50(24): 3960-3966.

- [11] Seifried R, Minamoto H, Eberhard P. Viscoplastic effects occurring in impacts of aluminum and steel bodies and their influence on the coefficient of restitution[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 2010, **77**(4): 041008-1-7.
- [12] Willmott G R, Radford D D. Taylor impact of glass rods[J]. *Journal of Applied Physics*, 2005, **97**(9): 093522-1-8.
- [13] GAN Chun-biao, WEI Yi-min, YANG Shi-xi. Longitudinal wave propagation in a multi-step rod with variable cross-section[J]. *Journal of Vibration and Control*, 2014, **14**: 1-16.
- [14] Shen C J, Lu G, Yu T X. Investigation into the behavior of a graded cellular rod under impact [J]. *International Journal of Impact Engineering*, 2014, **74**: 92-106.
- [15] Bityurin A A, Manzhosov V K. Waves induced by the longitudinal impact of a rod against a stepped rod in contact with a rigid barrier[J]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2009, **73**(2): 162-168.
- [16] Bityurin A A. Calculation of the critical velocity of a stepwise rod system under a longitudinal impact[J]. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2011, **52**(4): 530-535.
- [17] 吴家强, 王宏志. 杆的纵向冲击问题全过程分析[J]. 振动与冲击, 2004, **23**(1): 101-107.(WU Jia-qiang, WANG Hong-zhi. Analysis of the whole longitudinal impact process of rod [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2004, **23**(1): 101-107.(in Chinese))
- [18] 张继业, 曾京, 舒伸周. 杆的纵向冲击振动[J]. 振动与冲击, 1999, **18**(3): 57-61.(ZHANG Ji-ye, ZENG Jing, SHU Shen-zhou. Longitudinal vibration of prismatic bar during impact [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 1999, **18**(3): 57-61.(in Chinese))

## Effects of Boundary Damping on the Elastic Rod's Response to Longitudinal Impact

JIAO Xiao-juan, MA Jian-min

(*Department of Mechanics and Engineering Science,  
Fudan University, Shanghai 200433, P.R.China*)

**Abstract:** The longitudinal impact between a rigid body and an elastic rod with boundary stiffness and damping conditions was discussed, the analytical velocity and stress distributions during the 1st impact wave period were derived for the rod, and the condition that the impact time duration equals 2 times of the value of the rod length divided by the wave velocity, was also investigated. Then several examples were calculated to discuss the effects of the boundary damping on the velocity and stress distributions in the rod in the cases of different mass ratios between the rigid body and the rod, and different connection stiffnesses. It is shown that the boundary damping influences the values of reflection wave velocity and stress wave front, and the velocity and stress distributions in the rod become gentler with a higher boundary damping. Given a larger boundary stiffness, the effects of the boundary damping on the velocity and stress in the rod will be more significant. It is also indicated that the impact time duration is not related to the initial impact velocity, but to the mass ratio, the boundary stiffness, the boundary damping and the rod length. Especially, for a larger mass ratio, the boundary damping has greater influence on the stress of the rod's impact end.

**Key words:** elastic rod; longitudinal impact; boundary damping; wave propagation analysis