文章编号:1000-0887(2015)05-0548-07

一类高阶非线性波方程的子方程与精确行波解*

张丽俊[1,2], 陈立群[3]

(1. 浙江理工大学 理学院, 杭州 310018;
2. 西北大学 梅富根校区 数学系 对称性分析和数值模拟国际研究所, 姆马巴托 2735, 南非;
3. 上海大学 应用数学和力学研究所, 上海 200072)

(我刊编委陈立群来稿)

摘要: 结合子方程和动力系统分析的方法研究了一类五阶非线性波方程的精确行波解.得到了这类方程所蕴含的子方程, 并利用子方程在不同参数条件下的精确解, 给出了研究这类高阶非线性波方程行波解的方法, 并以 Sawada-Kotera 方程为例, 给出了该方程的两组精确谷状孤波解和两组光滑周期波解.该研究方法适用于形如对应行波系统可以约化为只含有偶数阶导数、一阶导数平方和未知函数的多项式形式的高阶非线性波方程行波解的研究.

关 键 词: 高阶非线性波方程; 孤立波解; 周期行波解; 子方程

中图分类号: O192; O175.12 **文献标志码:** A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2015.05.010

引 言

动力系统的研究方法[1]已经很好地应用于非线性方程行波解的研究中.李继彬教授等[2-4]在近几年里已经将动力系统的研究方法广泛地应用于各类非线性波方程的行波解的研究中.从其近些年的研究工作中不难看出,动力系统方法研究的非线性方程对应的行波系统,一般都可以转化在二维平面上,从而可以借助动力系统的定性分析和分支理论分析非线性波方程各类行波解的存在性、分支及其精确解.对于高阶非线性方程,若其对应的行波系统的维数高于二维,若可以找到该系统的二维中心流形,则可将问题转化到其二维中心流形上,平面动力系统的理论和研究方法就可以应用于该方程的研究中.本文结合动力系统的研究方法和子方程的研究方法,借助计算机符号计算研究下列五阶非线性波方程:

$$u_{xxxxx} + 5uu_{xxx} + 5pu_x u_{xx} 5u^2 u_x + u_t = 0, \tag{1}$$

其中 p 是常数.方程(1) 包含了很多著名的方程,当 $p = 1$ 时,该方程就是标准的 Sawada-Kotera (SK)方程[5].实际上,对任意的 $\alpha \neq 0$,令 $U = 5u/\alpha$(为方便,下面仍记为 u), 则方程(1)可以转化为

* 收稿日期: 2015-02-17; 修订日期: 2015-04-06
基金项目: 国家自然科学基金(11101371)
作者简介: 张丽俊(1973—), 女, 山西人, 副教授, 博士, 硕士生导师(通讯作者. Tel: +86-571-86843240; E-mail: li-jun0608@163.com).

$$u_{xxxxx}+\alpha uu_{xxx}+\alpha pu_xu_{xx}+\frac{\alpha^2}{5}u^2u_x+u_t=0. \tag{2}$$

显然,当 $p=1,\alpha=30$ 时,该方程就是 Caudrey-Dodd-Gibbon(CDG)方程[6],当 $p=5/2,\alpha=-15$ 时,该方程就是 Kaup-Kupershmidt(KK)方程[3,7].

方程(1)在行波坐标系 $\xi=x-vt$ 下化为常微分方程,将其对 ξ 积分一次可得

$$\frac{\mathrm{d}^4u}{\mathrm{d}\xi^4}+5u\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\xi^2}+\frac{5(p-1)}{2}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\right)^2+\frac{5}{3}u^3-vu+c=0, \tag{3}$$

其中 v 为行波波速,c 是积分常数.本文中首先得到了方程(3)的一个形如

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi}\right)^2=a_3y^3+a_2y^2+a_1y+a_0 \tag{4}$$

的一阶非线性子方程,并利用该低阶方程的分支与精确解研究非线性波方程的行波解.

对于一阶非线性方程(4),通过转化为平面动力系统,可以利用平面分支和定性理论得到方程(4)的分支与精确解[8].将相关结论叙述如下:

定理 1　若令

$$h_{\pm}=\frac{2\Delta(-a_2\pm\sqrt{\Delta})+3a_1a_2a_3}{54a_3^2},\ y_e^{\pm}=\frac{-a_2\pm\sqrt{\Delta}}{3a_3},$$

其中 $\Delta=a_2^2-3a_1a_3>0$, 则有下列结论:

1) 若 $a_0=2h_+$,则方程(4) 有唯一的有界解满足 $\lim_{\xi\to\infty}y(\xi)=y_e^+$, 其精确显式表达式为

$$y=\frac{-a_2+\sqrt{\Delta}}{3a_3}-\frac{\sqrt{\Delta}}{a_3}\operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{2}\Delta^{1/4}(\xi-\xi_0)\right], \tag{5}$$

一个常数解为 $y=(-a_2+\sqrt{\Delta})/(3a_3)$; 以及无界解

$$y=\frac{-a_2+\sqrt{\Delta}}{3a_3}+\frac{\sqrt{\Delta}}{a_3}\operatorname{csch}^2\left[\frac{1}{2}\Delta^{1/4}(\xi-\xi_0)\right], \tag{6}$$

其中 ξ_0 是任意常数.

2) 若 $a_0\in(2h_-,2h_+)$, 则有下列两种情况:

(a) 当 $a_3>0$ 时,则对于任意的

$$y_3\in\left(\frac{-a_2-2\sqrt{\Delta}}{3a_3},\frac{-a_2-\sqrt{\Delta}}{3a_3}\right),$$

$$y=y_3-\frac{1}{2}\left(3y_3+\frac{a_2}{a_3}+\sqrt{\Delta_+}\right)\operatorname{sn}^2(\Omega_+(\xi-\xi_0),k_+) \tag{7}$$

是方程的一组周期波解,其中

$$k_+=\frac{2\sqrt{3y_3^2+2\frac{a_2}{a_3}y_3+\frac{a_1}{a_3}}}{-3y_3-\frac{a_2}{a_3}+\sqrt{\Delta_+}},\ \Omega_+=\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{-3a_3y_3-a_2+a_3\sqrt{\Delta_+}},$$

$$\Delta_+=-3y_3^2-2\frac{a_2}{a_3}y_3+\left(\frac{a_2}{a_3}\right)^2-4\frac{a_1}{a_3},$$

sn(·)表示 Jacobi 椭圆正弦函数.

（b）当 $a_3<0$ 时,则对于任意的

$$y_1 \in \left(\frac{-a_2-\sqrt{\Delta}}{3a_3}, \frac{-a_2-2\sqrt{\Delta}}{3a_3}\right),$$

$$y=y_1-\frac{1}{2}\left(3y_1+\frac{a_2}{a_3}-\sqrt{\Delta_-}\right)\mathrm{sn}^2(\Omega_-(\xi-\xi_0),k_-) \tag{8}$$

是方程的一组周期波解,其中

$$k_-=\frac{2\sqrt{3y_1^2+2\frac{a_2}{a_3}y_1+\frac{a_1}{a_3}}}{3y_1+\frac{a_2}{a_3}+\sqrt{\Delta_-}},\ \Omega_-=\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{-3a_3y_1-a_2-a_3\sqrt{\Delta_-}},$$

$$\Delta_+=-3y_1^2-2\frac{a_2}{a_3}y_1+\left(\frac{a_2}{a_3}\right)^2-4\frac{a_1}{a_3}.$$

3）若 $a_0\in(-\infty,2h_-)$，则方程(4) 没有有界解.特别地，当 $a_0=2h_-$ 时，方程(4)有无界解

$$y=-\frac{a_2+\sqrt{\Delta}}{3a_3}+\frac{\sqrt{\Delta}}{a_3}\sec^2\left[\frac{1}{2}\Delta^{1/4}(\xi-\xi_0)\right] \tag{9}$$

和常数解 $y=-(a_2+\sqrt{\Delta})/(3a_3)$.

1 行波方程(3)的子方程

为了得到非线性波方程(1)的行波解,我们只需要研究常微分方程(4)的解.然而方程(4)是一个四阶微分方程,其等价于一个四维系统,当 $p=5/2,\alpha=-15$ 时,Cosgrove[9] 得到了该方程的 2 个首次积分.李继彬等[3] 利用该首次积分得到了当积分常数为 0 时的一部分解,从而得到了 KK 方程的孤立波解与周期波解.本文将探讨这类方程所蕴含的子方程,并借助子方程得到该类方程的孤波解与有界周期波解.

注意方程(3)所含的项中只有偶数阶导数,一阶导数的平方,以及 u 的多项式.假设方程有形如$(\mathrm{d}u/\mathrm{d}\xi)^2=P_m(u)$,其中 $P_m(u)$ 表示关于 y 的 m 次多项式函数.利用平衡系数法,可得 $m=3$,即方程可能蕴含形如式(4) 的子方程.将含有待定系数的方程及其各阶导数方程(4) 代入方程(3),并比较关于 y 的各次方系数,可得方程(4) 满足下列方程组的各待定系数 a_0,a_1,a_2,a_3:

$$\begin{cases}9a_3^2+3(2+p)a_3+2=0,\ (1+p+3a_3)a_2=0,\\ 9a_1a_3+2a_2^2+5pa_1-2v=0,\ a_1a_2+6a_0a_3+5(1+p)a_0+2c=0.\end{cases} \tag{10}$$

解此方程组可得下列解组：

1）当 $p\neq 2-\sqrt{105}/15$ 且 $p\neq 3(5-\sqrt{5})/10$ 时,

$$\begin{cases}a_3=\frac{1}{6}[-p-2+\sqrt{p^2+4p-4}],\ a_2=0,\ a_1=\dfrac{4v}{3\sqrt{p^2+4p-4}+7p-6},\\ a_0=\dfrac{-2c}{\sqrt{p^2+4p-4}+4p-7}.\end{cases} \tag{11}$$

2）当 $p=3(5-\sqrt{5})/10$ 且 $v=0$ 时,

$$\begin{cases} a_3 = \dfrac{1}{6}[-5+\sqrt{5}],\ a_2 = 0,\ a_1 \text{ is an arbitrary value}, \\ a_0 = \left(1 - \dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)c. \end{cases} \tag{12}$$

3）当 $p = 2 - \sqrt{105}/15$，且 $c = 0$ 时，

$$a_3 = \frac{1}{18}[-15+\sqrt{105}],\ a_2 = 0,\ a_1 = \frac{15-\sqrt{105}}{10}v,\ a_0 \text{ is an arbitrary value}. \tag{13}$$

4）当 $p \neq 1$，$p \neq 2 + \sqrt{105}/15$ 且 $p \neq 3(5+\sqrt{5})/10$ 时，

$$\begin{cases} a_3 = -\dfrac{1}{6}[p+2+\sqrt{p^2+4p-4}],\ a_2 = 0, \\ a_1 = \dfrac{4v}{-3\sqrt{p^2+4p-4}+7p-6},\ a_0 = \dfrac{2c}{\sqrt{p^2+4p-4}-4p+7}. \end{cases} \tag{14}$$

5）当 $p = 1$ 时，

$$a_3 = -\frac{2}{3},\ a_2 \text{ is an arbitrary value},\ a_1 = -2v,\ a_0 = \frac{c}{2}. \tag{15}$$

6）当 $p = 2 + \sqrt{105}/15$ 且 $c = 0$ 时，

$$a_3 = -\frac{1}{6}[5+\sqrt{5}],\ a_2 = 0,\ a_1 = -\frac{15+\sqrt{105}}{10}v,\ a_0 \text{ is an arbitrary value}. \tag{16}$$

7）当 $p \neq 3(5+\sqrt{5})/10$，且 $v = 0$ 时，

$$a_3 = -\frac{1}{6}[5+\sqrt{5}],\ a_2 = 0,\ a_1 \text{is an arbitrary value},\ a_0 = \left(1+\frac{\sqrt{5}}{5}\right)c. \tag{17}$$

定理 2　方程(3)具有形为方程(4)的子方程，当且仅当其系数至少满足方程(11)～(17)之一.

2　方程(2)的有界行波解

注意到方程(3)中的 c 为任意积分常数，v 为波速，所以由定理 1 可知对于任意的 p，方程(3)具有形如方程(4)的子方程.定理 1 中给出了方程(4)在各种参数条件下的解，结合定理 1 和定理 2 的结论可以得到非线性波方程(1)在参数 p 取不同值时的各类无界行波解、孤立波解与周期行波解.但由于物理背景中往往只有有界解才有实际物理意义，所以本文中只关注方程(1)相应的孤立波解与有界周期波解.下面作为具体的例子只给出 SK 方程的有界行波解，但显然当 p 取其它值时也可以得到该类方程的有界行波解，这里不再赘述.

将 $p = 1$ 代入方程(1)得到 SK 方程，由定理 2 可知，对于任意常数 a_2，c 和 v，SK 方程对应的行波系统蕴含下列两个子方程：

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\right)^2 = -\frac{2}{3}u^3 + a_2u^2 - 2vu + \frac{c}{2}, \tag{18}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\right)^2 = -\frac{1}{3}u^3 + vu + c. \tag{19}$$

利用定理 1，可以得到 SK 方程的两组孤立波解以及两组有界行波解.

定理 3　Sawada-Kotera(SK)方程具有下列行波解：

1）对任意 $v > 0$,

$$u(x,t) = \frac{\sqrt{v}}{3} - \sqrt{v}\,\mathrm{sech}^2\left[\frac{1}{2}v^{1/4}(x - vt - \xi_0)\right] \tag{20}$$

是 SK 方程的一组谷状孤波解.

2）对任意常数 a_2 和 $v < 5a_2^2/4$,

$$u(x,t) = \frac{1}{6}[-a_2 + \sqrt{5a_2^2 - 4v}] - \frac{1}{2}\sqrt{5a_2^2 - 4v}\,\mathrm{sech}^2\left[\frac{1}{2}(5a_2^2 - 4v)^{1/4}(x - vt - \xi_0)\right] \tag{21}$$

是 SK 方程的一组谷状孤波解.

3）对任意 $v > 0$ 以及 $u_0 \in (-2\sqrt{v}/3, -\sqrt{v}/3)$,

$$u(x,t) = u_0 - \frac{1}{2}(3u_0 + \sqrt{\Delta_1})\,\mathrm{sn}^2(\Omega_1(x - vt - \xi_0), k_1) \tag{22}$$

是 SK 方程的一簇光滑周期波解,其中

$$\Omega_1 = \frac{1}{4}\sqrt{-6u_0 + 2\sqrt{\Delta_1}},\ k_1 = \frac{\sqrt{3u_0^2 - \frac{1}{3}c}}{-3u_0 + \sqrt{\Delta_1}},\ \Delta_1 = \frac{4}{3}v - 3u_0.$$

4）对任意 $a_2, v < 5a_2^2/4$ 以及

$$\begin{cases} u_0 \in \left(-\dfrac{a_2 + 2\sqrt{5a_2^2 - 4v}}{3}, -\dfrac{a_2 + \sqrt{5a_2^2 - 4v}}{3}\right), \\ u(x,t) = u_0 - \dfrac{1}{4}(6u_0 + a_2 + 2\sqrt{\Delta_2})\,\mathrm{sn}^2(\Omega_2(x - vt - \xi_0), k_2) \end{cases} \tag{23}$$

是 SK 方程的一簇光滑周期波解,其中

$$\Omega_2 = \frac{1}{4}\sqrt{-12u_0 - 2a_2 + 4\sqrt{\Delta_2}},$$

$$k_2 = \frac{4\sqrt{3u_0^2 + a_2u_0 - \frac{1}{3}(a_2^2 - c)}}{-6u_0 - a_2 + 2\sqrt{\Delta_2}},$$

$$\Delta_2 = -\frac{4}{3}v - 3u_0^2 - a_2u_0 + \frac{19}{12}a_2^2.$$

通过前面分析可知若 $u(x,t)$ 是 SK 方程的行波解,则 $6u(x,t)$ 就是 CDG 方程的行波解,所以定理 3 同时给出了 CDG 方程的两组孤立波解与两组周期波解.

3　结　　论

本文中,借助计算机符号计算,通过研究高阶非线性方程所蕴含的子方程的分支和精确解的方法,研究了一类包含 Kaup-Kupershmidt 方程,Caudrey-Dodd-Gibbon 方程,以及 Sawada-Kotera 方程等非线性波方程的高阶非线性方程的行波解.特别地,给出了 SK 方程以及 CDG 方程的两组谷状孤波解与两组光滑周期波解.对于 KK 方程[8],可见用同样方法也可以得到其两组孤波解和周期波解.

从本文的研究方法不难看出，借助符号计算寻找子方程，再结合动力系统分析的方法是研究高阶非线性方程的一种可行和有效的研究方法，对于所可能蕴含的子方程的形式需要根据原高阶方程具体的形式来判断．易见，本文所研究的高阶非线性波方程所对应的微分方程的一般形式为 $F(u^{(2k)},u^{(2k-2)},\cdots,u'',u'^2,u)=0$，这里 F 是多项式函数．若函数满足方程 $u'^2=P_m(u)$，其中 $P_m(u)$ 表示具有待定系数的关于未知函数的 m 阶多项式函数，则容易得到该函数的所有偶数阶导数都是未知函数 u 的多项式，将其代入原高阶非线性方程，则可以确定出 $P_m(u)$，从而得到其蕴含子方程．对于其它形式的高阶方程是否可以，又如何能够找到其蕴含的低阶方程，仍然是我们需要进一步探索的问题．

参考文献(References)：

[1] Chow S N, Hale J K. *Method of Bifurcation Theory*[M]. New York: Springer, 1981.

[2] LI Ji-bin. *Singular Traveling Wave Equations: Bifurcations and Exact Solutions*[M]. Beijing: Science Press, 2013.

[3] LI Ji-bin, QIAO Zhi-jun. Explicit solutions of the Kaup-Kupershmidt equation through the dynamical system approach[J]. *Journal of Applied Analysis and Computation*, 2011, **1**(2): 243-250.

[4] 冯大河, 李继彬. Jaulent-Miodek 方程的行波解分支[J]. 应用数学和力学, 2007, **28**(8): 894-900.(FENG Da-he, LI Ji-bin. Bifurcations of travelling wave solutions for Jaulent-Miodek equations[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2007, **28**(8): 894-900.(in Chinese))

[5] Sawada K, Kotera T. A method for finding *N*-soliton solutions for the K.d.V. equation and K.d.V.-like equation[J]. *Progress of Theoretical Physics*, 1974, **51**(5): 1355-1367.

[6] Caudrey P J, Dodd R K, Gibbon J D. A new hierarchy of Korteweg-de Vries equations[J]. *The Proceedings of the Royal Society of London*, 1976, **351**(1666): 407-422.

[7] Kupershmidt B A. A super Korteweg-de Vires equation: an integrable system[J]. *Physics Letters A*, 1984, **102**(5/6): 213-215.

[8] ZHANG Li-jun, Khalqiue C M. Exact solitary wave and periodic wave solutions of the Kaup-Kupershmidt equation[J]. *Journal of Applied Analysis and Computation*, 2015, **5**(3): 485-495.

[9] Cosgrove M C. Higher-order Painleve equations in the polynomial class I: Bureau symbol P_2[J]. *Studies in Applied Mathematics*, 2000, **104**(1): 1-65.

Sub-Equations and Exact Traveling Wave Solutions to a Class of High-Order Nonlinear Wave Equations

ZHANG Li-jun[1,2], CHEN Li-qun[3]

(1. *School of Science, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou* 310018, *P.R.China*;

2. *International Institute for Symmetry Analysis and Mathematical Modelling, Department of Mathematical Sciences, North-West University, Mafikeng Campus, Mmabatho* 2735, *South Africa*;

3. *Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University, Shanghai* 200072, *P.R.China*)

(Contributed by CHEN Li-qun, M. AMM Editorial Board)

Abstract: The exact traveling wave solutions to a class of 5th-order nonlinear wave equations were studied with the sub-equation method and the dynamic system analysis approach. The lower-order sub-equations of this class of high-order nonlinear equations were first derived, then the traveling wave solutions were investigated via the various exact solutions to the sub-equations under different parameter conditions. As an example, 2 families of exact valley-form solitary wave solutions and 2 families of smooth periodic traveling wave solutions to the Sawada-Kotera equation were presented. This method can be applied to study the traveling wave solutions to high-order nonlinear wave equations of which the corresponding traveling wave system can be reduced to the nonlinear ODEs involving only even-order derivatives, sum of squares of 1st-order derivatives and polynomial of dependent variables.

Key words: high-order nonlinear wave equation; solitary wave solution; periodic traveling wave solution; sub-equation

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11101371)