

具有领导者的非线性分数阶多智能体系统的一致性分析*

朱伟, 陈波

(重庆邮电大学 系统理论与应用研究中心, 重庆 400065)

摘要: 研究了利用非线性分数阶模型描述的具有领导者的多智能体系统的一致性。基于智能体之间的通讯拓扑图,设计了系统的控制协议和相应的控制增益矩阵,利用广义 Gronwall 不等式和分数阶微分方程的稳定性理论,得到了多智能体系统达到一致的充分条件。最后,数值仿真结果显示了理论结果的有效性。

关键词: 一致性; 分数阶; 多智能体系统; 非线性模型

中图分类号: TP18 **文献标志码:** A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2015.05.011

引言

近年来,多智能体系统已被有效地应用来解决现实生活中各种各样的问题,如搜寻、救援、勘探和监视等。一致性问题,即智能体只利用邻域内其它智能体的信息来达到期望的共同目标,是多智能体系统协同控制的重点问题之一。关于一致性问题的研究起源于管理学^[1]和统计物理学领域^[2]。关于分布式决策系统中的一致性问题及其应用可见文献[3-4]。

目前,关于整数阶多智能体系统一致性的研究,已经有非常多漂亮的结果。然而,研究表明,许多跨学科领域的系统可以更好地通过分数阶微分方程来描述,如粘弹性体系、管道边界层效应^[5-6]等。文献[7-8]分别研究了分数阶微分方程的反周期理论与数值求解,为分数阶微分方程相关理论的应用提供了一定的研究基础。近年来,分数阶多智能体系统的一致性问题也得到了广泛的关注。在文献[9-10]中,分别对分数阶多智能体系统在有向固定拓扑和切换拓扑中的一致性问题进行了研究。在文献[11]中,利用 Nyquist(奈奎斯特)稳定条件和频率域方法,研究了有向固定拓扑和时滞的分数阶多智能体系统的一致性问题。在文献[12]中,基于广义 Nyquist 稳定判据,得到了一个充分必要条件以确保具有相同的输入延迟和有向拓扑的分数阶多智能体系统能达到一致。此外,当通讯拓扑是无向图时,也给出了具有异构输入延迟的分数阶多智能体系统的一致性条件。在文献[13]中,基于分布式静态输出反馈协议,研究了具有无

* 收稿日期: 2014-11-10; 修订日期: 2014-12-12

基金项目: 重庆市自然科学基金基础与前沿研究项目(cstc2013jcyjA00026);重庆市高等学校优秀人才支持计划项目

作者简介: 朱伟(1976—),男,四川荣县人,教授,博士,硕士生导师(通讯作者。E-mail: zhuwei@cqupt.edu.cn);

陈波(1989—),男,四川乐山人,硕士生(E-mail: S12060201@stu.cqupt.edu.cn)。

向固定拓扑的分数阶多智能体系统的一致性问题.利用线性矩阵不等式获得了系统达到一致的充分条件.在文献[14]中,研究了一类具有不确定线性分数阶多智能体系统的一致性问题,提出了系统鲁棒渐近一致的一些充分条件.在文献[15]中,研究了具有异构分数阶非线性动态有向网络模型的一致性行为,应用牵制控制法得到系统 Mittag-Leffler 稳定的充要条件.应该指出的是,非线性分数阶微分方程模型能更好地描述实际系统的动态行为.然而,关注具有非线性模型的分数阶多智能体系统的一致性问题的文献还相对较少.基于以上的讨论,本文将研究具有领导者的非线性分数阶多智能体系统的一致性问题.通过应用广义 Gronwall 不等式和分数阶微分方程的稳定性理论,得到了多智能体系统达到一致的充分条件.

1 数学预备知识

1.1 代数图论

令 $\{i \mid i \in V\}$ 是由节点构成的集合,其中 $V = \{1, 2, \dots, N\}$. $E = \{(v_i, v_j) \mid i, j \in \mathbf{N}\}$ 是由通讯边构成的集合.无向图 $G = (V, E)$ 用来表示智能体系统的通讯拓扑图.第 i 个节点的邻居节点集合表示为 $N_i = \{j \in V \mid (V_i, V_j) \in E\}$.如果 $j \in N_i$ 意味着智能体 i 就能够接收到智能体 j 的信息.在有向图里一条路由是由不同的顶点构成的一个序列 i_0, i_1, \dots, i_l , 且满足 $(V_{i_l}, V_{i_{l-1}}) \in E, l_1 = 1, 2, \dots, l$.令 $\tilde{\mathbf{A}} = (a_{ij})_{N \times N}$ 是邻接矩阵,其中 a_{ij} 表示边 (V_i, V_j) 的权重.如果 $(V_i, V_j) \in E$, 则 $a_{ij} > 0$; 否则 $a_{ij} = 0$. $\mathbf{D} = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_N)$ 是图的度矩阵,其中 $d_i = \sum_{j \in N_i} a_{ij}$.令 $\bar{\mathbf{G}}$ 是一个由领导者和 N 个跟随者所构成的图.如果领导者是智能体 i 的邻居节点, 则 $b_i = 1$; 否则 $b_i = 0$.记 $\bar{\mathbf{B}} = \text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_N), \mathbf{L} = \mathbf{D} - \tilde{\mathbf{A}}, \mathbf{H} = \mathbf{L} + \bar{\mathbf{B}}$.

1.2 问题描述

跟随者的动态行为由下面的非线性分数阶微分方程来表示:

$$D^q \mathbf{x}_i(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}_i(t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_i(t)) + \mathbf{B} \mathbf{u}_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (1)$$

同时,领导者的动态行为表示为

$$D^q \mathbf{x}_0(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}_0(t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_0(t)), \quad (2)$$

其中 $D^q \mathbf{x}_i(t)$ 表示 $\mathbf{x}_i(t)$ 的 Caputo 微分,即

$$D^q \mathbf{x}(t) = \frac{1}{\Gamma(k-q)} \int_0^t \frac{\mathbf{x}^{(k)}(\tau)}{(t-\tau)^{q+1-k}} d\tau, \quad k-1 < q < k, k \in \mathbf{Z}_+.$$

本文假设 $0 < q \leq 1$. $\mathbf{x}_0(t) \in R^n, \mathbf{x}_i(t) \in R^n$ 分别表示领导者与跟随者 i 的状态, $\mathbf{u}_i(t) \in R^m$ 表示跟随者 i 的输入. $\mathbf{A} \in R^{n \times n}$ 和 $\mathbf{B} \in R^{n \times m}$ 为常数矩阵. $\mathbf{f}: R^n \rightarrow R^n$ 为连续函数且满足 Lipschitz(利普希兹)条件,即存在一个常数 m 使得

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}_i(t), t) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0(t), t)\| \leq m \|\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_0(t)\|.$$

定义 1 在分数阶多智能体系统(1)和(2)中,如果对于任意的一个智能体 $i \in \{1, 2, \dots, N\}$, 存在一个状态反馈输入 \mathbf{u}_i 使得对任意的初始状态 $\mathbf{x}_i(0), i = 0, 1, \dots, N$ 都能使闭环系统满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_0(t)\| = 0,$$

则称该系统达到了一致.

为研究多智能体系统(1)和(2)的一致性问题,本文使用以下基于邻居信息的控制协议:

$$\mathbf{u}_i(t) = -\mathbf{K} \left[\sum_{j \in N_i} a_{ij} [\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t)] + b_i [\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_0(t)] \right], \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (3)$$

其中 \mathbf{K} 为控制增益矩阵.

引理 1^[16] 对任意的 $0 < q \leq 1$, 都存在一个正常数 M 使得

$$\|E_{q,\beta}(\mathbf{A}_0(t-t_0)^q)\| \leq M \|e^{\mathbf{A}_0(t-t_0)}\|, \tag{4}$$

其中 $E_{q,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(kq + \beta)}$ 为 Mittag-Leffler 函数, $\|\cdot\|$ 表示矩阵范数, $\beta \in \{1, 2, \dots, k\} \cup \{0, q\}$.

引理 2^[17] 假设 $q > 0$, $a(t)$ 是一个在 $0 \leq t < T (T \leq +\infty)$ 上的非负局部可积函数, 且 $g(t)$ 是定义在 $0 \leq t < T$ 上的非负非减的连续有界函数, 即满足 $g(t) \leq M$ (常数). $u(t)$ 是一个在 $0 \leq t < T$ 上非负的局部可积函数, 而且在该区间上满足

$$u(t) \leq a(t) + g(t) \int_{t_0}^t (t-\tau)^{q-1} u(\tau) d\tau,$$

则有

$$u(t) \leq a(t) + \int_{t_0}^t \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(g(t)\Gamma(q))^n}{\Gamma(nq)} (t-\tau)^{nq-1} a(\tau) \right] d\tau, \quad t_0 \leq t < T.$$

进一步, 若 $a(t)$ 为 $[0, T]$ 上非减函数, 则

$$u(t) \leq a(t) E_{q,1}(g(t)\Gamma(q)(t-t_0)^q). \tag{5}$$

引理 3^[5] 令 $0 < q \leq 1$ 且 β 是一个常数, 如果存在一个 u 满足 $q\pi/2 < u < \min\{\pi, q\pi\}$, 那么

$$|E_{q,\beta}(z)| \leq C_1(1+|z|)^{(1-\beta)/q} \exp(\operatorname{Re}(z^{1/q})) + \frac{C_2}{1+|z|}, \tag{6}$$

其中 C_1, C_2 是正常数, $|\arg z| \leq u, |z| \geq 0$.

2 主要结果

引理 4 如果 (\mathbf{A}, \mathbf{B}) 是可镇定的, 且智能体之间的通讯拓扑图中含有以领导者为根的生成树, 则存在一个满足 $h\operatorname{Re} \lambda_i(\mathbf{H}) > 1$ 的正常数 h 使得对任意 $0 < q \leq 1$ 有 $|\arg(\lambda(\bar{\mathbf{A}}))| > q\pi/2$, 其中 $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A} - \mathbf{H} \otimes \mathbf{B}\mathbf{K}, \mathbf{K} = h\mathbf{B}^T\mathbf{P}$.

证明 因为 (\mathbf{A}, \mathbf{B}) 是可镇定的, 则对任意给定的正定对称矩阵 \mathbf{Q} , 代数 Riccati (黎卡提) 方程 (ARE)

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{B}^T\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{0}$$

都有唯一非负定的对称矩阵解 \mathbf{P} . 进而由线性最优化理论可得矩阵 $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{B}^T\mathbf{P}$ 的所有特征值都具有负实部. 又因为智能体之间的通讯拓扑结构图中含有以领导者为根的生成树, 则有

$$\operatorname{Re} \lambda_i(\mathbf{H}) > 0, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

因此, 存在一个满足 $h\operatorname{Re} \lambda_i(\mathbf{H}) > 1$ 的正常数 h 使得矩阵 $\mathbf{A} - h\operatorname{Re} \lambda_i(\mathbf{H})\mathbf{B}\mathbf{B}^T\mathbf{P}$ 的所有特征值都具有负实部. 由 Kronecker 积的性质可知矩阵 $\mathbf{A} - h\operatorname{Re} \lambda_i(\mathbf{H})\mathbf{B}\mathbf{B}^T\mathbf{P}$ 的特征值即为矩阵 $\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A} - h\mathbf{H} \otimes \mathbf{B}\mathbf{B}^T\mathbf{P}$ 的特征值, 所以矩阵 $\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A} - h\mathbf{H} \otimes \mathbf{B}\mathbf{B}^T\mathbf{P}$ 的特征值都具有负实部, 即对所有 $0 < q \leq 1$ 有 $|\arg(\lambda(\bar{\mathbf{A}}))| > q\pi/2$.

基于引理 4, 可得如下结果:

定理 1 如果 (\mathbf{A}, \mathbf{B}) 是可镇定的, 且智能体之间的通讯拓扑图中含有以领导者为根的生成树. 若 $|\lambda_{\max}(\bar{\mathbf{A}})| - (M m \Gamma(q))^{1/q} > 0$, 则多智能体系统 (1) 和 (2) 可以达到一致.

证明 令 $\mathbf{e}_i(t) = \mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_0(t)$, $i = 1, 2, \dots, N$ 得

$$\begin{aligned} D^q \mathbf{e}_i(t) &= D^q \mathbf{x}_i(t) - D^q \mathbf{x}_0(t) = \\ & \mathbf{A}(\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_0(t)) + \mathbf{B} \mathbf{u}_i(t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_i(t)) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0(t)) = \\ & \mathbf{A} \mathbf{e}_i(t) - \mathbf{B} \mathbf{K} \left[\sum_{j \in N_i} a_{ij} [\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_0(t) - (\mathbf{x}_j(t) - \mathbf{x}_0(t))] + \right. \\ & \left. b_i(\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_0(t)) \right] + \mathbf{f}(\mathbf{x}_i(t)) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0(t)) = \\ & \mathbf{A} \mathbf{e}_i(t) - \mathbf{B} \mathbf{K} \left[\sum_{j \in N_i} a_{ij} (\mathbf{e}_i(t) - \mathbf{e}_j(t)) + b_i \mathbf{e}_i(t) \right] + \\ & \mathbf{f}(\mathbf{x}_i(t)) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0(t)). \end{aligned} \quad (7)$$

利用矩阵的 Kronecker 积, 由式(7)得

$$\begin{aligned} D^q \mathbf{e}(t) &= (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A}) \mathbf{e}(t) - (\mathbf{L} \otimes \mathbf{B} \mathbf{K}) \mathbf{e}(t) - (\bar{\mathbf{B}} \otimes \mathbf{B} \mathbf{K}) \mathbf{e}(t) + \mathbf{F}(t) = \\ & [\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A} - (\mathbf{L} + \bar{\mathbf{B}}) \otimes \mathbf{B} \mathbf{K}] \mathbf{e}(t) + \mathbf{F}(t) = \bar{\mathbf{A}} \mathbf{e}(t) + \mathbf{F}(t), \end{aligned} \quad (8)$$

其中 $\mathbf{F}(t) = (\mathbf{f}(\mathbf{x}_1(t)) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0(t)), \dots, \mathbf{f}(\mathbf{x}_N(t)) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0(t)))^T$, \otimes 表示矩阵 Kronecker 积, $\mathbf{e}(t) = [\mathbf{e}_1^T(t), \mathbf{e}_2^T(t), \dots, \mathbf{e}_n^T(t)]^T \in R^{nN}$.

对式(8)两边同时进行 Laplace (拉普拉斯) 变换得

$$\mathbf{E}(s) = (\mathbf{I}s^q - \bar{\mathbf{A}})^{-1} (s^{q-1} \mathbf{e}_0 + \mathbf{F}(s)), \quad (9)$$

其中 $\mathbf{E}(s), \mathbf{F}(s)$ 分别表示 $\mathbf{e}(t), \mathbf{F}(t)$ 的 Laplace 变换. 进而再对式(9)两边同时进行反 Laplace 变换得

$$\mathbf{e}(t) = E_{q,1}(\bar{\mathbf{A}}(t-t_0)^q) \mathbf{e}_0 + \int_{t_0}^t (t-\tau)^{q-1} E_{q,q}(\bar{\mathbf{A}}(t-\tau)^q) \mathbf{F}(\tau) d\tau,$$

其中 $\mathbf{e}_0 = \mathbf{e}(t_0)$. 由引理 1 可得, 存在一个常数 M 使得

$$\|\mathbf{e}(t)\| \leq M \|e^{\bar{\mathbf{A}}(t-t_0)}\| \|\mathbf{e}_0\| + M \int_{t_0}^t (t-\tau)^{q-1} \|e^{\bar{\mathbf{A}}(t-\tau)}\| \|\mathbf{F}(\tau)\| d\tau. \quad (10)$$

由引理 4 知 $\bar{\mathbf{A}}$ 是稳定的, 则

$$\|e^{\bar{\mathbf{A}}(t-t_0)}\| \leq e^{-|\lambda_{\max}(\bar{\mathbf{A}})|(t-t_0)}.$$

所以式(10)可以化为

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}(t)\| &\leq M e^{-|\lambda_{\max}(\bar{\mathbf{A}})|(t-t_0)} \|\mathbf{e}_0\| + \\ & M \int_{t_0}^t (t-\tau)^{q-1} e^{-|\lambda_{\max}(\bar{\mathbf{A}})|(t-\tau)} \|\mathbf{F}(\tau)\| d\tau. \end{aligned}$$

又因为 $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}_i(t)) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0(t))\| \leq m \|\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_0(t)\|$, 则有

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}(t)\| &\leq M e^{-|\lambda_{\max}(\bar{\mathbf{A}})|(t-t_0)} \|\mathbf{e}_0\| + \\ & M m \int_{t_0}^t (t-\tau)^{q-1} e^{-|\lambda_{\max}(\bar{\mathbf{A}})|(t-\tau)} \|\mathbf{e}(\tau)\| d\tau. \end{aligned} \quad (11)$$

在式(11)的两边同时乘以 $e^{|\lambda_{\max}(\bar{\mathbf{A}})|(t-t_0)}$, 则有

$$\begin{aligned} e^{|\lambda_{\max}(\bar{\mathbf{A}})|(t-t_0)} \|\mathbf{e}(t)\| &\leq M \|\mathbf{e}_0\| + \\ & M m \int_{t_0}^t (t-\tau)^{q-1} e^{|\lambda_{\max}(\bar{\mathbf{A}})|(\tau-t_0)} \|\mathbf{e}(\tau)\| d\tau. \end{aligned}$$

令

$$a(t) = M \| e_0 \|, g(t) = Mm, u(t) = e^{|\lambda_{\max}(\bar{A})|(t-t_0)} \| e(\tau) \|,$$

又因为 $a(t)$ 是一个非减函数,由引理 2 得

$$e^{|\lambda_{\max}(\bar{A})|(t-t_0)} \| e(t) \| \leq M \| e_0 \| E_{q,1}(Mm\Gamma(q)(t-t_0)^q).$$

因为 $|\arg(Mm\Gamma(q)(t-t_0)^q)| = 0$, 所以对任意的 $q\pi/2 < u < \min\{\pi, q\pi\}$, 可以得到 $|\arg(Mm\Gamma(q)(t-t_0)^q)| < u$. 由引理 3, 存在常数 C_1, C_2 使得

$$e^{|\lambda_{\max}(\bar{A})|(t-t_0)} \| e(t) \| \leq MC_1 \| e_0 \| e^{[Mm\Gamma(q)]^{1/q}(t-t_0)} + \frac{C_2 M \| e_0 \|}{1 + Mm\Gamma(q)(t-t_0)^q},$$

即

$$\| e(t) \| \leq MC_1 \| e_0 \| e^{[(Mm\Gamma(q))^{1/q} - |\lambda_{\max}(\bar{A})|](t-t_0)} + \frac{C_2 M \| e_0 \|}{[1 + mM\Gamma(q)(t-t_0)^q] e^{|\lambda_{\max}(\bar{A})|(t-t_0)}}.$$

由条件 $|\lambda_{\max}(\bar{A})| - (Mm\Gamma(q))^{1/q} > 0$ 可得多智能体系统(1)和(2)可以达到一致.证毕.

3 数值仿真

考虑由一个领导者和 5 个跟随者所构成的 1 个多智能体系统,且它们之间的通讯拓扑图如图 1 所示.

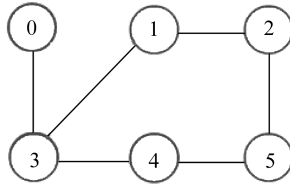


图 1 通讯拓扑图

Fig. 1 The communication topology

容易得到 Laplace 矩阵 L 和矩阵 \bar{B} 分别为

$$L = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \bar{B} = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

不妨设 $q = 0.9, f(x) = (\sin x \cos x, 0, \sin x \cos x)^T$, 且系统矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 16 & 0 \\ -1 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

容易证明系统 (A, B) 是可镇定的,且矩阵 H 的特征值为

$$\lambda_1(H) = 0.1392, \lambda_2(H) = 1.3820, \lambda_3(H) = 1.7459, \\ \lambda_4(H) = 3.6180, \lambda_5(H) = 4.1149.$$

不妨设 $Q = \text{diag}(1, 1, 1)$, 由代数 Riccati 方程可得

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.808\ 8 & 1.782\ 8 & 0.419\ 2 \\ 1.782\ 8 & 4.724\ 7 & 1.137\ 5 \\ 0.419\ 2 & 1.137\ 5 & 0.572\ 7 \end{pmatrix}.$$

由系统的非线性项可得 $m = 1$, 进而可以得到满足引理 2 的 M 值可取为 $M = 2$. 取 $h = 10$, 则可以得到 $\mathbf{K} = (12.280\ 0, 29.202\ 9, 9.919\ 4)$ 以及 $|\lambda_{\max}(\bar{\mathbf{A}})| = 2.608\ 8 > (Mm\Gamma(q))^{1/q} = 2.325\ 5$. 因此, 由定理 1 可得该系统可以达到一致.

令 $x_i^j(t)$ 表示智能体 i 的第 j 个组成分量, 初始条件为 $x_i^j(0) = ij/2, i = 1, 2, \dots, 5, j = 1, 2, 3$ 以及 $\mathbf{x}_0(0) = (0.3, 0.2, 0.1)^T$, 可得系统的数值仿真结果如图 2~4 所示.

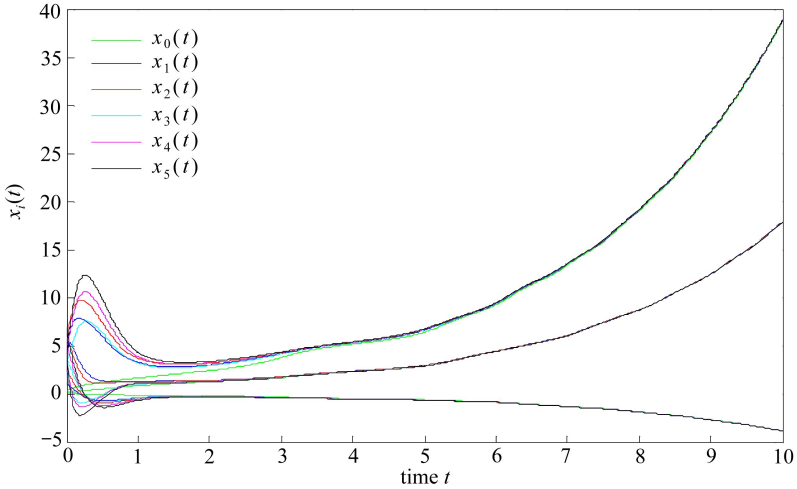


图 2 所有智能体的状态 $x_i(t)$

Fig. 2 States $x_i(t)$ of all the intelligent agents

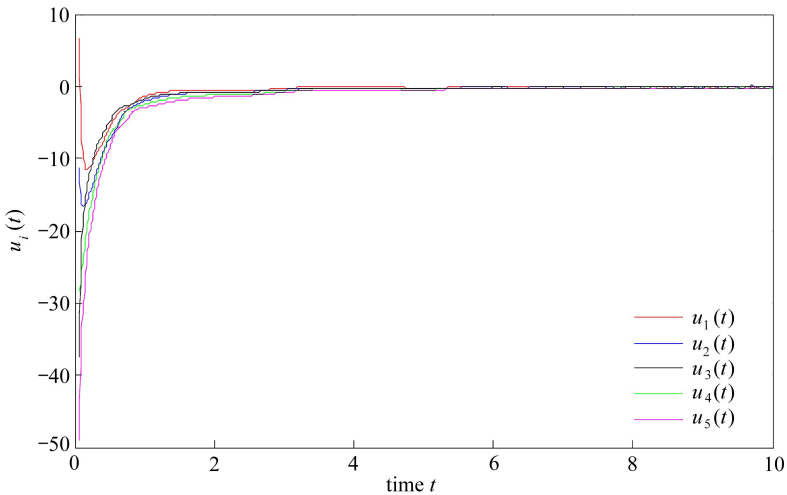


图 3 跟随者的控制输入 $u_i(t)$

Fig. 3 Control input of the followers

由以上仿真图 2~4 可见, 随着时间的增大, 控制器的控制量渐近趋于 0 (图 3), 同时, 跟随者与领导者渐近趋于一致 (图 2). 图 4 刻画的跟随者与领导者之间的状态误差渐近趋于 0, 更进一步显示了一致性结果的正确性.

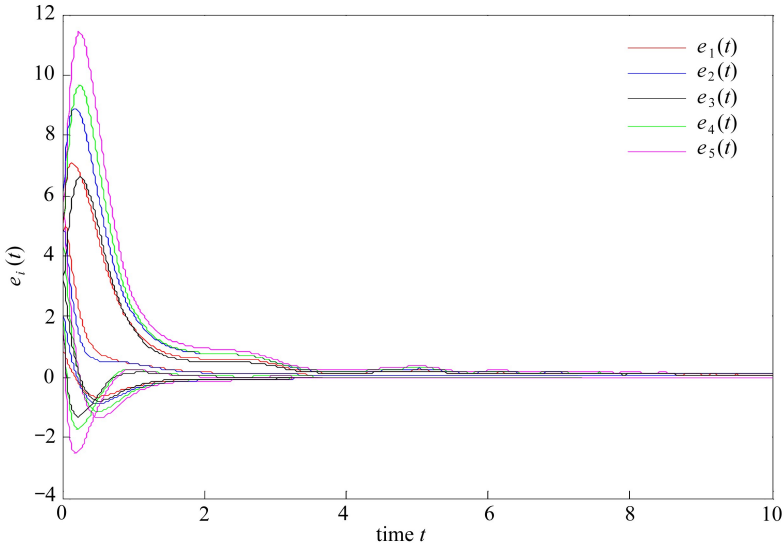
图 4 所有跟随者与领导者的状态误差 $e_i(t)$

Fig. 4 Consensus errors between the leaders and the followers

4 结束语

本文基于代数 Riccati 方程与代数图论, 研究了一类非线性分数阶多智能体系统的一致性, 该非线性项满足 Lipschitz 条件. 进而设计给出了一个合适的反馈控制协议, 该协议仅使用系统的局部信息且能确保所有的跟随者都能达到和领导者一样的状态. 以后的研究工作主要致力于研究具有非线性扰动和时间延迟的分数阶多智能体系统的一致性问题.

参考文献 (References):

- [1] DeGroot M H. Reaching a consensus[J]. *Journal of the American Statistical Association*, 1974, **69**(345): 118-121.
- [2] Vicsek T, Czirók A, Ben-Jacob E, Cohen I, Shochet O. Novel type of phase transitions in a system of self-driven particles[J]. *Physical Review Letters*, 1995, **75**(6): 1226-1229.
- [3] Borkar V, Varaiya P. Asymptotic agreement in distributed estimation[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1982, **27**(3): 650-655.
- [4] Tsitsiklis J N, Bertsekas D P, Athans M. Distributed asynchronous deterministic and stochastic gradient optimization algorithms[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1986, **31**(9): 803-812.
- [5] Podlubny I. *Fractional Differential Equations*[M]. New York: Academic Press, 1999.
- [6] Hilfer R. *Applications of fractional calculus in physics*[C]//Word Scientific, Singapore, 2000.
- [7] 杨绪君, 宋乾坤. 时不变分数阶系统反周期解的存在性[J]. *应用数学和力学*, 2014, **35**(6): 684-691. (YANG Xu-jun, SONG Qian-kun. On the existence of anti-periodic solutions in time-invariant fractional order systems[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, **35**(6): 684-691. (in Chinese))
- [8] 孙春艳, 徐伟. 随机分数阶微分方程初值问题基于模拟方程法的数值求解[J]. *应用数学和力学*, 2014, **35**(10): 1092-1099. (SUN Chun-yan, XU Wei. An analog equation method-based numerical scheme for initial value problems of stochastic fractional differential equations[J].

- Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, **35**(10): 1092-1099. (in Chinese))
- [9] Cervin A, Henningsson T. Scheduling of event-triggered controllers on a shared network [C]//47th IEEE Conference on Decision and Control. Cancun, Mexico, 2008: 3601-3606.
- [10] Heemels W P M H, Sandee J H, Van Den Bosch P P J. Analysis of event-driven controllers for linear systems[J]. *International Journal of Control*, 2008, **81**(4): 571-590.
- [11] Shen J, Cao J, Lu J. Consensus of fractional-order systems with non-uniform input and communication delays[J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, 2012, **226**(12): 271-283.
- [12] Shen J, Cao J. Necessary and sufficient conditions for consensus of delayed fractional-order systems[J]. *Asian Journal of Control*, 2012, **6**(14): 1690-1697.
- [13] Yin X X, Hu S L. Consensus of fractional-order uncertain multi-agent systems based on output feedback[J]. *Asian Journal of Control*, 2013, **5**(15): 1538-1542.
- [14] Li H J. Observer-type consensus protocol for a class of fractional-order uncertain multi-agent systems[J]. *Abstract and Applied Analysis*, 2012, **2012**(S), Article ID 672346.
- [15] Sun W, Chen Y Q, Li C P. Multi-group consensus of heterogeneous fractional-order nonlinear agents via pinning control[C]//ASME International Design Engineering Technical Conference and Computers and Information in Engineering Conference. Washington DC, USA, 2011: 377-383.
- [16] De la Sen M. About robust stability of Caputo linear fractional dynamic systems with time delays through fixed point theory[J]. *Fixed Point Theory and Applications*, 2011, **2011**, Article ID 867932.
- [17] Ye H P, Gao J M, Ding Y S. A generalized Gronwall inequality and its application to a fractional differential equation[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2007, **328**(2): 1075-1081.

Leader-Following Consensus of Fractional-Order Multi-Agent Systems With Nonlinear Models

ZHU Wei, CHEN Bo

(Research Center of System Theory and Application, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, P.R.China)

Abstract: The leader-following consensus of multi-agent systems with fractional-order nonlinear models was investigated. Under the assumption that the system communication topology contains a leader-rooted spanning tree, the control gain matrix was designed and the controllers were presented based on the theory of algebraic Riccati equations. Then, a sufficient condition for the leader-following consensus of multi-agent systems was given by means of the Laplace transform and inverse transform, the Mittag-Leffler function, the generalized Gronwall inequality and the stability theory of fractional differential equations. Finally, the numerical simulation results show the effectiveness of the proposed theoretical condition.

Key words: leader-following consensus; fractional-order; multi-agent system; nonlinear model