

# 桥联理论研究的最新进展\*

黄争鸣

(同济大学 航空航天与力学学院,上海 200092)

(本刊编委黄争鸣来稿)

**摘要:** 欲根据组分材料——纤维和基体性能参数预报复合材料的强度,必须解决3方面的问题。首先,必须准确计算出纤维和基体中的内应力;其次,必须基于这些内应力,建立起复合材料的有效破坏判据,即细观力学强度理论;最后,必须根据独立测试的基体性能,准确定义其现场强度输入数据,因为后者无法测量。复合材料强度预报之所以困难,在于所涉及的每一个问题都极具挑战。由黄争鸣创建和发展的桥联理论,系统给出了这3方面问题的有效解决方案。该文简要介绍这些解决方案,包括桥联理论的最新进展及有待进一步研究的课题。

**关键词:** 复合材料; 强度预报; 内应力计算; 破坏判据; 应力集中系数; 现场强度; 桥联模型

**中图分类号:** TB333      **文献标志码:** A

**doi:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2015.06.001

## 引言

强度表征材料抵抗破坏的能力,但如何预报复合材料的强度却依然还是一个世界性大难题。世界著名复合材料力学家 Hashin 就曾指出:“即便最完整的单层板数据都不足以预测由这些单层板所构成的层合板破坏……。我本人不知如何预测层合板的破坏,鉴于此,我也不相信任何其他能够人能够做到”(见文献[1],1005页)。如果说由单层板性能预报层合板强度依然存在巨大挑战,那么,纯粹基于组分材料性能数据预报,毫无疑问难度更大。然而,一旦实现,复合材料结构设计将不再完全依赖于甚至无需试验,因为组分材料性能数据库可预先建立起来,这不仅节省大量材料选型与实验的费用,而且会大大缩短复合材料结构问世周期,甚至可能颠覆目前宝塔型复合材料结构的研制模式,其意义难以估量。

为此,首先必须准确计算出任意载荷作用下纤维和基体中的内应力。由黄争鸣创建的桥联理论<sup>[2]</sup>(bridging model),是“failure Olympics”参评理论中唯一可计算纤维和基体内热残余应力的理论<sup>[3]</sup>。并且,经国外多个研究小组的独立评估证实,桥联理论与 Eshelby 方法、Halpin-Tsai 公式、胞元(method of cells)模型、混合率/修正混合率模型、Chamis 模型、CCA(同心圆柱)模型、Mori-Tanaka 方法、自洽理论、有限元法等最常见的理论方法相比,在弹性阶段的计算结

\* 收稿日期: 2015-04-13; 修订日期: 2015-05-01

基金项目: 国家自然科学基金(11272238;11472192);教育部博士点基金(20120072110036)

作者简介: 黄争鸣(1957—),男,湖北钟祥人,教授(Tel: +86-21-65985373; E-mail: huangzm@tongji.edu.cn)。

果与实验吻合度最高<sup>[4,6]</sup>。

其次,必须基于所得到的纤维和基体内应力建立起判定单层板和层合板破坏的有效判据,即细观力学强度理论。目前针对复合材料的强度理论(破坏判据),绝大多数都是宏观力学(又称唯象)理论<sup>[1]</sup>,都需要输入复合材料(通常是单层板)的实测强度参数。而细观力学强度理论原则上不需要复合材料的强度数据,只提供组分材料的性能参数即可,这在目前的理论和实践中还很少见。

最后,必须准确提供纤维和基体的现场强度输入数据。业界早已认识到,由单一组分材料试验获得的原始强度与该组分材料在复合材料中的现场强度之间存在差异。但问题是:只有原始强度可测,谁也无法测定可信的现场强度。如果说内应力计算和细观力学强度理论毕竟还有众多其他学者的工作可资借鉴,那么,如何根据可测试的组分材料原始性能准确获得其现场强度输入数据,迄今还未见先例。少量的细观力学强度计算不得不依赖于对复合材料强度的反演来确定纤维尤其基体的现场强度输入数据<sup>[7-9]</sup>,意味着又必须做复合材料的破坏实验,使得原本无需进行复合材料实验的优势难以体现。这大概是细观力学强度理论发展缓慢的一个主要原因。

所幸桥联理论自上世纪末诞生后<sup>[10]</sup>,围绕上述3方面问题系统展开研究,现已基本实现由原始组分性能预报复合材料受任意载荷作用的极限强度这一目标。本文简要介绍其中的一些理论和方法,尤其是在基体现场强度计算方面的突破,同时也指出了有关课题的进一步研究方向。

## 1 内应力计算

任何材料在微观上都是非均匀的,都需相对单元体(复合材料代表性体积元 representative volume element 即 RVE)取平均后方可定义一点的应力和应变增量:

$$d\sigma_i = \left( \int_{V'} d\tilde{\sigma}_i dV \right) / V', \quad d\epsilon_i = \left( \int_{V'} d\tilde{\epsilon}_i dV \right) / V', \quad (1)$$

其中  $V'$  为 RVE 的体积,带“~”的表逐点量。若只有纤维和基体,式(1)变为

$$\{d\sigma_i\} = V_f \{d\sigma_i^f\} + V_m \{d\sigma_i^m\}, \quad (2)$$

$$\{d\epsilon_i\} = V_f \{d\epsilon_i^f\} + V_m \{d\epsilon_i^m\}, \quad (3)$$

$V_f$  为纤维体积含量,  $V_m = 1 - V_f$ , 上下标 f 或 m 表示与纤维或基体有关的量,无此则指复合材料的对应量。需要特别指出的是,即便复合材料中存在孔隙,只要孔隙率远小于纤维和基体含量,式(2)和(3)依然成立,本文中的理论也就适用。

假定存在一个桥联矩阵  $[A_{ij}]$ , 满足

$$\{d\sigma_i^m\} = [A_{ij}] \{d\sigma_j^f\}, \quad (4)$$

代入式(2)解出:

$$\{d\sigma_i^f\} = (V_f [I_{ij}] + V_m [A_{ij}])^{-1} \{d\sigma_j\} = [B_{ij}] \{d\sigma_j\}, \quad (5a)$$

$$\{d\sigma_i^m\} = [A_{ij}] [B_{ij}] \{d\sigma_j\}. \quad (5b)$$

再由式(3)可得<sup>[2]</sup>

$$[S_{ij}] = (V_f [S_{ij}^f] + V_m [S_{ij}^m] [A_{ij}]) (V_f [I_{ij}] + V_m [A_{ij}])^{-1}, \quad (6)$$

$[S_{ij}^f]$  和  $[S_{ij}^m]$  分别是纤维和基体的当前柔度矩阵。线弹性纤维及弹-塑性基体的柔度矩阵见附录 A。理论上,桥联矩阵与 Hill 的应力或应变分配矩阵等价,但其获得却极为困难<sup>[11]</sup>。此前,最具代表性的工作当属 Mori-Tanaka 利用 Eshelby 等效夹杂原理给出的单向复合材料桥联矩阵

的一个显式计算公式<sup>[11]</sup>：

$$[A_{ij}] = [C_{ij}^m]([I_{ij}] + [L_{ij}][S_{ij}^m]([C_{ij}^f] - [C_{ij}^m]))[S_{ij}^f], \quad (7)$$

现已成为复合材料弹性性能计算的一个经典方法,但该桥联矩阵有两点不足:1) 退化到二维时给出的复合材料平面柔度矩阵不对称<sup>[12]</sup>;2) 只能用于计算线弹性应力,当组分(基体)材料进入塑性变形后不适用.复合材料达到破坏前必然历经非线性变形,忽略组分尤其基体材料的塑性变形势必会影响内应力的计算精度,这或许是 Mori-Tanaka-Eshelby 理论很少用于复合材料强度预报的原因所在.

由黄争鸣独自导出的桥联矩阵<sup>[10]</sup>,克服了上述两点不足,在弹性阶段可视为对式(7)的简化得到<sup>[12-13]</sup>,不仅表达式大为简化,而且计算精度更高<sup>[4-6]</sup>.由桥联理论给出的平面桥联矩阵 $[A_{ij}]$ 和 $[B_{ij}]$ 的显式公式见附录 B.

当考虑热应力时,纤维和基体中的内应力修正公式为<sup>[2,10,12]</sup>

$$\{d\sigma_i^f\} = (V_f[I_{ij}] + V_m[A_{ij}])^{-1} \{d\sigma_j\} - V_m \{b_i^m\} dT/V_f, \quad (8a)$$

$$\{d\sigma_i^m\} = [A_{ij}](V_f[I_{ij}] + V_m[A_{ij}])^{-1} \{d\sigma_j\} + \{b_i^m\} dT, \quad (8b)$$

$$\{b_i^m\} = ([I_{ij}] - [A_{ij}](V_f[I_{ij}] + V_m[A_{ij}])^{-1})([S_{ij}^f] - [S_{ij}^m])^{-1}(\{\alpha_j^m\} - \{\alpha_j^f\}), \quad (8c)$$

其中 $\{\alpha_j^f\}$ 和 $\{\alpha_j^m\}$ 分别是纤维和基体的热膨胀系数矢量, $dT = T_1 - T_0$ , $T_1$ 是工作温度(如室温), $T_0$ 为参考温度(内应力已知).

应用于层合板分析,将上述桥联模型公式与经典层合板理论结合,得到<sup>[2]</sup>

$$\begin{cases} d\Omega_1^I + dN_{xx} \\ d\Omega_2^I + dN_{yy} \\ d\Omega_3^I + dN_{xy} \\ d\Omega_1^{II} + dM_{xx} \\ d\Omega_2^{II} + dM_{yy} \\ d\Omega_3^{II} + dM_{xy} \end{cases} = \begin{bmatrix} Q_{11}^I & Q_{12}^I & Q_{13}^I & Q_{11}^{II} & Q_{12}^{II} & Q_{13}^{II} \\ Q_{12}^I & Q_{22}^I & Q_{23}^I & Q_{12}^{II} & Q_{22}^{II} & Q_{23}^{II} \\ Q_{13}^I & Q_{23}^I & Q_{33}^I & Q_{13}^{II} & Q_{23}^{II} & Q_{33}^{II} \\ Q_{11}^{II} & Q_{12}^{II} & Q_{13}^{II} & Q_{11}^{III} & Q_{12}^{III} & Q_{13}^{III} \\ Q_{12}^{II} & Q_{22}^{II} & Q_{23}^{II} & Q_{12}^{III} & Q_{22}^{III} & Q_{23}^{III} \\ Q_{13}^{II} & Q_{23}^{II} & Q_{33}^{II} & Q_{13}^{III} & Q_{23}^{III} & Q_{33}^{III} \end{bmatrix} \begin{cases} d\epsilon_{xx}^0 \\ d\epsilon_{yy}^0 \\ 2d\epsilon_{xy}^0 \\ d\kappa_{xx}^0 \\ d\kappa_{yy}^0 \\ 2d\kappa_{xy}^0 \end{cases}, \quad (9a)$$

$$\begin{cases} Q_{ij}^I = \sum_{k=1}^n (C_{ij}^G)_k (z_k - z_{k-1}), & Q_{ij}^{II} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (C_{ij}^G)_k (z_k^2 - z_{k-1}^2), \\ Q_{ij}^{III} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (C_{ij}^G)_k (z_k^3 - z_{k-1}^3), \end{cases} \quad (9b)$$

$$d\Omega_i^I = \sum_{k=1}^n (\beta_i)_k^G (z_k - z_{k-1}) dT, \quad d\Omega_i^{II} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\beta_i)_k^G (z_k^2 - z_{k-1}^2) dT, \quad (9c)$$

$$i, j = 1, 2, 3,$$

$$[(C_{ij}^G)_k] = ([T_{ij}]_c)_k ([S_{ij}]_k)^{-1} ([T_{ij}]_c)_k^T, \quad (9d)$$

$$\{\beta_i\}_k^G = \{(\beta_1)_k^G, (\beta_2)_k^G, (\beta_3)_k^G\}^T = ([T_{ij}]_c)_k ([S_{ij}]_k)^{-1} \{\alpha_j\}_k, \quad (9e)$$

$$\{\alpha_i\} = -V_m([S_{ij}^f] - [S_{ij}^m])\{b_j^m\} + V_f\{\alpha_i^f\} + V_m\{\alpha_i^m\}, \quad (9f)$$

$dN_{xx}, dN_{yy}, dN_{xy}$ 和 $dM_{xx}, dM_{yy}, dM_{xy}$ 分别是施加在层合板上单位长度内的面力和力矩增量(图1), $n$ 为层合板层数, $z_{k-1}$ 和 $z_k$ 是第 $k$ 层下底与上顶面的 $z$ 坐标.第 $k$ 层板分担的局部坐标系下的应力增量为<sup>[2]</sup>

$$\{d\sigma_i\}_k = ([T_{ij}]_s^T)_k \{d\sigma_j\}_k^G = ([T_{ij}]_s^T)_k ([C_{ij}^G)_k \{d\epsilon_j\}_k^G - \{\beta_i\}_k^G dT), \quad (10a)$$

$$\left\{ d\varepsilon_j \right\}_k^G = \left\{ d\varepsilon_{xx}^0 + \frac{z_k + z_{k-1}}{2} d\kappa_{xx}^0, d\varepsilon_{yy}^0 + \frac{z_k + z_{k-1}}{2} d\kappa_{yy}^0, \right. \\ \left. 2d\varepsilon_{xy}^0 + (z_k + z_{k-1}) d\kappa_{xy}^0 \right\}. \quad (10b)$$

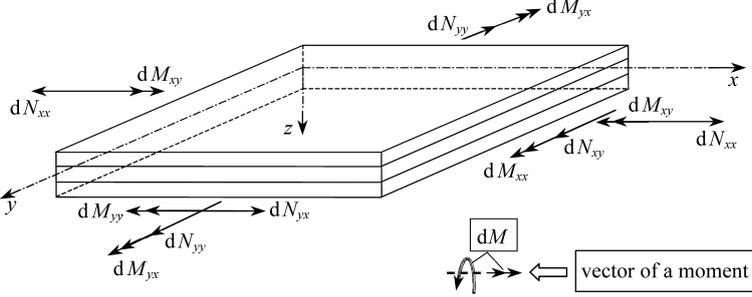


图 1 层合板面力和力矩正方向定义

Fig. 1 Definition of the positive forces and moments applied on a laminate

式(9d)、(9e)及(10a)中,  $[T_{ij}]_c$  和  $[T_{ij}]_s$  表坐标变换矩阵( $\theta$ 为铺设角):

$$\left\{ \begin{array}{l} [T_{ij}]_c = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & -\sin(2\theta) \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & \sin(2\theta) \\ \frac{\sin(2\theta)}{2} & -\frac{\sin(2\theta)}{2} & \cos(2\theta) \end{bmatrix}, \\ [T_{ij}]_s = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & -\frac{\sin(2\theta)}{2} \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & \frac{\sin(2\theta)}{2} \\ \sin(2\theta) & -\sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{bmatrix}. \end{array} \right. \quad (11)$$

需要指出的是,在层与层之间引入纯基体界面层(图 2)将有助于进一步提高层合板中内应力的计算精度<sup>[14]</sup>,此时,待分析的层合板总层数将由原始的  $n$  层增加到  $2n - 1$  层(图 2),式(9b)和(9c)的求和上限也相应变动,界面层性能与单纯基体性能相同,厚度取为原始单层厚度  $h_0$  的 5%<sup>[14]</sup>.假定层合板整体厚度及纤维含量不变,相应调整原始单层的厚度及纤维含量(图 2),详见文献[14].

## 2 破坏判据

将式(10a)代入式(8a)和(8b)计算出纤维和基体中的应力增量后,应力全量为

$$\{\sigma_i^f\}_l = \{\sigma_i^f\}_{l-1} + \{d\sigma_i^f\}, \quad l = 1, 2, \dots, \quad (12a)$$

$$\{\sigma_i^m\}_l = \{\sigma_i^m\}_{l-1} + \{d\sigma_i^m\}, \quad l = 1, 2, \dots, \quad (12b)$$

其中,  $\{\sigma_i^f\}_0$  和  $\{\sigma_i^m\}_0$  为纤维和基体中的残余应力.当制备温度(纤维和基体的 0 应力温度)与工作温度不等时,重复上述过程得到每一层纤维和基体中的热残余应力,此时只需令所有外载 ( $dN$  和  $dM$ ) 为 0 即可.若  $\{\sigma_i^f\}_l$  或  $\{\sigma_i^m\}_l$  达到了纤维或基体的极限应力状态,就认为对应的单层板产生了破坏.

### 2.1 纤维破坏

纤维为细长结构,类似梁,主要承受轴向载荷,采用修正的最大正应力破坏判据不仅所需

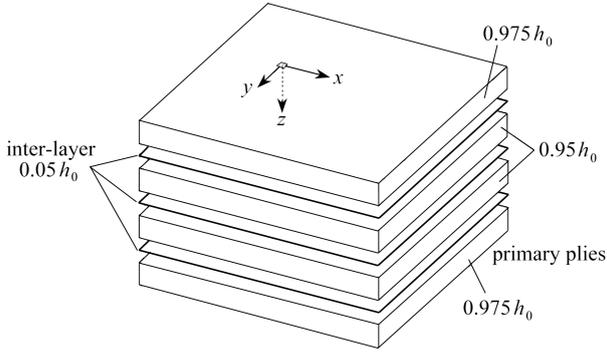


图2 在层合板各单层之间加入纯基体界面层,但整体厚度及纤维含量不变

Fig. 2 Schematic of pure matrix interlayers inserted in between 2 adjacent primary laminas of a laminate with the whole thickness and fiber volume fraction of the laminate unchanged

强度参数最少,而且经典材料力学也表明是最合适的判据之一,即

$$\sigma_{eq,t}^f \geq \sigma_{u,t}^f, \tag{13a}$$

$$\sigma_{eq,t}^f = \begin{cases} \sigma_f^1, & \sigma_f^3 < 0, \\ [(\sigma_f^1)^q + (\sigma_f^2)^q]^{1/q}, & \sigma_f^3 = 0, \end{cases} \tag{13b}$$

$$\sigma_{eq,c}^f \geq -\sigma_{u,c}^f, \tag{14a}$$

$$\sigma_{eq,c}^f = \begin{cases} \sigma_f^3, & \sigma_f^1 > 0, \\ \sigma_f^3 - \sigma_f^1, & \sigma_f^1 \leq 0, \end{cases} \tag{14b}$$

其中,  $\sigma_{u,t}^f$  和  $\sigma_{u,c}^f$  为纤维沿轴向的拉伸和压缩强度,  $\sigma_f^1, \sigma_f^2$  和  $\sigma_f^3$  是纤维的主应力( $\sigma_f^1 \geq \sigma_f^2 \geq \sigma_f^3$ ), 幂指数  $q$  一般取  $3^{[10]}$ , 式(13b)和(14b)分别计入了多轴拉伸和多轴压缩对材料强度的降低和提升作用。

## 2.2 基体破坏

基体为连续相,其破坏形式远比纤维复杂.例如,基体受拉与受剪破坏概率相同,且最大主应力等于各自外加应力,但测试的拉伸与剪切强度有异,提供任何单一强度参数都会导致另一种加载情况下的强度预报失真.此外,添加纤维后的基体强度表现为各向异性,一般而言,采用含不同方向强度参数的判据如 Tsai-Wu 判据更合理.于是,一旦下述条件满足,就认为基体达到了破坏:

$$F_1(\sigma_{11}^m)^2 + F_2(\sigma_{22}^m)^2 + F_3\sigma_{11}^m\sigma_{22}^m + F_4(\sigma_{12}^m)^2 + F_5\sigma_{11}^m + F_6\sigma_{22}^m \geq 1, \tag{15a}$$

$$\begin{cases} F_1 = \frac{1}{X_m X'_m}, F_2 = \frac{1}{Y_m Y'_m}, F_3 = -\sqrt{F_1 F_2}, F_4 = \frac{1}{S_m^2}, \\ F_5 = \frac{X'_m - X_m}{X_m X'_m}, F_6 = \frac{Y'_m - Y_m}{Y_m Y'_m}, \end{cases} \tag{15b}$$

其中,  $X_m, X'_m, Y_m, Y'_m, S_m$  分别表示基体的现场轴向(与纤维方向一致)拉伸、轴向压缩、横向拉伸、横向压缩及面内剪切强度.基体的破坏模式由 3 个主应力之和判定,同时也告知当前的基体材料参数究竟是取拉伸还是压缩的实验数据<sup>[10,2]</sup>:

基体受等效拉伸

$$\sigma_m^1 + \sigma_m^2 + \sigma_m^3 \geq 0; \tag{16a}$$

基体受等效压缩

$$\sigma_m^1 + \sigma_m^2 + \sigma_m^3 < 0. \quad (16b)$$

## 2.3 致命与非致命破坏

桥联理论诞生后的一个标志性进展,是发现了致命与非致命破坏<sup>[14]</sup>:在4种破坏模式中,只有基体的拉伸破坏是非致命破坏,其余的3种破坏(纤维拉伸、纤维压缩和基体压缩破坏)皆为致命破坏.无论哪一个单层出现致命破坏,就认为层合板达到了极限破坏,对应的外载称为层合板的极限强度,计算过程终止.这一发现不仅具有更为合理的唯象基础<sup>[14]</sup>,而且现有结果说明强度预报精度更高<sup>[14-15]</sup>.此前,桥联理论预报层合板的极限强度皆将最后一层破坏定义为极限破坏<sup>[9-10,16-18]</sup>,而不管单层破坏是由纤维还是基体的破坏所引起.这与业界认可的层合板承载能力与组分材料破坏模式有关不符.例如,一般认为层合板中尽管出现基体破坏,但若纤维保持完好该层板依然还具备一定承载能力.

需要注意的是,致命破坏不适用于纯基体界面层,后者破坏皆为非致命破坏.

## 2.4 刚度衰减

既然存在非致命破坏,那么,破坏后的单层对层合板整体刚度的贡献就必须部分折减.迄今,人们提出了众多刚度衰减格式<sup>[19]</sup>,但无法证明何种格式最优.鉴于非致命破坏对应基体的拉伸破坏,基体达到拉伸强度时应力-应变曲线上的切线斜率远小于初始斜率,文献[14]提出仅对破坏层的基体模量按如下衰减:

$$E^m = 0.01E_0^m, \quad (17)$$

其中  $E_0^m$  是该层破坏发生前的基体模量,其它材料参数皆保持不变.

## 2.5 极限破坏

除致命破坏外,另一种可能是在层合板分析中连续不断使用式(17),这将导致单层板(进而层合板)的应变无限大,与实际不符.因此,必须施加一个应变约束条件.对聚合物基复合材料,其最大应变一般不超过15%<sup>[20]</sup>.文献[14]建议将12%取为极限应变条件.这样,层合板的极限破坏条件有4个,见表1,任何一个出现都对应层合板的极限强度.

表1 层合板极限破坏形式

Table 1 Ultimate failure types of a laminate

case	failure description
1	a matrix compressive failure in any primary (excluding any interlayer) ply
2	a fiber tensile failure in any ply
3	a fiber compressive failure in any ply
4	a strain component in any ply is absolutely greater than or equal to 12%

需要注意的是,12%的应变约束仅针对聚合物基复合材料,对其它如橡胶基或陶瓷基复合材料,临界应变应选更大或更小值.

# 3 输入参数

## 3.1 基体强度之外的其它参数

前述应力计算和破坏判据公式中涉及众多纤维和基体的现场(in-situ)性能参数,必须确定所有这些参数后方可实现复合材料的强度预报.

研究表明,纤维和基体的现场弹性性能与其原始性能相同,就是说,可通过单一组分材料的性能实验或由材料手册/供应商提供的数据确定.

由于直径细小,纤维通常看作为直到破坏都保持线弹性.但纤维的强度很难由实验直接测

定,尽管单丝拉伸试验原则上可行,但由此测得的强度参数一般离散性很大,实践中通常由反演确定纤维的拉伸和压缩强度<sup>[21]</sup>,材料手册或供应商提供的纤维强度最有可能是借助混合率公式确定:

$$\sigma_u^f = (\sigma_{11}^u - V_m \sigma_u^m) / V_f, \quad (18)$$

其中,  $\sigma_{11}^u$  为单向复合材料的轴向拉伸/压缩强度,  $\sigma_u^f$  是纤维的轴向拉伸/压缩强度,  $\sigma_u^m$  为基体的原始拉伸/压缩强度. 因此,所有纤维强度尤其压缩强度,原本是现场强度. 虽然反演纤维强度的复合材料并非研究对象,但据此确定的纤维强度具有普适性,这是因为纤维中的应力场均匀<sup>[22-23]</sup>,不存在应力集中的缘故. 只不过,式(18)的近似性十分明显. 单向复合材料中的纤维和基体构成了静不定体系,由材料力学可知,欲求静不定体系中纤维的应力,进而确定其所能承受的最大应力即强度,必须应用变形协调条件,强度公式中必然会含有纤维和基体的弹性模量. 现在的式(18)中缺失了这些弹性性能,只能是一种近似. 因此,纤维强度最好由桥联理论公式反演确定<sup>[2]</sup>:

$$\sigma_u^f = \frac{E_{11}^f \sigma_{11}^u}{V_f E_{11}^f + V_m E^m}, \quad (19)$$

其中  $E_{11}^f$  是纤维的轴向弹性模量. 式(19)的适用条件是假定纤维和基体直到破坏都保持线弹性,并且基体强度足够高使得单向复合材料受轴向拉伸时纤维首先破坏. 更多讨论可参见文献[24-25].

如此一来,只有基体的现场强度无从确定. 事实上,复合材料中的基体应力场非均匀<sup>[23]</sup>,这就使得其现场强度与原始强度存在差异. 当单向复合材料仅受横向载荷  $\sigma_{22}$  作用,忽略基体塑性变形及热残余应力的影响,基体中的非 0 应力分量(见献[2],亦可由附录 B 导出)是

$$\sigma_{11}^m = \frac{V_f (\nu^m E_{11}^f - \nu_{12}^f E^m) [\beta E_{11}^f E_{22}^f + (1 - \beta) E^m E_{11}^f - E^m E_{22}^f]}{(E_{11}^f - E^m) (V_f E_{11}^f + V_m E^m) [(V_f + \beta V_m) E_{22}^f + (1 - \beta) V_m E^m]} \sigma_{22}, \quad (20a)$$

$$\sigma_{22}^m = \frac{\beta E_{22}^f + (1 - \beta) E^m}{(V_f + \beta V_m) E_{22}^f + (1 - \beta) V_m E^m} \sigma_{22}, \quad (20b)$$

$E_{22}^f, \nu_{12}^f$  分别是纤维的横向模量及轴向 Poisson 比,  $\nu^m$  为基体的 Poisson 比,  $\beta$  为桥联参数,用于调整纤维排列对复合材料横向性能的影响<sup>[10]</sup>,若缺少实验数据,  $\beta$  可在 0.35 与 0.45 之间取值. 由于横向载荷作用时基体会首先破坏,最大应力判据给出单向复合材料的横向拉伸强度是

$$\sigma_{u,1}^{u,1} = \frac{(V_f + \beta V_m) E_{22}^f + (1 - \beta) V_m E^m}{\beta E_{22}^f + (1 - \beta) E^m} Y_m. \quad (21)$$

考虑一种玻纤/环氧复合材料<sup>[26]</sup>,有关性能数据是  $V_f = 0.62, E_{22}^f = 80 \text{ GPa}, E^m = 3.35 \text{ GPa}$  及  $\sigma_{u,1}^m = 80 \text{ MPa}$ . 取  $\beta = 0.4$  并令  $Y_m = \sigma_{u,1}^m$ , 由式(21)预报的横向拉伸强度为 147 MPa,而实测强度仅为 35 MPa<sup>[26]</sup>. 这表明,基体的现场横向拉伸强度  $Y_m$  必然大幅小于其原始拉伸强度  $\sigma_{u,1}^m$ .

### 3.2 基体中的应力集中系数

基体现场强度异于原始强度的因素众说纷纭<sup>[27]</sup>,但我们发现,添加纤维后的应力集中是导致基体现场横向强度低于其原始强度的根本原因<sup>[15, 28-31]</sup>. 这是桥联理论诞生后所取得的另一项突破性进展. 开圆孔的基体平板受面内拉力会在孔边产生应力集中,孔内填充异于基体性能的纤维后同样会产生应力集中. 一旦求出应力集中系数,基体现场强度就等于其原始强度除以该系数.

然而,基体的应力集中系数却不可仿照经典方法定义为孔边(纤维和基体界面上)一点的

应力与外加应力之比,否则,所得应力集中系数将与纤维体积含量无关<sup>[15,28-29]</sup>。更不利的是,一旦纤维和基体界面出现裂纹(实际中比比皆是,例如金属膜与增强纤维制成的金属基复合材料的纤维/基体界面上就存在接触死角),经典方法给出的基体现场强度为0,因为裂纹尖端的应力无限大。既然不可再取点应力,就只能对应力平均后方可定义应力集中系数。可是,须相对哪种几何体(线、面抑或体)平均?注意到经典应力集中系数定义为点应力与远场外加应力之比,后者本质上是一种面(相对远场作用面)平均应力,由相似性法则,基体的应力集中系数只可能定义为线平均应力与体平均应力之比。

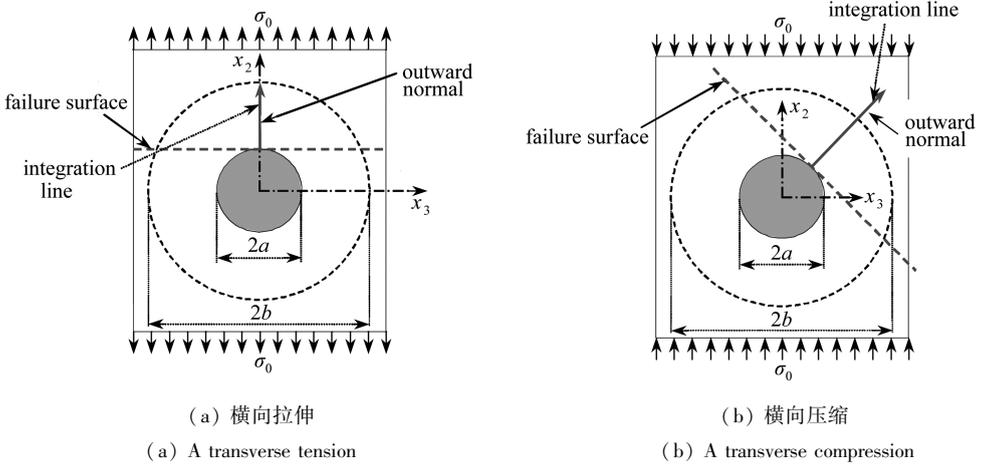


图3 基体的应力线平均示意图

Fig. 3 Schematic of the stress line based average used in defining SCF of the matrix in a composite

具体相对哪条直线/曲线求平均应力呢?最初曾沿平行于外载方向<sup>[15,28-29]</sup>,由此得到线平均后的应力最大,毕竟经典定义与最大应力值有关。但如此得到的横向拉、压应力集中系数相等且破坏面相同,众多实验证实横向拉伸破坏面与外载垂直,而横向压缩破坏面与外载方向成一斜角<sup>[32-34]</sup>。因此,应力平均须沿破坏面的外法线方向进行,见图3。

最后,如何确定横向压缩破坏面方向角?单向复合材料在横截面内是各向同性的,横向拉伸与横向压缩强度不等,破坏面位置不同,这与各向同性脆性材料的特性类似。Mohr通过绘制这类材料破坏时应力圆的包络线,可准确确定出任何应力组合作用面破坏时的方位角。为简单起见,将包络线用二次曲线(抛物线)替代,只需单向拉伸和单向压缩两个试验数据,即可完全确定该二次曲线,因曲线还与横轴相交(图4)。由此得到单向压缩破坏面方向角为<sup>①</sup>

$$\phi = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{\sigma_{u,c} - \sigma_{u,t}}{2\sigma_{u,c}}$$

对应复合材料横向压缩,有

$$\phi = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{\sigma_{22}^{u,c} - \sigma_{22}^{u,t}}{2\sigma_{22}^{u,c}}$$

利用式(21)并假定纤维和基体拉、压模量相同,就有

$$\phi = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{Y'_m - Y_m}{2Y'_m} \quad (22)$$

① Huang Z-M, Xin L M. Stress concentration factors of matrix in a composite, submitted to *Comp Sci Tech*.

进一步,将基体的现场强度用原始强度替代,得到

$$\phi = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{\sigma_{u,c}^m - \sigma_{u,t}^m}{2\sigma_{u,c}^m}, \quad (23)$$

其中,  $\sigma_{u,c}^m$  为基体的原始压缩强度.

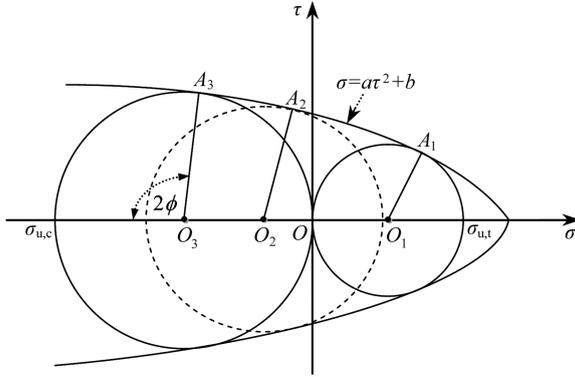


图4 抛物线替代各向同性材料破坏面应力圆包络线

Fig. 4 A parabolic approximation to the failure locus envelope of an isotropic material

于是,基体的横向应力集中系数<sup>①</sup>

$$K_{22}(\phi) = \frac{1}{|\mathbf{R}_\phi^b - \mathbf{R}_\phi^a|} \int_{|\mathbf{R}_\phi^a|}^{|\mathbf{R}_\phi^b|} \frac{\tilde{\sigma}_{22}^m}{|\mathbf{R}_\phi^a| (\sigma_{22}^m)_{BM}} d|\mathbf{R}_\phi|, \quad (24)$$

其中  $\tilde{\sigma}_{22}^m$  是特征体元中基体的逐点应力沿外载方向的分量,见文献[29],  $(\sigma_{22}^m)_{BM}$  是桥联理论计算的基体相同方向应力,见式(20b),  $\mathbf{R}_\phi$  为过坐标轴原点且与  $x_2$  轴夹  $\phi$  角的矢量,  $\mathbf{R}_\phi^a$  和  $\mathbf{R}_\phi^b$  分别是  $\mathbf{R}_\phi$  到纤维和基体柱面的位置矢量.注意,纤维和基体柱的半径为  $a$  及  $b = a/\sqrt{V_f}$ <sup>[28-29]</sup>. 积分式(24),得到基体横向拉伸应力集中系数<sup>①</sup>:

$$K_{22}^t = K_{22}(0) = \left[ 1 + \frac{\sqrt{V_f}}{2} A + \frac{\sqrt{V_f}}{2} (3 - V_f - \sqrt{V_f}) B \right] \left[ \frac{(V_f + V_m \beta) E_{22}^f + V_m (1 - \beta) E^m}{\beta E_{22}^f + (1 - \beta) E^m} \right], \quad (25)$$

而基体的横向压缩应力集中系数就是

$$K_{22}^c = K_{22}(\phi) = \left\{ 1 - \frac{\sqrt{V_f}}{2} A \frac{\sigma_{u,c}^m - \sigma_{u,t}^m}{2\sigma_{u,c}^m} + \frac{B}{2(1 - \sqrt{V_f})} \left[ -V_f^2 \left( 1 - 2 \left( \frac{\sigma_{u,c}^m - \sigma_{u,t}^m}{2\sigma_{u,c}^m} \right)^2 \right) + \frac{(\sigma_{u,c}^m + \sigma_{u,t}^m) V_f \left( 1 + \frac{\sigma_{u,c}^m - \sigma_{u,t}^m}{\sigma_{u,c}^m} \right) - \sqrt{V_f} \left( \frac{\sigma_{u,c}^m - \sigma_{u,t}^m}{\sigma_{u,c}^m} + 1 - 2 \left( \frac{\sigma_{u,c}^m - \sigma_{u,t}^m}{2\sigma_{u,c}^m} \right)^2 \right) \right] \right\} \times \left[ \frac{(V_f + V_m \beta) E_{22}^f + V_m (1 - \beta) E^m}{\beta E_{22}^f + (1 - \beta) E^m} \right]. \quad (26)$$

式(25)和(26)中,  $A$  和  $B$  取值为<sup>[29]</sup>

$$A = \frac{[1 - \nu^m - 2(\nu^m)^2] E_{22}^f - [1 - \nu_{23}^f - 2(\nu_{23}^f)^2] E^m}{E_{22}^f (1 + \nu^m) + E^m [1 - \nu_{23}^f - 2(\nu_{23}^f)^2]}, \quad (27a)$$

$$B = \frac{E^m(1 + \nu_{23}^f) - (1 + \nu^m)E_{22}^f}{E_{22}^f[\nu^m + 4(\nu^m)^2 - 3] - E^m(1 + \nu_{23}^f)}, \quad (27b)$$

$\nu_{23}^f$  是纤维的横向 Poisson 比, 满足  $G_{23}^f = 0.5E_{22}^f/(1 + \nu_{23}^f)$ 。

### 3.3 基体的现场强度

得到应力集中系数后, 基体的现场强度可表示为

$$X_m = \sigma_{u,t}^m, \quad X'_m = \sigma_{u,c}^m, \quad S_m = \sigma_{u,s}^m, \quad Y_m = \sigma_{u,t}^m/K_{22}^t, \quad Y'_m = \sigma_{u,c}^m/K_{22}^c, \quad (28)$$

就是说, 添加纤维后对基体的现场轴向强度和面内剪切强度几乎没有影响或影响小至忽略不计, 横向拉压强度则由原始强度除以对应的应力集中系数得到。

值得注意的是, 计算基体塑性特征参数时也必须考虑应力集中系数的影响, 具体而言, 基体的 Mises 等效应力和应力偏量计算式须按如下修正 (见附录 A):

$$\sigma_e^m = \sqrt{(\sigma_{11}^m)^2 + (K_{22}\sigma_{22}^m)^2 - (\sigma_{11}^m)(K_{22}\sigma_{22}^m) + 3(\sigma_{12}^m)^2}, \quad (29a)$$

$$(\sigma'_{11})^m = (2\sigma_{11}^m - K_{22}\sigma_{22}^m)/3, \quad (\sigma'_{22})^m = (2K_{22}\sigma_{22}^m - \sigma_{11}^m)/3, \quad (29b)$$

其中

$$K_{22} = \begin{cases} K_{22}^t, & \sigma_{22}^m \geq 0, \\ K_{22}^c, & \sigma_{22}^m < 0. \end{cases} \quad (30)$$

## 4 单向复合材料强度公式

为简单起见, 假定纤维和基体直到破坏都保持线弹性, 并忽略纤维和基体中的热残余应力。如此, 一组单向复合材料的强度公式归纳如下:

### 4.1 轴向强度

轴向强度由式(19)计算, 即

$$\sigma_{11}^u = \frac{(V_f E_{11}^f + V_m E^m) \sigma_u^f}{E_{11}^f} \quad (31)$$

分别代入纤维基体的拉伸模量及拉伸强度或压缩模量及压缩强度, 得到拉伸强度  $\sigma_{11}^{u,t}$  或压缩强度  $\sigma_{11}^{u,c}$ 。

### 4.2 横向强度

从式(21), 可得单向复合材料的横向强度公式:

$$\sigma_{22}^u = \frac{(V_f + 0.4V_m)E_{22}^f + 0.6V_m E^m}{(0.4E_{22}^f + 0.6E^m)K_{22}} \sigma_u^m. \quad (32)$$

### 4.3 面内剪切强度

在面内剪应力作用下, 单向复合材料的破坏主要由基体破坏所引起, 剪切强度公式 (见文献[24], 或从附录 B 有关公式导出) 是

$$\sigma_{12}^u = \frac{(V_f + \alpha V_m)G_{12}^f + (1 - \alpha)V_m G^m}{[\alpha G_{12}^f + (1 - \alpha)G^m]} \sigma_{u,s}^m. \quad (33)$$

若缺少实验数据, 桥联参数  $\alpha$  可在 0.4 到 0.5 之间取值, 例如取  $\alpha = 0.45$ 。

## 5 算 例

为评估当今复合材料破坏与强度分析现状, 比试现有理论的预测能力, Hinton 等在英国的两个皇家学会支持下, 汇集了 19 种世界上最具代表性的理论, 分别对 4 种材料体系共 125 个

考题进行盲算(预先不知实验结果),待所有盲算结果都提交后,再根据与实验对比的吻合度打分并排名<sup>[1]</sup>.桥联理论诞生不久也受邀参加了评估,尽管在参评的细观力学强度理论(通过对组分材料的破坏分析确定复合材料的强度)中综合表现最好,但在全部参评的19种理论中仅排名第8.主要短板是选用的破坏判据不够合理,纤维和基体破坏均由最大正压力破坏判据控制,尤其将最后一层破坏作为极限破坏,破坏后的单层实施完全刚度衰减,这些处理明显不够成熟.此外,纤维尤其基体强度通过反演确定,也是其另一短板.精度排名靠前的都是宏观力学强度理论,其应用必须输入单层板的强度参数.

表 2 4种材料组合的纤维和基体性能及对应的复合材料强度

Table 2 Properties of 4 fiber and matrix systems and strengths of the unidirectional composites made from them ( $\beta = 0.4, \alpha = 0.45$ )

		AS4/3501-6		T300/BSL914C		E-glass/LY556		E-glass/MY750	
		fiber	matrix	fiber	matrix	fiber	matrix	fiber	matrix
$E_{11}$	/GPa	225	4.2	230	4.0	80	3.35	74	3.35
$E_{22}$	/GPa	15	4.2	15	4.0	80	3.35	74	3.35
$\nu_{12}$		0.2	0.34	0.2	0.35	0.2	0.35	0.2	0.35
$G_{12}$	/GPa	15	1.567	15	1.481	33.33	1.24	30.8	1.24
$G_{23}$	/GPa	7	1.567	7	1.481	33.33	1.24	30.8	1.24
$\sigma_{u,t}$	/MPa	3 350	69	2 500	75	2 150	80	2 150	80
$\sigma_{u,c}$	/MPa	2 500	250	2 000	150	1 450	120	1 450	120
$\sigma_{u,s}$	/MPa	-	50	-	70	-	54 <sup>a</sup>	-	54 <sup>b</sup>
$\sigma_{11}^{u,t}$	/MPa, measured	1 950		1 500		1 140		1 280	
$\sigma_{11}^{u,c}$	/MPa, measured	1 480		900		570		800	
$\sigma_{22}^{u,t}$	/MPa, measured	48		27		35		40	
$\sigma_{22}^{u,c}$	/MPa, measured	200		200		114		145	
$\sigma_{12}^u$	/MPa, measured	79		80		72		73	
$V_f$		0.60		0.60		0.62		0.60	
$K_{22}^t$		1.899		1.932		2.713		2.658	
$K_{22}^c$		1.329		1.414		1.828		1.782	
$\sigma_{11}^{u,t}$	rule of mixture	2 037.6		1 530		1 363.4		1 322	
(predicted)	relative error	4.5%		2%		19.6%		3.3%	
$\sigma_{11}^{u,c}$	rule of mixture	1 600		1 260		944.6		918	
(predicted)	relative error	8.1%		40%		65.7%		12.9%	
$\sigma_{11}^{u,t}$	bridging model	2 035		1 517.4		1 367.2		1 326	
(predicted)	relative error	4.4%		1.2%		19.9%		3.6%	
$\sigma_{11}^{u,c}$	bridging model	1 518.7		1 213.9		922.1		894.3	
(predicted)	relative error	2.6%		34.9%		61.8%		11.8%	
$\sigma_{22}^{u,t}$	bridging model	52.9		57.1		54.2		54.3	
(predicted)	relative error	10.2%		111.5%		54.9%		35.8%	
$\sigma_{22}^{u,c}$	bridging model	273.9		156		120.7		121.6	
(predicted)	relative error	37%		-22%		5.9%		-16.1%	
$\sigma_{12}^u$	bridging model	79.1		111.3		91.7		90.2	
(predicted)	relative error	0.1%		39.1%		27.4%		23.6%	

a. Taken from ref. [35] for the same matrix material;

b. Taken from ref. [36] for the same matrix material.

根据组织者提供的原始组分材料性能数据,对上述 125 个考题重新进行计算.遗憾的是,组织者仅提供了纤维和基体的全部弹性和强度参数(见表 2),缺少基体的应力-应变曲线数据<sup>[26]</sup>.首先,我们分别用式(18)、(31)、(32)和(33)计算了 4 种单向复合材料的强度,只用到纤维和基体的弹性及强度数据,输入参数最少,结果列于表 2 中.注意,文献[26]中所欠缺的 LY556 及 MY750 基体的剪切强度分别出现在文献[35]和[36]中.从表中可以看出,桥联理论的整体预报精度令人满意.4 种复合材料的轴向及横向拉、压及面内剪切共计 20 个强度值,桥联理论的预报值与实验值对比误差在 50%之外的只有 3 个,仅占 15%,高达 85%的预报值误差在 50%以内.由于完全根据组分材料原始性能进行预报,任何纤维、基体尤其复合材料实验数据的离散性都会影响对比精度.例如表 2 中的两种玻纤/环氧复合材料,其组分材料的强度相同,纤维含量相近,仅存在低于 10%的纤维模量差异,但测试的复合材料轴向压缩强度之差竟高达 40%,这恐怕与实验的离散性不无关系.表 2 还说明,虽然混合率强度公式(18)用于计算碳纤维及玻璃纤维增强单向复合材料的轴向强度一般可以接受,但整体表现不如桥联模型公式(31),纤维和基体之间的强度差异越小,桥联模型公式的优势越明显.

进一步,我们对文献[26]所描述的所有问题进行了重分析.与简单公式计算复合材料轴向及横向强度(表 2)不同的是,对层合板的分析分别还考虑了基体塑性变形和热残余应力的影响.在所考虑的 4 个基体材料中,文献[36]中列出了 MY750 的原始拉伸和压缩应力-应变曲线数据,本文直接引用.鉴于文献[26]中给出的 LY556 所有参数皆与 MY750 的对应相同,本文认为两种基体材料的原始拉、压应力-应变曲线各自一样.其它两个基体的拉伸塑性数据由文献[26]提供的对应单向复合材料剪切应力-应变曲线反演确定.3501-6 的压缩曲线由文献[26]提供的单向复合材料横向压缩应力-应变曲线反演得到.只有 914C 的压缩曲线无从获得,本文假定为与其拉伸曲线相同.4 种基体的拉、压应力-应变参数列于表 3 中.

为节省篇幅,略去针对每个问题的理论预报与实验对比详情,只依据组织者拟定的评分标准<sup>[37]</sup>,计算了重新预报的综合得分,结果列于表 4 中.表中分别给出了 3 种情况下的桥联理论预报得分.一是假定基体仅产生线弹性变形且不考虑热残余应力,这种情况下的输入参数最少,只需表 2 中所列的纤维和基体原始性能数据即可,计算实施最方便,用于初始材料选型设计,具有难以比拟的优越性;二是假定基体产生弹-塑性变形,但不考虑热残余应力;三是分别计入了基体的塑性变形和热残余应力的影响.所有计算都假定纤维直到破坏保持线弹性.参评精度最高的 Zinoviev 理论的得分情况<sup>[38]</sup>也列于表 4 便于对比.结果显示,计入基体的塑性变形对预报精度尤其得分 A(计算结果与实验对比相差在 10%以内)有大幅提高.我们还发现,基于原始的基体应力-应变曲线预报层合板强度,比基于反演的基体应力-应变数据预报的结果更好,因为文献[26]中也提供了可供反演 MY750 基体性能的单向复合材料面内剪切及横向压缩应力-应变参数.这说明了两点:第一,单纯基体材料的原始拉、压应力-应变试验数据,对准确预报层合板强度非常重要;第二,由单向复合材料的面内剪切及横向压缩应力-应变曲线反演基体的拉伸及压缩数据参数可能不太合适.本文的计算结果还表明,考虑热残余应力的效果目前不够好.可能和这么几个因素有关:首先,树脂基体的热分解温度一般都不高,其弹性模量及热膨胀系数会随温度而变,而文献[26]未提供这些数据;其次,根据现有数据计算的 3501 材料体系中的热残余应力甚至超过了基体的屈服极限,再施加机械外载,究竟是导致材料加载还是卸载,还有待进一步研究考虑;另外,本文的热应力补充方程(8c)是在 Benveniste 和 Dvorak 的工作基础上得到的<sup>[39]</sup>,他们根据热力学定律导出了单向复合材料中纤维和基体热应力与各自应力分配矩阵的显式关系,而更早,Levin 同样基于热力学定律导出了单向复合材料的热膨

胀系数<sup>[40]</sup>,进一步也可求出纤维和基体中的热应力.这两组热应力公式是否等价,似乎也还有待揭示.鉴于热残余应力分析的复杂性,在一般树脂基复合材料强度预报中可对此暂予忽略.

表3 4种基体材料拉/压应力应变数据

Table 3 Original tress ( $\sigma$ )-strain( $\varepsilon$ ) data of 4 matrix materials under tension and compression

3501-6				BSL914C				LY556				MY750			
tension		compression													
$\varepsilon / \%$	$\sigma / \text{MPa}$	$-\varepsilon / \%$	$-\sigma / \text{MPa}$	$\varepsilon / \%$	$\sigma / \text{MPa}$	$-\varepsilon / \%$	$-\sigma / \text{MPa}$	$\varepsilon / \%$	$\sigma / \text{MPa}$	$-\varepsilon / \%$	$-\sigma / \text{MPa}$	$\varepsilon / \%$	$\sigma / \text{MPa}$	$-\varepsilon / \%$	$-\sigma / \text{MPa}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.24	10	0.24	10	0.25	10	0.25	10	0.15	5	0.15	5	0.15	5	0.15	5
0.48	20	0.48	20	0.5	20	0.5	20	0.3	10	0.3	10	0.3	10	0.3	10
0.71	30	0.71	30	0.75	30	0.75	30	0.45	15	0.45	15	0.45	15	0.45	15
0.95	40	0.95	40	1	40	1	40	0.6	20	0.6	20	0.6	20	0.6	20
1.19	50	1.19	50	1.11	44.5	1.11	44.5	0.75	25	0.75	25	0.75	25	0.75	25
1.43	60	1.43	60	1.73	55.1	1.73	55.1	0.9	30	0.9	30	0.9	30	0.9	30
1.53	64.4	1.67	70	2.74	60.1	2.74	60.1	1.04	35	1.19	40	1.04	35	1.19	40
1.75	69.5	1.9	80	3.3	64.8	3.3	64.8	1.19	40	1.49	50	1.19	40	1.49	50
2	74.5	2.14	90	4.28	69.4	4.28	69.4	1.34	45	1.8	60	1.34	45	1.8	60
2.32	79.5	2.38	100	5	71.6	5	71.6	1.5	50	2.11	70	1.5	50	2.11	70
2.58	83.4	2.53	106.4	5.66	73	5.66	73	1.65	55	2.44	80	1.65	55	2.44	80
-	-	3.17	132.7	6.59	75	6.59	75	1.81	60	2.82	90	1.81	60	2.82	90
-	-	3.28	137.5	7.52	77	7.52	77	1.99	65	3.31	100	1.99	65	3.31	100
-	-	3.39	141.6	8.45	79	8.45	79	2.18	70	3.98	110	2.18	70	3.98	110
-	-	3.48	144.7	9.38	81	9.38	81	2.41	75	5	120	2.41	75	5	120
-	-	3.58	148	10.1	82.6	10.1	82.6	2.7	80	-	-	2.7	80	-	-

表4 不同理论预报得分

Table 4 Overall grades obtained with different approaches

grade	Zinoviev	bridging model (LT+no thermal)	bridging model (NLT+no thermal)	bridging model (NLT+thermal)
A	53	57	72	59
B	43	30	32	40
C	29	38	21	24
A+B	96	87	104	99
(A/total)/%	42.4	45.6	57.6	47.2
((A+B)/total)/%	76.8	69.6	83.2	79.2

\* LT=linear theory implying that the matrices are assumed as linearly elastic until rupture.

NLT=nonlinear theory implying that the matrices are assumed as elastic-plastic.

no thermal=no thermal residual stresses are taken into account.

thermal=thermal residual stresses are incorporated.

grade A: agreement between a predicted and a measured data is within 10% ;

grade B: agreement between a predicted and a measured data is outside 10% but within 50% ;

grade C: agreement between a predicted and a measured data is outside 50%.

## 6 结束语

根据纤维和基体的原始性能参数计算复合材料的强度,曾被一些业内人士认为是不可能

实现之举.这可能是因为过于关注了复合材料中纤维之间的局部差异如随机分布的微缺陷.然而,在均匀化基础上建立起来的桥联理论,研究对象是复合材料的等效力学性能,所求的内应力也是均匀化后的应力,可对一定量的微缺陷“视而不见”,引入纤维后对基体承载能力的影响也由均匀化应力定义的应力集中系数来体现.事实证明,桥联模型不仅理论严谨,公式简洁,而且强度预报结果合理,精度高.当然,复合材料毕竟由人工合成,其性能存在一定随机性,实验数据的离散性也比较大,美国有关部门就规定将实验数据折减 30% 后再作为设计依据.如此,完全可应用桥联理论进行初始设计,代替耗费巨大人力、物力所进行的材料选型与实验.还可引入修正系数来调整桥联理论预报值与复合材料随机测试性能之间的偏差,通过最少、最简单的实验数据确定修正系数.

另一方面,复合材料层合板结构的破坏分析与强度预报极其复杂,所涉及的挑战性问题众多,桥联理论本身及其工程应用还存在很多课题有待进一步研究完善.当纤维和基体为应变率相关材料,对应的复合材料也是.最近,文献[41-42]将应变率相关的纤维和基体性能引入桥联模型,分析计算了玻纤/环氧复合材料的非线性响应及强度.其它更多有待研究的课题包括如下一些:

**热应力分析** 即便常温固化的热固性复合材料,树脂基体固化时的放热也会导致成型温度(纤维和基体的 0 应力温度)异于工作温度.因此,几乎所有复合材料中都或多或少存在热残余应力.但如前所述,热应力计算目前还不够成熟,包括如何令人信服地确定纤维和基体的成型温度,目前忽略树脂基中热残余应力的影响不能不说是一种权宜之计.

**非理想界面** 早在 2007 年,Kumar 等就在桥联模型中尝试引入界面相的影响<sup>[43]</sup>,但他们的工作似乎还较为粗糙,三相桥联矩阵元素直接采用了理想界面两相桥联矩阵的表达式.基于平均应力推理想界面 Mori-Tanaka 桥联矩阵的思路<sup>[44]</sup>,我们导出了纤维、界面与基体共存的三相桥联矩阵<sup>②</sup>.非理想界面对基体应力集中系数影响的初步工作可参见文献[30-31].非理想界面研究中面临的最大挑战是如何定量描述非理想的界面特性.

**分层萌生** 分层是层合板结构最为常见的一种损伤形式,分层后的层合板刚度、结构完整性和极限承载能力都受影响.采用断裂力学方法研究分层扩展的历史悠久,文献也极为丰富<sup>[45]</sup>,但需预先假定存在一个裂纹(萌生了分层).实际中,确定分层何时开始萌生可能更有意义,但挑战性也更大.由于层与层之间本质上由基体粘接成一体,因此,分层必然是基体中的应力达到了临界值而萌生.就是说,只有通过细观力学分析才能最终解决分层萌生问题.桥联理论提供了解决这一问题的有效手段,但必须进一步求解基体与厚度方向载荷有关的应力集中系数,并发展分层萌生的表征技术.

**结构性缺陷层合板** 开孔层合板中,不仅基体存在“细观”意义上的应力集中,孔边也存在“宏观”意义上的应力集中.如何基于桥联理论,从已知的纤维和基体性能,分析预报开孔层合板的破坏与强度也是一个十分有趣的研究课题.

**有限元程序开发** 实际结构分析只有借助有限元软件才可以实现,桥联理论分析复合材料的破坏与强度所需实验数据最少,而且都是解析公式,将其与功能强大的有限元软件如 ABAQUS, ANSYS 等结合,必然会对复合材料结构更加有效的设计和更为广泛的应用带来深远影响.

<sup>②</sup> Wang Y C, Huang Z M. Bridging tensor with an imperfect interface, submitted to *European Journal of Mechanics-A/Solids*.

**组分材料性能数据库** 由于桥联理论仅仅只需输入纤维和基体的原始性能参数,系统建立纤维和基体的原始性能数据库就具有非常现实的意义.尽管复合材料的研发应用已具有很长历史,几乎所有应用部门都要进行复合材料的性能测试,积累有大量数据,但主要针对复合材料,纤维尤其基体的详细数据还很少.

**致谢** 研究生辛理敏完成了本文的计算.

### 附录 A 组分材料的平面柔度矩阵

假定纤维直到破坏都是线弹性的,其任何载荷瞬时柔度矩阵保持不变:

$$[S_{ij}^f] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{11}^f} & -\frac{\nu_{12}^f}{E_{11}^f} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}^f}{E_{11}^f} & \frac{1}{E_{22}^f} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}^f} \end{bmatrix}, \quad (A1)$$

式中,  $G_{12}^f$  为纤维的轴向剪切模量.

基体假定为弹塑性材料,由 Mises 等效应力  $\sigma_e^m$  表征其受载大小,任意载荷瞬时的柔度矩阵为

$$[S_{ij}^m] = \begin{cases} [S_{ij}^m]^e, & \sigma_e^m \leq \sigma_Y^m, \\ [S_{ij}^m]^e + [S_{ij}^m]^p, & \sigma_e^m > \sigma_Y^m, \end{cases} \quad (A2)$$

$$[S_{ij}^m]^e = \begin{bmatrix} \frac{1}{E^m} & -\frac{\nu^m}{E^m} & 0 \\ -\frac{\nu^m}{E^m} & \frac{1}{E^m} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G^m} \end{bmatrix}, \quad (A3)$$

$$[S_{ij}^m]^p = \frac{9}{4M_T^m(\sigma_e^m)^2} \begin{bmatrix} (\sigma'_{11})^m(\sigma'_{11})^m & (\sigma'_{22})^m(\sigma'_{11})^m & 2(\sigma'_{12})^m(\sigma'_{11})^m \\ (\sigma'_{22})^m(\sigma'_{11})^m & (\sigma'_{22})^m(\sigma'_{22})^m & 2(\sigma'_{12})^m(\sigma'_{22})^m \\ 2(\sigma'_{12})^m(\sigma'_{11})^m & 2(\sigma'_{12})^m(\sigma'_{22})^m & 4(\sigma'_{12})^m(\sigma'_{12})^m \end{bmatrix}, \quad (A4)$$

$$\sigma_e^m = \sqrt{(\sigma_{11}^m)^2 + (\sigma_{22}^m)^2 - (\sigma_{11}^m)(\sigma_{22}^m) + 3(\sigma_{12}^m)^2}, \quad (A5)$$

$$M_T^m = \frac{E^m E_T^m}{E^m - E_T^m}, \quad (A6)$$

$$(\sigma'_{11})^m = (2\sigma_{11}^m - \sigma_{22}^m)/3, (\sigma'_{22})^m = (2\sigma_{22}^m - \sigma_{11}^m)/3, (\sigma'_{12})^m = \sigma_{12}^m, \quad (A7)$$

式中,  $\sigma_Y^m$  为基体的屈服极限,  $E^m$  为基体的弹性模量(应力-应变曲线初始段的切线斜率),  $\nu^m$  为基体的 Poisson 比,  $E_T^m$  是基体的硬化模量(应力-应变曲线上与当前  $\sigma_e^m$  处对应点的切线斜率),是从基体的拉伸还是压缩实验应力-应变曲线来定义  $\sigma_Y^m, E^m$  及  $E_T^m$  则由式(16)确定.

### 附录 B 桥联矩阵显式表达式

$$[A_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}, \quad (B1)$$

$$[B_{ij}] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{bmatrix}, \quad (B2)$$

$$a_{11} = E_m/E_{11}^f, \quad (B3)$$

$$a_{22} = \beta + (1 - \beta) \frac{E_m}{E_{22}^f}, \quad 0 < \beta < 1 (\text{It is usually preferable to take } \beta = 0.35 \sim 0.45), \quad (B4)$$

$$a_{33} = \alpha + (1 - \alpha) \frac{G_m}{G_{12}^f}, \quad 0 < \alpha < 1 (\text{It is usually preferable to take } \alpha = 0.4 \sim 0.5), \quad (B5)$$

$$E_m = \begin{cases} E^m, & \sigma_e^m \leq \sigma_Y^m, \\ E_T^m, & \sigma_e^m > \sigma_Y^m, \end{cases} \quad (B6)$$

$$G_m = \begin{cases} 0.5E^m/(1 + \nu^m), & \sigma_e^m \leq \sigma_Y^m, \\ E_T^m/3, & \sigma_e^m > \sigma_Y^m, \end{cases} \quad (B7)$$

$$a_{12} = \frac{S_{12}^f - S_{12}^m}{S_{11}^f - S_{11}^m} (a_{11} - a_{22}), \quad (B8)$$

$$a_{13} = \frac{d_2\beta_{11} - d_1\beta_{21}}{\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}\beta_{21}}, \quad (B9)$$

$$a_{23} = \frac{d_1\beta_{22} - d_2\beta_{12}}{\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}\beta_{21}}, \quad (B10)$$

$$\begin{cases} d_1 = (a_{11} - a_{33})S_{13}^m, & d_2 = (V_f + V_m a_{11})(a_{22} - a_{33})S_{23}^m + (V_f + V_m a_{33})a_{12}S_{13}^m, \\ \beta_{11} = S_{12}^m - S_{12}^f, & \beta_{12} = S_{11}^m - S_{11}^f, & \beta_{22} = (V_f + V_m a_{22})(S_{12}^m - S_{12}^f), \\ \beta_{21} = V_m(S_{12}^f - S_{12}^m)a_{12} - (V_f + V_m a_{11})(S_{22}^f - S_{22}^m), \end{cases} \quad (B11)$$

$$b_{11} = (V_f + V_m a_{22})(V_f + V_m a_{33})/c, \quad (B12)$$

$$b_{12} = -(V_m a_{12})(V_f + V_m a_{33})/c, \quad (B13)$$

$$b_{13} = [(V_m a_{12})(V_m a_{23}) - (V_f + V_m a_{22})(V_m a_{13})]/c, \quad (B14)$$

$$b_{22} = (V_f + V_m a_{11})(V_f + V_m a_{33})/c, \quad (B15)$$

$$b_{23} = -(V_m a_{23})(V_f + V_m a_{11})/c, \quad (B16)$$

$$b_{33} = (V_f + V_m a_{22})(V_f + V_m a_{11})/c, \quad (B17)$$

$$c = (V_f + V_m a_{11})(V_f + V_m a_{22})(V_f + V_m a_{33}). \quad (B18)$$

## 参考文献 (References):

- [1] Hinton M J, Soden P D. Predicting failure in composite laminates; background to the exercise [J]. *Composites Science and Technology*, 1998, **58**(7): 1001-1010.
- [2] 黄争鸣. 复合材料细观力学引论[M]. 北京: 科学出版社, 2004. (HUANG Zheng-ming. *Introduction to Micromechanics for Composites*[M]. Beijing: Science Press, 2004. (in Chinese))
- [3] Kaddour A S, Hinton M J, Soden P D. A comparison of the predictive capabilities of current failure theories for composite laminates; additional contributions[J]. *Composites Science and Technology*, 2004, **64**(3/4): 449-476.
- [4] Ryan S, Wicklein M, Mouritz A, Riedel W, Schäfer F, Thoma K. Theoretical prediction of dynamic composite material properties for hypervelocity impact simulations[J]. *International Journal of Impact Engineering*, 2009, **36**(7): 899-912.
- [5] Shaw A, Sriramula S, Gosling P D, Chryssanthopoulos M K. A critical reliability evaluation of fibre reinforced composite materials based on probabilistic micro and macro-mechanical analysis[J]. *Composites Part B: Engineering*, 2001, **41**(6): 446-453.
- [6] Younes R, Hallal A, Fardoun F, Chehade F H. Comparative review study on elastic properties modeling for unidirectional composite materials[C]//Chapter 17. HU Ning ed. *Composites and Their Properties*, InTech. 2012: 391-408. (<http://dx.doi.org/10.5772/50362>)
- [7] Gotsis P K, Chamis C C, Minnetyan L. Prediction of composite laminate fracture; microme-

- chanics and progressive fracture [J]. *Composites Science and Technology*, 1998, **58**(7): 1137-1150.
- [8] Mayes S J, Hansen A C. Composite laminate failure analysis using multicontinuum theory[J]. *Composites Science and Technology*, 2004, **64**(3/4): 379-394.
- [9] HUANG Zheng-ming. A bridging model prediction of the ultimate strength of composite laminates subjected to biaxial loads[J]. *Composites Science and Technology*, 2004, **64**(3/4): 395-448.
- [10] HUANG Zheng-ming. Simulation of the mechanical properties of fibrous composites by the bridging micromechanics model[J]. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 2001, **32**(2): 143-172.
- [11] Benveniste Y. A new approach to the application of Mori-Tanaka's theory in composite materials[J]. *Mechanics of Materials*, 1987, **6**(2): 147-157.
- [12] HUANG Zheng-ming, ZHOU Ye-xin. *Strength of Fibrous Composites* [M]. Hangzhou, New York: Zhejiang University Press & Springer, 2011.
- [13] 张华山, 黄争鸣. 纤维增强复合材料弹塑性性能的细观研究[J]. 复合材料学报, 2008, **25**(5): 157-162. (ZHANG Hua-shan, HUANG Zheng-ming. Micromechanical approach to the elastoplastic behavior of a fiber reinforced composite[J]. *Acta Materiae Compositae Sinica*, 2008, **25**(5): 157-162. (in Chinese))
- [14] ZHOU Ye-xing, HUANG Zheng-ming. A modified ultimate failure criterion and material degradation scheme in bridging model prediction for biaxial strength of laminates[J]. *Journal of Composite Materials*, 2008, **42**(20): 2123-2141.
- [15] HUANG Zheng-ming, LIU Ling. Assessment of composite failure and ultimate strength without experiment on composite[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2014, **30**(4): 569-588.
- [16] Huang Z M. Simulation of inelastic response of multidirectional laminates based on stress failure criteria[J]. *Materials Science and Technology*, 2000, **16**(6): 692-698.
- [17] Huang Z M. Modeling strength of multidirectional laminates under thermo-mechanical loads [J]. *Journal of Composite Materials*, 2001, **35**(4): 281-315.
- [18] HUANG Zheng-ming. On a general constitutive description for the inelastic and failure behaviors of fibrous laminates—part II: laminate theory and applications[J]. *Computers & Structures*, 2002, **80**(13): 1177-1199.
- [19] Garnich M R, Akula V M K. Review on degradation models for progressive failure analysis of fiber reinforced polymer composites[J]. *Applied Mechanics Reviews*, 2009, **62**(1): 010801.1-010801.33.
- [20] Zinoviev P A, Grigoriev S V, Lebedeva O V, Tairova L P. The strength of multi-layered composites under a plane-stress state[J]. *Composites Science and Technology*, 1998, **58**(7): 1209-1223.
- [21] Ramakrishna S, Huang Z-M. Biocomposites [C]//Mai Y-W, Teoh S-H eds. *Comprehensive Structural Integrity*. Vol 9: Bioengineering. New York: Elsevier, 2003: 215-296.
- [22] Eshelby J D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems[J]. *Proc Royal Soc A*, 1957, **241**(1226): 367-396.
- [23] Cheng S, Chen D. On the stress distribution in laminae[J]. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 1988, **7**(2): 136-144.
- [24] HUANG Zheng-ming. Micromechanical strength formulae of unidirectional composites[J]. *Materials Letters*, 1999, **40**(4): 164-169.
- [25] HUANG Zheng-ming. Strength formulae of unidirectional composites including thermal residu-

- al stresses[J]. *Materials Letters*, 2000, **43**(1/2): 36-42.
- [26] Soden P D, Hinton M J, Kaddour A S. Lamina properties, lay-up configurations and loading conditions for a range of fibre-reinforced composite laminates[J]. *Composites Science and Technology*, 1998, **58**(7): 1011-1022.
- [27] Fiedler B, Hojo M, Ochiai S, Schulte K, Ando M. Failure behavior of an epoxy matrix under different kinds of static loading[J]. *Composites Science and Technology*, 2001, **61**(11): 1615-1624.
- [28] HUANG Zheng-ming, LIU Ling. Predicting strength of fibrous laminates under triaxial loads only upon independently measured constituent properties[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2014, **79**: 105-129.
- [29] LIU Ling, HUANG Zheng-ming. Stress concentration factor in matrix of a composite reinforced with transversely isotropic fibers[J]. *Journal of Composite Materials*, 2014, **48**(1): 81-98.
- [30] YAO Zhan, HUANG Zheng-ming. Stress concentration factor in the matrix reinforced with fiber having an interface layer[J]. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 2013, **32**(2): 105-123.
- [31] YAO Zhan, HUANG Zheng-ming. Stress concentration factors in the matrix with different imperfect interfaces[J]. *International Journal of Damage Mechanics*, 2013, **23**(6): 745-771.
- [32] Hine P J, Duckett R A, Kaddour A S, Hinton M J, Wells G M. The effect of hydrostatic pressure on the mechanical properties of glass fiber/epoxy unidirectional composites[J]. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 2005, **36**(2): 279-289.
- [33] Pinho S T, Iannucci L, Robinson P. Physically based failure models and criteria for laminated fiber-reinforced composites with emphasis on fiber kinking—part II: FE implementation[J]. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 2006, **37**(5): 766-777.
- [34] Aragonés D. Fracture micromechanisms in c/epoxy composites under transverse compression [D]. PhD Thesis. Madrid, Spain: Universidad Politécnica de Madrid, 2007.
- [35] Kaddour A S, Hinton M J, Smith P A, Li S. Mechanical properties and details of composite laminates for the test cases used in the third world-wide failure exercise[J]. *Journal of Composite Materials*, 2013, **47**(20/21): 2427-2442.
- [36] Kaddour A S, Hinton M J. Input data for test cases used in benchmarking triaxial failure theories of composites[J]. *Journal of Composite Materials*, 2012, **46**(19/20): 2295-2312.
- [37] Hinton M J, Kaddour A S, Soden P D. A comparison of the predictive capabilities of current failure theories for composite laminates, judged against experimental evidence[J]. *Composites Science and Technology*, 2002, **62**(12/13): 1725-1797.
- [38] Hinton M J, Kaddour A S, Soden P D. A further assessment of the predictive capabilities of current failure theories for composite laminates: comparison with experimental evidence[J]. *Composites Science and Technology*, 2004, **64**(3/4): 549-588.
- [39] Benveniste Y, Dvorak G J. On a correspondence between mechanical and thermal effects in two-phase composites[C]//Weng G J, Taya M, Abe H S eds. *The Toshio Muta Anniversary Volume; Micromechanics and Inhomogeneity*. New York, 1990: 65-81.
- [40] Levin V M. On the coefficients of thermal expansion of heterogeneous materials[J]. *Mekhanika Tverdovo Tela*, 1967(1): 88-94. (in Russian)
- [41] Shokrieh M M, Mosalmani R, Omidi M J. Strain-rate dependent micromechanical method to investigate the strength properties of glass/epoxy composites[J]. *Composite Structures*, 2014, **111**: 232-239.

- [42] Shokrieh M M, Mosalmani R, Omidi M J. A strain-rate dependent micromechanical constitutive model for glass/epoxy composites[J]. *Composite Structures*, 2015, **121**: 37-45.
- [43] Kumar P, Chandra R, Singh S P. Interphase effect on damping in fiber reinforced composites [J]. *ICCES*, 2007, **4**(2): 67-72.
- [44] WANG Yan-chao, HUANG Zheng-ming. A new approach to a bridging tensor[J/OL]. *Polymer Composites*, 2014. doi: 10.1002/pc.23048 (published online)
- [45] Tay T E. Characterization and analysis of delamination fracture in composites: an overview of developments from 1990 to 2001[J]. *Applied Mechanics Reviews*, 2003, **56**(1): 1-32.

## Latest Advancements of the Bridging Model Theory

HUANG Zheng-ming

(School of Aerospace Engineering & Applied Mechanics, Tongji University,  
Shanghai 200092, P.R.China)

(Contributed by HUANG Zheng-ming, M. AMM Editorial Board)

**Abstract:** In order to predict the strength of a composite only based on the mechanical properties of its constituent fiber and matrix materials measured independently, 3 challenging problems must be resolved with high success rate. First, internal stresses in the fiber and matrix must be accurately evaluated. Second, efficient failure detection of the composite in terms of the internal stresses, i.e., the micromechanical strength theory, must be achieved. Last but not the least, the input data of in-situ strengths of the matrix, which can hardly be measured through experiments, must be correctly determined according to its original counterparts available independently. Each of these problems is by no means easy to deal with. This is why the prediction of composite strength is extremely difficult. The bridging model, originally established by HUANG Zheng-ming and further developed to a powerful theory, presents a systematic approach towards solving all of the 3 problems. This paper briefly summarizes the theory by focusing on some of the latest advancements. A number of further research topics are also highlighted.

**Key words:** composite; strength prediction; internal stress evaluation; failure criterion; stress concentration factor; in-situ strength; bridging model

**Foundation item:** The National Natural Science Foundation of China(11272238; 11472192)