

# 加性二值噪声激励下 Duffing 系统的随机分岔\*

武娟<sup>1,2</sup>, 许勇<sup>1</sup>

(1. 西北工业大学 应用数学系, 西安 710072;  
2. 北方民族大学 数学与信息科学学院, 银川 750021)

(本刊编委邓子辰推荐)

**摘要:** 研究了 Duffing 系统在加性二值噪声作用下的随机分岔现象. 首先, 根据二值噪声的统计特性, 推导得到二值噪声状态间的跃迁概率, 据此对二值噪声进行了数值模拟. 其次, 利用四阶 Runge-Kutta (龙格-库塔) 数值算法得到该系统位移和速率的稳态联合概率密度及位移的稳态概率密度. 然后, 通过对位移稳态概率密度单双峰结构变化的研究, 发现加性二值噪声的状态和强度能够诱导系统产生随机分岔现象. 最后, 观察到随着系统非对称参数的逐渐变化, 系统同样产生了随机分岔现象.

**关键词:** 随机分岔; Duffing 系统; 加性二值噪声; 稳态概率密度

**中图分类号:** O322      **文献标志码:** A

**doi:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2015.06.003

## 引 言

近年来, 非线性动力学成为自然科学研究中的热点之一. 但在现实的动力学中通常会受到一些外界或内部随机因素的影响, 而随机因素所服从的统计分布又是其关键问题<sup>[1]</sup>. 在过往的研究中, 随机因素常常由 Gauss (高斯) 型噪声描述<sup>[2-4]</sup>, 但这类噪声只是一种简单理想化的随机噪声, 因此有必要对广泛存在的非 Gauss 噪声进行研究. 二值噪声是指等待时间服从指数分布的两态过程, 又称为随机电报噪声, 当状态趋于无穷且平均等待时间趋于 0 时, 可退化到 Gauss 白噪声. 该噪声分布更为复杂且更容易诱导动力系统产生非平衡现象, 在物理学、信号学及化学等领域有着广泛的应用<sup>[5-8]</sup>.

随机噪声与非线性力共同作用可以诱发丰富而复杂的动力学现象, 如随机共振、噪声诱导跃迁、噪声诱导相变等<sup>[9-11]</sup>. 尤其是随机分岔现象也是其中重要内容之一<sup>[12-16]</sup>. 随机分岔一般分为: D-分岔和 P-分岔, 即动态分岔和静态分岔. D-分岔是指非线性系统解的拓扑性质在参数取某一临界值时发生突变的现象, 可以通过参数变化时系统最大 Lyapunov 指数的变化情况而定. P-分岔是指由参数变化时系统稳态概率密度结构的变化情形, 比如单双峰之间的变化等<sup>[14]</sup>.

\* 收稿日期: 2014-12-30; 修订日期: 2015-03-18

基金项目: 国家自然科学基金(11372247; 11102157; 11362001)

作者简介: 武娟(1987—), 女, 陕西人, 硕士(通讯作者). E-mail: juanwuxixi@gmail.com.

Duffing 系统是一个经典的力学模型,许多学者对其动力学特性进行了研究,Xu 等对其在谐波激励下的随机分岔进行了研究<sup>[16]</sup>.Zhu 等对窄带激励下 Duffing 系统的随机跳和随机分岔进行了研究<sup>[17]</sup>.Xu 等对二值噪声下该系统的随机共振问题进行了研究<sup>[6]</sup>.Mallick 等对该系统中噪声引起的跃迁进行了研究<sup>[18]</sup>.Gan 对软弹簧 Duffing 系统中噪声引起的混沌和流域侵蚀进行了研究<sup>[19]</sup>.然而,对于二值噪声作用下系统随机分岔现象的相关研究还并不多见.本文则从数值角度出发,讨论了加性二值噪声状态、噪声强度和系统非对称参数对位移稳态概率密度单双峰结构的影响及随机分岔现象.

## 1 系统模型

考虑如下加性二值噪声激励下的 Duffing 系统:

$$\ddot{x} + \eta \dot{x} - x + x^3 + \gamma = \xi(t), \quad (1)$$

其中,  $0 < \eta < 1$  是阻尼系数,  $\gamma$  是系统非对称参数,  $\xi(t)$  是二值噪声,在  $a, b$  两个状态间跃迁,转移率分别是  $\mu_a, \mu_b$ , 平均等待时间分别是  $t_a, t_b$ , 这两者之间的关系是  $\mu_a = 1/t_a, \mu_b = 1/t_b$ , 其满足的主方程为

$$\partial_t P(a, t | x, t_0) = -\mu_a P(a, t | x, t_0) + \mu_b P(b, t | x, t_0), \quad (2)$$

$$\partial_t P(b, t | x, t_0) = \mu_a P(a, t | x, t_0) - \mu_b P(b, t | x, t_0). \quad (3)$$

上面方程满足条件  $P(a, t | x, t_0) + P(b, t | x, t_0) = 1$ , 及  $P(x', t | x, t_0) = \delta_{xx'}$  时可以得到主方程的解:

$$P(a, t | x, t_0) = \frac{\mu_b}{\mu_b + \mu_a} + \left( \frac{\mu_a}{\mu_b + \mu_a} \delta_{ax} - \frac{\mu_b}{\mu_b + \mu_a} \delta_{bx} \right) \exp(-(\mu_a + \mu_b)(t - t_0)), \quad (4)$$

$$P(b, t | x, t_0) = \frac{\mu_a}{\mu_b + \mu_a} - \left( \frac{\mu_a}{\mu_b + \mu_a} \delta_{ax} - \frac{\mu_b}{\mu_b + \mu_a} \delta_{bx} \right) \exp(-(\mu_a + \mu_b)(t - t_0)). \quad (5)$$

据此计算出二值噪声的稳态均值和稳态时间关联函数分别是

$$\langle \xi(t) \rangle_s = \frac{a\mu_b + b\mu_a}{\mu_a + \mu_b}, \quad (6)$$

$$\langle \xi(t)\xi(t') \rangle_s = \left( \frac{b\mu_a + a\mu_b}{\mu_b + \mu_a} \right)^2 + \frac{\mu_a\mu_b(a-b)^2}{(\mu_b + \mu_a)^2} \exp(-(\mu_a + \mu_b)(t - t')). \quad (7)$$

若要求式(6)和(7)满足

$$\langle \xi(t) \rangle_s = 0, \quad (8)$$

$$\langle \xi(t)\xi(t') \rangle_s = \frac{D}{\lambda} \exp\left(-\frac{|t - t'|}{\lambda}\right), \quad (9)$$

其中,  $D$  是噪声强度,  $\lambda$  是噪声关联时间, 则有

$$a\mu_b = -b\mu_a, \quad (10)$$

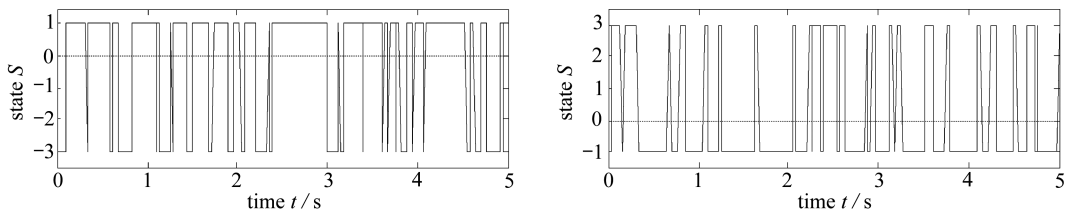
$$D = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\langle \xi(\tau)\xi(0) \rangle - \langle \xi(\tau) \rangle^2) d\tau = \frac{(a-b)^2 \mu_a \mu_b}{(\mu_a + \mu_b)^3}. \quad (11)$$

从而, 状态  $a$  或状态  $b$  跃迁到下一状态为  $a$  的概率  $P_{aa}, P_{ba}$  分别为

$$P_{aa} = P(a, t_{n+1} | a, t_n) = \frac{\mu_b}{\mu_b + \mu_a} + \frac{\mu_a}{\mu_b + \mu_a} \exp(-(\mu_a + \mu_b) \Delta t), \quad (12)$$

$$P_{ba} = P(a, t_{n+1} | b, t_n) = \frac{\mu_b}{\mu_b + \mu_a} - \frac{\mu_b}{\mu_b + \mu_a} \exp(-(\mu_a + \mu_b) \Delta t). \quad (13)$$

当二值噪声状态和强度确定时, 可以通过以上表达式及相应的模拟算法<sup>[20]</sup>, 得到二值噪声的数值序列  $\{x_i, i = 1, 2, \dots\}$ . 具体方法如下: 首先, 二值噪声的初始状态假定为  $x_0 = a$  或  $x_0 = b$ , 同时, 利用计算机生成一列在  $[0, 1]$  区间上均匀分布的随机数  $\{R_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ . 其次, 比较  $R_0$  是否小于  $P_{aa}$ , 或  $R_0$  是否小于  $P_{ba}$ . 如果  $R_0 < P_{aa}$  取  $x_1$  为  $a$ , 如果  $R_0 \geq P_{aa}$  取  $x_1$  为  $b$ . 接下来, 比较  $R_1$  是否小于  $P_{aa}$ , 或  $R_1$  是否小于  $P_{ba}$ . 如果  $R_1 < P_{aa}$  取  $x_2$  为  $a$ , 如果  $R_1 \geq P_{aa}$  取  $x_2$  为  $b$ . 依次做下去, 最终将得到一列二值噪声的数值序列. 选取不同的参数可得到二值噪声不同的剖面, 如图 1 所示.



(a) 噪声状态  $a = 1.0, b = -3.0$

(b) 噪声状态  $a = 3.0, b = -1.0$

(a) The noise state for  $a = 1.0, b = -3.0$

(b) The noise state for  $a = 3.0, b = -1.0$

图 1  $D = 0.1$  时不同噪声状态下二值噪声剖面图

Fig. 1 The sections of the dichotomous noise in different conditions of the noise states for  $D = 0.1$

## 2 随机分岔

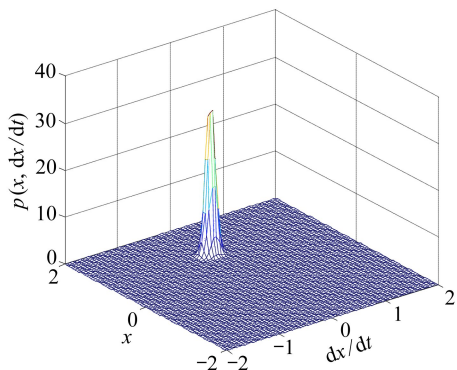
本节讨论加性二值噪声下 Duffing 系统的随机分岔现象. 首先, 利用四阶 Runge-Kutta 算法对系统进行数值模拟, 得到系统位移及速率的稳态联合概率密度. 其次, 在不同二值噪声参数条件下, 分别统计系统位移稳态概率密度中峰点的个数. 最后, 将峰点数相同的参数放到同一参数集合中, 并将不同的参数集绘制在参数平面上. 利用这一数值算法可得图 2, 其中展示了加性二值噪声强度  $D = 0.001$ , 欠阻尼系数  $\eta = 0.3$ , 系统非对称参数  $\gamma = 0.0$  时, 系统位移与速率的稳态联合概率密度在不同噪声状态下呈现出单峰和双峰结构的变化.

图 2(a) 中, 加性二值噪声状态为  $a = 0.6, b = -0.6$ , 从中可观察到, 该联合概率密度在稳定点  $(1, 0)$  邻域处出现单峰现象, 即系统位移和速率只停留于稳定点  $(1, 0)$  附近. 图 2(b) 展示了噪声状态增大到  $a = 1.0, b = -2.0$  的情形. 由图可见随着噪声状态的逐渐增加, 系统位移和速率的联合概率密度出现了双峰状态, 系统响应值从原先都集中在  $+1$  附近, 变化为小部分系统响应值位于稳定点  $-1$  附近. 图 2(c) 为噪声状态继续增大到  $a = 2.0, b = -2.0$  时, 呈现出明显的双峰状稳态联合概率密度. 此时系统位移均衡停留在  $+1$  和  $-1$  两个稳态点上.

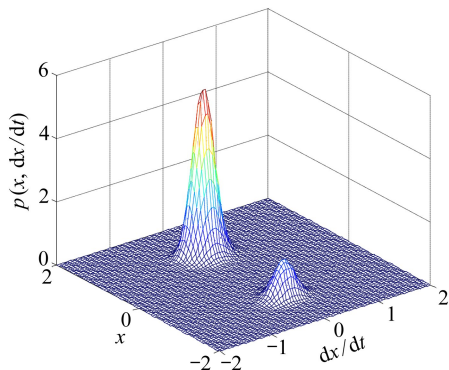
图 2(d) 则从整体上对比给出了图 2(a)、2(b)、2(c) 中系统联合概率密度关于系统位移的稳态概率密度. 从中可以明显地观察到加性二值噪声状态的逐渐变化对系统位移从单峰到双峰状态的影响.

图 3 为受加性二值噪声激励时, 系统在噪声状态参数平面  $(a, b)$  上的分岔图, 有色区域表示位移的稳态概率密度  $p(x)$  处于双峰状态时的参数区域, 无色区域为  $p(x)$  处于单峰状态时

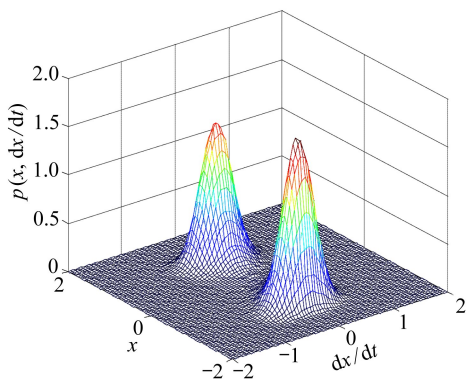
的参数区域,其中  $\eta = 0.3, \gamma = 0.0, D = 0.001, 0 < a < 2.5, -2.5 < b < 0$ ,可以看到,当参数从无色区域变化到有色区域时相应的概率密度函数从单峰变化为双峰状态。



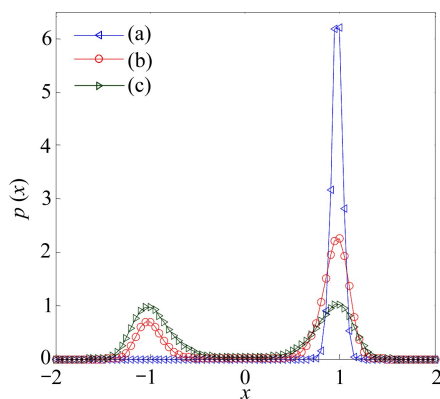
(a) 噪声状态  $a = 0.6, b = -0.6$   
(a) The noise state for  $a = 0.6, b = -0.6$



(b) 噪声状态  $a = 1.0, b = -2.0$   
(b) The noise state for  $a = 1.0, b = -2.0$



(c) 噪声状态  $a = 2.0, b = -2.0$   
(c) The noise state for  $a = 2.0, b = -2.0$



(d) (a), (b), (c) 中位移的稳态概率密度  
(d) The stationary probabilities densities of the displacement in (a), (b) and (c)

图 2 不同二值噪声状态下位移和速率的稳态联合概率密度及位移的稳态概率密度

Fig. 2 The stationary displacement-speed joint probability densities and the stationary displacement probability densities in different dichotomous noise states

图 4 给出了在不同加性二值噪声强度  $D$  下系统位移的稳态概率密度的变化情况,其中  $a = 0.5, b = -0.5$ ,其它参数保持不变.当  $D$  为 0.001 时,位移的稳态概率密度  $p(x)$  先在稳定点  $+1$  附近呈现单峰状态.当  $D$  逐渐增大到 0.01 时, $p(x)$  在稳定点  $-1$  附近隆起,出现高低两个峰,此时受到二值噪声状态增大的作用,系统运动变得激烈,在稳定点  $+1$  附近运动粒子穿过非平衡点到达另一稳定点  $-1$  附近运动.而当  $D$  继续增大到 0.1 时, $p(x)$  出现明显的双峰,运动粒子在两个稳定点间激烈地运动.在此过程中,位移稳态概率密度从单峰变化为双峰状态。

图 5 给出了不同系统非对称参数  $\gamma$  下位移的稳态概率密度的变化情况,其中  $D = 0.001, \eta = 0.3$ .在图 5(a)中,当非对称参数  $\gamma$  为 0.0 时,系统位移的  $p(x)$  呈现出双峰状态.随着  $\gamma$  从 0.0 增大到 0.1 时,粒子在稳定点  $-1$  附近的运动增加,而在稳定点  $+1$  附近的运动减少.当  $\gamma$  增大到 0.2 时, $p(x)$  在稳定点  $-1$  附近出现单峰,在  $+1$  附近的峰消失,粒子只在  $-1$  附近运动.在图 5

(b) 中,当噪声状态降低到  $a = 0.4, b = -0.4$  且非对称参数  $\gamma$  为 0.0 时,  $p(x)$  呈现的单峰处于稳定点 +1 附近,粒子只集中在 +1 附近运动.随着  $\gamma$  逐渐增大到 0.1,  $p(x)$  变化为明显的双峰,粒子在 +1 和 -1 间来回运动.当  $\gamma$  逐渐增大到 0.2 时,  $p(x)$  只在 -1 附近呈现单峰,粒子只停留在 -1 附近运动.总之,在图 5(a) 中随着  $\gamma$  的增大,位移的  $p(x)$  从双峰变为单峰状态;在图 5(b) 中,  $p(x)$  从单峰变化到双峰状态,再变化到单峰状态.

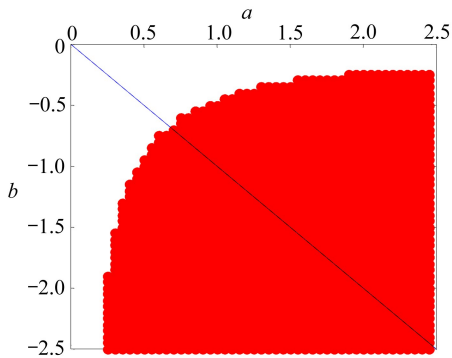


图 3 系统在加性二值噪声平面  $(a, b)$  上的分岔图

Fig. 3 The bifurcation diagram in the parameter plane  $(a, b)$  of the additive dichotomous noise

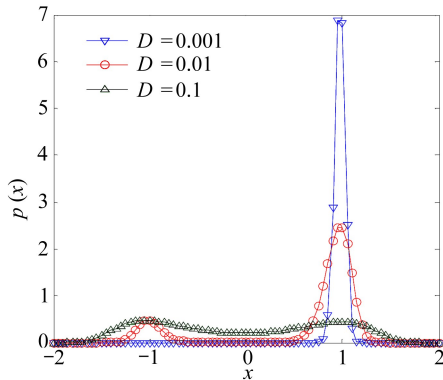
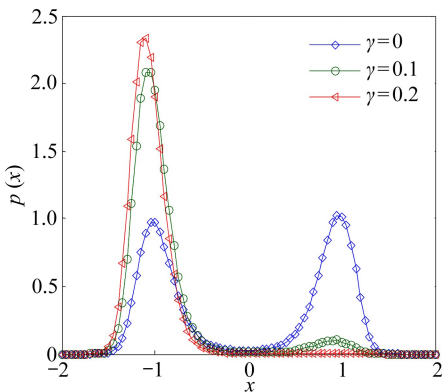


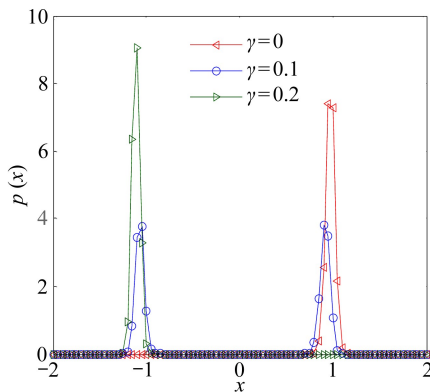
图 4 不同加性噪声强度下位移的稳态概率密度

Fig. 4 The stationary probability densities of the displacement with different noise intensities



(a) 噪声状态  $a = 2.0, b = -2.0$

(a) The noise state for  $a = 2.0, b = -2.0$



(b) 噪声状态  $a = 0.4, b = -0.4$

(b) The noise state for  $a = 0.4, b = -0.4$

图 5 不同系统非对称参数下位移的稳态概率密度

Fig. 5 The stationary probability densities of the displacement with different system asymmetric parameters

### 3 结 论

本文研究了 Duffing 系统在加性二值噪声激励下的随机分岔现象.通过系统位移及速率的稳态概率密度结构的变化,讨论了二值噪声状态、噪声强度及系统非对称参数对随机分岔的影响.结果表明:在一定参数下,加性二值噪声状态和强度的增加能够诱导系统位移的稳态概率密度从单峰变化为双峰状态,系统都产生了一次随机分岔现象;同时在加性二值噪声两种状态下,系统非对称参数的增加能够引起位移的稳态概率密度从双峰变化为单峰状态,系统产生了一次随机分岔现象,以及从单峰变化到双峰再变化到单峰状态中,产生了两次随机分岔现象.

致谢 作者衷心感谢北方民族大学科研基金(2014XYZ11;2014XYZ05)以及北方民族大学数学与信息科学学院科研基金(13XYK03)对本文的资助。

### 参考文献(References):

- [1] 胡岗. 随机力与非线性系统[M]. 上海: 上海科技教育出版社, 1994. (HU Gang. *Advanced Series in Nonlinear Science Stochastic Forces and Nonlinear Systems*[M]. Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House, 1994. (in Chinese))
- [2] 朱位秋. 几类非线性系统对白噪声参激与/或外激平稳响应的精确解[J]. 应用数学和力学, 1990, **11**(2): 155-164. (ZHU Wei-qiu. Exact solutions for stationary responses of several classes of nonlinear systems to parametric and/or external white noise excitations[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1990, **11**(2): 155-164. (in Chinese))
- [3] WU Zhao-hua, Huang N E. A study of the characteristics of white noise using the empirical mode decomposition method[J]. *Proceedings of The Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2004, **460**(2046): 1597-1611.
- [4] Vitrenko A N. Exactly solvable nonlinear model with two multiplicative Gaussian colored noises[J]. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 2006, **359**: 65-74.
- [5] Gardiner C W. *Handbook of Stochastic Methods: for Physics, Chemistry and the Nature Science*[M]. Heidelberg, Berlin, Germany: Sprillger-Verlag, 1983: 78.
- [6] XU Yong, WU Juan, ZHANG Hui-qing, MA Shao-juan. Stochastic resonance phenomenon in an underdamped bistable system driven by weak asymmetric dichotomous noise[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2012, **70**(1): 531-539.
- [7] LI Jing-hui, HAN Yin-xia. Phenomenon of stochastic resonance caused by multiplicative asymmetric dichotomous noise[J]. *Physical Review E*, 2006, **74**(5): 051115.
- [8] XU Yong, JIN Xiao-qin, ZHANG Hui-qing, YANG Ting-ting. The availability of logical operation induced by dichotomous noise for a nonlinear bistable system[J]. *Journal of Statistical Physics*, 2013, **152**(4): 753-768.
- [9] JIN Yan-fei. Noise-induced dynamics in a delayed bistable system with correlated noises[J]. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 2012, **391**(5): 1928-1933.
- [10] XU Yong, JIN Xiao-qin, ZHANG Hui-qing. Parallel logic gates in synthetic gene networks induced by non-Gaussian noise[J]. *Physical Review E*, 2013, **88**(5): 052721.
- [11] Van den Broeck C, Parrondo J M R, Toral R. Noise-induced nonequilibrium phase transition [J]. *Physical Review Letters*, 1994, **73**(25): 3395-3398.
- [12] Zakharova A, Vadivasova T, Anishchenko V, Koseska A, Kurths J. Stochastic bifurcations and coherencelike resonance in a self-sustained bistable noisy oscillator[J]. *Physical Review E*, 2010, **81**(1): 011106.
- [13] XU Yong, FENG Jing, LI Juan-juan, ZHANG Hui-qing. Stochastic bifurcation for a tumor-immune system with symmetric Lévy noise[J]. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 2013, **392**(20): 4739-4748.
- [14] 顾仁财, 许勇, 郝孟丽, 杨志强. Lévy 稳定噪声激励下的 Duffing-Van der Pol 振子的随机分岔 [J]. 物理学报, 2011, **60**(6): 060513. (GU Ren-cai, XU Yong, HAO Meng-li, YANG Zhi-qiang. Stochastic bifurcations in Duffing-Van der Pol oscillator with Lévy stable noise[J]. *Acta Physica Sinica*, 2011, **60**(6): 060513. (in Chinese))
- [15] XU Yong, GU Ren-cai, ZHANG Hui-qing, XU Wei, DUAN Jin-qiao. Stochastic bifurcations in

- a bistable Duffing-Van der Pol oscillator with colored noise[J]. *Physical Review E*, 2011, **83**(5): 056215.
- [16] XU Wei, HE Qun, FANG Tong, RONG Hai-wu. Stochastic bifurcation in Duffing system subject to harmonic excitation and in presence of random noise[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2004, **39**(9): 1473-1479.
- [17] ZHU Wei-qiu, Lu M Q, Wu Q T. Stochastic jump and bifurcation of a Duffing oscillator under narrow-band excitation[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1993, **165**(2): 285-304.
- [18] Mallick K, Marcq P. Noise-induced reentrant transition of the stochastic Duffing oscillator[J]. *The European Physical Journal B*, 2004, **38**(1): 99-102.
- [19] GAN Chun-biao. Noise-induced chaos and basin erosion in softening Duffing oscillator[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2005, **25**(5): 1069-1081.
- [20] Barik D, Ghosh P K, Ray D S. Langevin dynamics with dichotomous noise; direct simulation and applications[J]. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2006, **2006**: 03010.

## Stochastic Bifurcations in a Duffing System Driven by Additive Dichotomous Noises

WU Juan<sup>1,2</sup>, XU Yong<sup>1</sup>

(1. Department of Applied Mathematics, Northwestern  
Polytechnical University, Xi'an 710072, P.R.China;

2. School of Mathematics & Information Science, Beifang University  
for Nationalities, Yinchuan 750021, P.R.China)

(Recommended by DEN Zi-chen, M. AMM Editorial Board)

**Abstract:** The stochastic bifurcations in a Duffing system driven by additive dichotomous noises were investigated. Firstly, the transition probability of the dichotomous noise states was deduced according to its statistical properties and then the dichotomous noise was simulated numerically. Secondly, the stationary joint probability density of the system displacement and speed and the stationary probability density of the displacement were calculated with the 4th-order Runge-Kutta algorithm. Then, through the study of the variation between unimodality and bimodality of the stationary probability density of the system displacement, it is found that specific states and certain intensity values of the additive dichotomous noise may induce stochastic bifurcations. Lastly, it is also observed that stochastic bifurcations may occur with the variations of the system asymmetric parameters.

**Key words:** stochastic bifurcation; Duffing system; additive dichotomous noise; stationary probability density

**Foundation item:** The National Natural Science Foundation of China (11372247; 11102157; 11362001)