

# 一类大气尘埃等离子体扩散模型研究\*

冯依虎<sup>1</sup>, 石兰芳<sup>2</sup>, 许永红<sup>3</sup>, 莫嘉琪<sup>4</sup>

- (1. 亳州师范高等专科学校 电子与信息工程系, 安徽 亳州 236800;
2. 南京信息工程大学 数学与统计学院, 南京 210044;
3. 蚌埠学院 数理系, 安徽 蚌埠 233030;
4. 安徽师范大学 数学系, 安徽 芜湖 241003)

**摘要:** 研究了一类大气非线性尘埃等离子体扩散方程初值问题. 首先在无扰动情形下, 利用 Fourier 变换方法得到了尘埃等离子体扩散方程初值问题的精确解, 接着引入一个同伦映射, 并选取初始近似函数, 再用同伦映射理论, 依次求出非线性尘埃等离子体扰动初值问题的各次近似解析解. 引用不动点理论, 指出了近似解析解的有效性和各次近似解的近似度, 用模拟曲线和表格给出近似对照例子. 最后, 简述了用同伦映射方法得到的近似解的物理意义. 指出了用上述方法得到的各次近似解具有便于求解、精度高等优点.

**关键词:** 大气; 扩散方程; 等离子体; 同伦映射

**中图分类号:** O175.29      **文献标志码:** A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2015.06.008

## 引 言

近年来, 沙尘暴、雾霾等大气尘埃等离子体扩散的反常气候对人们的生产和生活都造成了很大程度的影响. 因此, 这种极端气候及区域性空气污染问题越来越受到各界学者的重视. 为了控制尘埃颗粒物污染、改善环境空气质量, 需要掌握大气尘埃颗粒物的分布. 人们在气象和尘埃污染数据监测、统计分析预报的基础上开展了更精细化的气象现象计算, 以采取适当措施, 更加有助于准确地预报天气和控制空气质量、减少相应的灾害和环境污染, 促进大气环境的正常发展.

许多学者进行了关于尘埃等离子体中性与非线性波的研究<sup>[1-2]</sup>, 包括尘埃包络孤立波, 尘埃孤立波的调制不稳定性, 尘埃颗粒大小及尘埃荷电量对尘埃等离子体中各种线性与非线性波的影响, 弱二维尘埃等离子体中尘埃声波在受到高阶横向扰动时是否稳定等问题. 得知在横向方向非线性波受到高阶扰动, 这种有限小振幅的非线性波可以由 KP 方程来描述, 并对一维 KdV 方程描述的孤立子的碰撞问题也进行了探讨. 因此一些学者对二维 Bose-Einstein 凝聚系统、等离子体系统及非线性晶格系统以任意夹角传播的孤立子的碰撞问题也做了很多研

\* 收稿日期: 2014-12-22; 修订日期: 2014-12-31

**基金项目:** 国家自然科学基金(11202106); 安徽高校省级自然科学基金项目(KJ2014A151; KJ2013B153); 江苏省自然科学基金(13KJB170016)

**作者简介:** 冯依虎(1982—), 男, 安徽潜山人, 讲师, 硕士(E-mail: fengyihubzsz@163.com); 莫嘉琪(1937—), 男, 浙江德清人, 教授(通讯作者, E-mail: mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn).

究<sup>[3-4]</sup>,并研究了大气尘埃等离子体的低频振动,尘埃振动波的调制稳定性,尘埃颗粒大小及尘埃荷电量对其等离子体非线性波的作用等问题<sup>[5]</sup>.

关于非线性问题的求解,很多近似方法被改进<sup>[6-8]</sup>.莫嘉琪等使用多种渐近方法讨论了一类非线性方程大气物理、等离子体、孤波等问题<sup>[9-17]</sup>.本文进一步利用同伦映射解析的方法来讨论一类二维大气尘埃等离子体广义非线性扰动 KP 方程的初值问题,并得到了大气尘埃等离子体非线性 Einstein 凝聚系统的近似解析解,弥补了单纯用数值模拟方法得到的数值解的不足.

## 1 大气等离子体 KP 方程

对于(2+1)维低频尘埃波动,冷尘埃等离子体满足的无量纲流体力学方程组为

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_d}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(n_d u_x) + \frac{\partial}{\partial y}(n_d u_y) &= f(t, x, y, n_d), \\ \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} &= Z_d \frac{\partial \phi}{\partial x} + g_1(t, x, y, u_x), \\ \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} &= Z_d \frac{\partial \phi}{\partial y} + g_2(t, x, y, u_y), \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} &= Z_d n_d + n_e - n_{il} - n_{ih} + h(t, x, y, \phi), \end{aligned}$$

$$n_e = A_{e0} \exp(\beta_1 s \phi), \quad n_{il} = A_{il0} \exp(-s \phi), \quad n_{ih} = A_{ih0} \exp(-\beta s \phi),$$

其中,  $u_x, u_y$  分别为尘埃流体在  $x$  与  $y$  向的速度分量,  $n_d$  为尘埃颗粒的密度,  $\phi$  为位势函数,  $Q_d = eZ_d$  为尘埃颗粒上的荷电量, 且

$$A_{e0} = n_{i0} / (Z_{d0} n_{d0}), \quad A_{ih0} = n_{ih0} / (Z_{d0} n_{d0}),$$

$$\beta_1 = T_{il} / T_e, \quad \beta_2 = T_{ih} / T_e, \quad \beta = \beta_1 / \beta_2, \quad s = \frac{Z_{d0} n_{d0} T_e T_{ih}}{n_{e0} T_{ih} T_{il} + n_{i0} T_e T_{ih} + n_{ih0} T_e T_{il}},$$

而  $T_e, T_{il}, T_{ih}$  分别为电子、低温离子体与高温离子体的温度,  $f, g_1, g_2$  和  $h$  分别为其它相关物理量对系统作用的扰动项, 包括连续性方程的源项、动量方程除静电力作用外的其它作用力、中性种类影响、尘埃电荷变化、其它离子体比例、温度等因素引起的扰动. 设它们为对应的有界区域内充分光滑的函数.

首先, 在假设电子和离子的流动速度小于它们的热运动速度下, 利用小参数理论和方法, 并作一些变量变换, 可归纳为如下广义扰动 KP 方程(推导过程参见文献[5]):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial u}{\partial t} - au \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right] + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = G(x, y, t, u), \quad (1)$$

其中,  $u$  为势函数,  $a, b, c$  为非负常数,  $G$  为尘埃等离子体系统来自外界其它因素作用有关的光滑函数. 这些参数和函数的表示式在此从略.

显然, 由式(1)决定势函数  $u$  后, 可决定冷尘埃等离子体的其它物理量.

首先考虑广义扰动 KP 方程(1)对应的非扰动情形下的方程满足如下初值问题:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial v}{\partial t} + b \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \right] + c \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0, \quad (2)$$

$$v|_{t=0} = \tilde{h}(x, y), \quad (3)$$

其中  $\tilde{h}$  为系统初始状态的充分光滑的函数.

设函数  $\bar{f}(x, y)$  关于  $x, y$  的 Fourier 变换  $F[\bar{f}]$  为

$$F[\bar{f}] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\bar{f}(x, y) \exp(-i(x\lambda_1 + y\lambda_2))] dx dy.$$

将方程(2), (3)的等号两边施行 Fourier 变换, 并利用 Fourier 变换的性质, 可得

$$\frac{dF[v]}{dt} + i \frac{b\lambda_1^4 - c\lambda_2^2}{\lambda_1} F[v] = 0, \tag{4}$$

$$F[v] |_{t=0} = F[\tilde{h}]. \tag{5}$$

不难得到初值问题(4), (5)的解为

$$F[v] = F[\tilde{h}] \exp\left(-i \frac{b\lambda_1^4 - c\lambda_2^2}{\lambda_1} t\right). \tag{6}$$

再对式(6)作 Fourier 逆变换, 便得到尘埃等离子体初值问题(2), (3)的解  $v(x, y, t)$ :

$$v(x, y, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(\xi, \eta) g_0(x - \xi, y - \eta, t) d\xi d\eta, \tag{7}$$

其中

$$g_0(x, y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(i\left(\frac{-b\lambda_1 + c\lambda_2}{\lambda_1} t\right) + \lambda_1 x + \lambda_2 y\right) d\lambda_1 d\lambda_2. \tag{8}$$

选取无量纲参数  $b = 1, c = 0.1, \tilde{h}(x) = \exp(x + y)$ , 由式(7), (8), 不难得到尘埃等离子体低频振动 KP 方程初值问题(2), (3)的行波形式解  $v(z)$  在  $O-vz(z = x + y - t)$  平面上的模拟曲线, 参见图 1 所示.

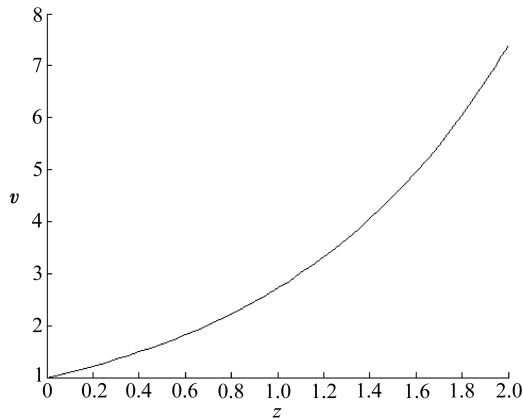


图 1 初值问题(2), (3)的解  $v(z)(z = x + y - t)$

Fig. 1 Solution  $v(z)(z = x + y - t)$  to initial value problems(2), (3)

由图 1 中  $v$  曲线可看出, 尘埃等离子体低频振动物理现象在初值为指数函数增大情况下,  $z = x + y - t$  越大, 则尘埃等离子体势函数  $v(z)$  就越大, 这符合实际测试情况<sup>[5]</sup>.

## 2 尘埃扰动问题的近似解析解

对于具有横向的非线性波扰动小振幅的非线性波, 并针对由两种温度的尘埃等离子体, 在以任意夹角传播的离子体间的相互作用下, 假设电子和离子的流动速度小于它们的热运动速度时, 则可归化为广义非线性扰动 KP 方程(1)和条件

$$u |_{t=0} = \tilde{h}(x, y) \tag{9}$$

的初值问题.

引入泛函映射:

$$H[u, p] = L[u] - L[v] + p \left[ L[v] + au \frac{\partial u}{\partial x} - G(x, y, t, u) \right], \quad (10)$$

其中  $p \in [0, 1]$  为人工参数<sup>[6]</sup>,  $v$  为方程(1) 的初始近似函数, 线性算子  $L[u]$  为

$$L[u] = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + b \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right] + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

显然, 由泛函映射(10)知,  $H(u, 1) = 0$  就是尘埃等离子体低频振动具有扰动的广义非线性 KP 方程(1), 因此只需选择相同的初始条件(9), 方程(1)初值问题的解就是  $H(u, p) = 0$  的解取  $p \rightarrow 1$  的情形.

设

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} u_i p^i. \quad (11)$$

将式(11)代入泛函同伦映射(10), 合并  $p^i$  的同次幂项, 并令各次幂的系数为0.由  $p^0$  的系数为0, 得

$$L[u_0] = L[v]. \quad (12)$$

选取初始近似函数  $v$  为初值问题(2), (3) 的解(7). 于是, 由式(12), 得

$$u_0(x, y, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(\xi, \eta) g_0(x - \xi, y - \eta, t) d\xi d\eta, \quad (13)$$

其中  $g_0(x, y, t)$  由式(8)表示.

将式(11)代入泛函同伦映射(10), 合并  $p^i$  的同次幂项. 由  $p^1$  的系数为0, 得

$$L[u_1] = -au_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + G(x, y, t, u_0). \quad (14)$$

利用 Fourier 变换, 不难得到方程(14) 在零初始值下的解为

$$u_1(x, y, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F \left[ -au_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + G(x, y, t, u_0(t, x, y)) \right] d\lambda_1 d\lambda_2 d\tau, \quad (15)$$

其中

$$F \left[ -au_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + G(x, y, t, u_0) \right]$$

为  $-au_0 \partial u_0 / \partial x + G(x, y, t, u_0)$  的 Fourier 变换, 而  $u_0$  由式(13)表示.

由式(11), (13), (15), 并在式(11)中取  $p = 1$  可得广义非线性 KP 方程初值问题(1), (9) 的一次近似解析解  $U_1(x, y, t)$ :

$$U_1(x, y, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(\xi, \eta) g_0(x - \xi, y - \eta, t) d\xi d\eta + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F \left[ -au_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + G(x, y, t, u_0) \right] \exp \left( i \frac{b\lambda_1^4 - c\lambda_2^2}{\lambda_1} (\tau - t) \right) d\lambda_1 d\lambda_2 d\tau \right]. \quad (16)$$

式(16)中  $u_0$  分别由式(13)表示,  $g_0(x, y, t)$  由式(8)表示.

将式(11)代入同伦映射(10), 合并  $p^i$  的同次幂项. 由  $p^2$  的系数为0, 得

$$L[u_2] = -a \left( u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + G_u(x, y, t, u_0) u_1. \tag{17}$$

同样, 不难得到线性非齐次方程(17)在零初始值下的解为

$$u_2(x, y, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F \left[ -a \left( u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + G_u(x, y, t, u_0) u_1 \right] \exp \left( i \frac{b\lambda_1^4 - c\lambda_2^2}{\lambda_1} (\tau - t) \right) d\lambda_1 d\lambda_2 d\tau, \tag{18}$$

其中  $u_0, u_1$  分别由式(13), (15)表示.

再由式(11), (13), (15), (18), 并在式(11)中取  $p = 1$ , 可进一步得广义非线性 KP 方程初值问题(1), (9)的二次近似解析解  $U_2(x, y, t)$ :

$$U_2(x, y, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(\xi, \eta) g_0(x - \xi, y - \eta, t) d\xi d\eta + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F \left[ -a \left( u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + G(x, y, t, u_0) + G_u(x, y, t, u_0) u_1 \right] \exp \left( i \frac{b\lambda_1^4 - c\lambda_2^2}{\lambda_1} (\tau - t) \right) d\lambda_1 d\lambda_2 d\tau \right], \tag{19}$$

式(19)中  $u_0, u_1$  分别由式(13), (15)表示,  $g_0(x, y, t)$  由式(8)表示.

继续将式(11)代入泛函映射式(10), 合并  $p^i$  的同次幂项. 由  $p^n (n = 3, 4, \dots)$  的系数为 0, 可得

$$L[u_n] = \tilde{F}_n, \quad n = 3, 4, \dots, \tag{20}$$

其中

$$\tilde{F}_n = \frac{1}{(n-1)!} \left[ \frac{\partial^{n-1}}{\partial p^{n-1}} \left( -a \left( \sum_{i=0}^{\infty} u_i p^i \right) \frac{\partial}{\partial x} \left( \sum_{i=0}^{\infty} u_i p^i \right) + G \left( x, y, t, \sum_{i=0}^{\infty} u_i p^i \right) \right) \right]_{p=0}$$

为逐次已知的函数.

方程(20)在零初值下的解为

$$u_n(x, y, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F[\tilde{F}_n] \exp \left( i \frac{b\lambda_1^4 - c\lambda_2^2}{\lambda_1} (\tau - t) \right) d\lambda_1 d\lambda_2 d\tau, \tag{21}$$

$n = 3, 4, \dots,$

其中  $F[\tilde{F}]$  为  $\tilde{F}$  的 Fourier 变换,  $u_{n-1}$  为逐次已知的函数.

因此可以得到广义非线性 KP 方程初值问题式(1), (9)的第  $n$  次近似解析解  $U_n(x, y, t)$ :

$$U_n(x, y, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(\xi, \eta) g_0(x - \xi, y - \eta, t) d\xi d\eta + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F \left[ -a \left( u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + G(x, y, t, u_0) + G_u(x, y, t, u_0) u_1 + \sum_{j=3}^n [\tilde{F}_j] \right] \exp \left( i \frac{b\lambda_1^4 - c\lambda_2^2}{\lambda_1} (\tau - t) \right) d\lambda_1 d\lambda_2 d\tau \right], \tag{22}$$

式(22)中,  $u_{n-1}$  为逐次已知的函数.

将式(13), (15), (18), (21)代入式(11), 并取  $p = 1$ , 便得到

$$U(x, y, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(\xi, \eta) g_0(x - \xi, y - \eta, t) d\xi d\eta + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F \left[ -a \left( u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + G(x, y, t, u_0) + G_u(x, y, t, u_0) u_1 + \sum_{j=3}^{\infty} [\tilde{F}_j] \right] \exp \left( i \frac{b\lambda_1^4 - c\lambda_2^2}{\lambda_1} (\tau - t) \right) d\lambda_1 d\lambda_2 d\tau \right]. \quad (23)$$

能够用泛函分析不动点原理和逼近理论证明<sup>[7]</sup>: 由式(23)表示的  $U(x, y, t)$  是一致收敛的, 并为二维低频尘埃波动扰动方程(1)在初始条件(9)下的精确解. 因而, 由式(22)表示的函数  $U_n(x, y, t)$  就是尘埃扰动方程(1)在初始条件(9)下的第  $n$  次近似解析解.

### 3 近似解的精度

为了描述用泛函分析同伦映射方法得到的近似解的精度, 简单地取尘埃等离子体中的低频振动广义非线性 KP 方程(1)和初始条件(9)的有关无量纲参数和函数值:  $a = \varepsilon, b = 1, c = 1, g = \varepsilon \sin u, h = \exp(x + y)$ , 这时尘埃等离子体中的低频振动广义非线性 KP 方程(1)和初始条件(9)为如下初值问题.

**例 1** 尘埃等离子体中的低频振动广义非线性 KP 方程和初始条件为

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right] + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \varepsilon \sin u, \quad (24)$$

$$u|_{t=0} = \exp(x + y). \quad (25)$$

利用同伦映射方法, 求初值问题(24), (25)的近似解. 对应于式(24)的退化方程初值近似问题为

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \right] + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0, \quad (26)$$

$$v|_{t=0} = \exp(x + y). \quad (27)$$

不难得到初值问题(26), (27)的解为

$$v(x, y, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\xi + \eta) g_0(x - \xi, y - \eta, t) d\xi d\eta, \quad (28)$$

其中  $g_0$  由式(8)表示.

选取由式(28)表示的函数  $v(x, y, t)$  为用同伦映射方法求解初值问题(24), (25)的零次近似函数  $u_0(x, y, t) \equiv U_{0\text{app}}(x, y, t)$ . 即

$$u_0(x, y, t) \equiv U_{0\text{app}}(x, y, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\xi + \eta) g_0(x - \xi, y - \eta, t) d\xi d\eta. \quad (29)$$

利用同伦映射(10), 依次可得  $u_1(x, y, t), u_2(x, y, t)$ :

$$u_1(x, y, t) = -\frac{\varepsilon}{(2\pi)^2} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F \left[ -\exp 2(x + y - t) + \sin \exp(x + y - t) \right] \times \exp \left( i \frac{b\lambda_1^4 - c\lambda_2^2}{\lambda_1} (\tau - t) \right) d\lambda_1 d\lambda_2 d\tau, \quad (30)$$

$$u_2(x, y, t) =$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{\varepsilon}{(2\pi)^2} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F \left[ - \exp(x + y - \tau) \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_1 \right) + u_1 \cos \exp(x + y - \tau) \right] \times \\
 & \exp \left( i \frac{b\lambda_1^4 - c\lambda_2^2}{\lambda_1} (\tau - t) \right) d\lambda_1 d\lambda_2 d\tau. \tag{31}
 \end{aligned}$$

于是由式(29)~(31), 可得对应于广义非线性 KP 方程初值问题(24), (25)的一次、二次近似解析解  $U_{1\text{app}}(x, t), U_{2\text{app}}(x, t)$  为

$$\begin{aligned}
 U_{1\text{app}}(x, y, t) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\xi + \eta) g_0(x - \xi, y - \eta, t) d\xi d\eta \times \\
 & \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left( i \frac{b\lambda_1^4 - c\lambda_2^2}{\lambda_1} (\tau - t) \right) d\lambda_1 d\lambda_2 d\tau - \\
 & \frac{\varepsilon}{(2\pi)^2} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F \left[ - \exp 2(x + y - t) + \sin \exp(x + y - t) \right] \times \\
 & \exp \left( i \frac{b\lambda_1^4 - c\lambda_2^2}{\lambda_1} (\tau - t) \right) d\lambda_1 d\lambda_2 d\tau, \tag{32}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U_{2\text{app}}(x, y, t) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\xi + \eta) g_0(x - \xi, y - \eta, t) d\xi d\eta \times \\
 & \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left( i \frac{b\lambda_1^4 - c\lambda_2^2}{\lambda_1} (\tau - t) \right) d\lambda_1 d\lambda_2 d\tau - \\
 & \frac{\varepsilon}{(2\pi)^2} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F \left[ - \exp 2(x + y - t) + \sin \exp(x + y - t) - \right. \\
 & \left. \exp(x + y - \tau) \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_1 \right) + u_1 \cos \exp(x + y - \tau) \right] \times \\
 & \exp \left( i \frac{b\lambda_1^4 - c\lambda_2^2}{\lambda_1} (\tau - t) \right) d\lambda_1 d\lambda_2 d\tau, \tag{33}
 \end{aligned}$$

其中  $u_1$  由式(32)表示.

由式(32), (33)并取无量纲参数  $\varepsilon = 0.5$ , 可得到尘埃等离子体低频振动广义非线性 KP 方程初值问题(24), (25)的精确解  $U_{\text{exa}}$  和用泛函分析同伦映射方法得到的零次、一次、二次近似行波解  $U_{0\text{app}}, U_{1\text{app}}, U_{2\text{app}}$  在  $O$ - $uz$  ( $z = x + y - t$ ) 平面上的模拟曲线图形, 参见图 2 所示.

由图 2 也可看出, 尘埃等离子体低频振动广义非线性 KP 方程初值问题(24), (25)用同伦映射方法得到的近似解析解逼近对应初值问题精确解的情况.

继续利用 Fourier 变换和泛函同伦映射(10), 可得到尘埃等离子体中的低频振动广义非线性 KP 方程初值问题(24), (25)的更高次近似解  $U_{n\text{app}}(x, y, t), n = 3, 4, \dots$ , 而极限函数

$$U(x, y, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} U_{n\text{app}}(x, y, t)$$

就是广义非线性 KP 方程初值问题(24), (25)的精确解.

可以用摄动理论证明<sup>[7]</sup>, 广义非线性 KP 方程初值问题(24), (25), 当无量纲参数  $\varepsilon$  为充分小的正数时, 方程的精确解  $U_{\text{exa}}(x, y, t)$  与用同伦映射方法得到的各次近似解析解  $U_{n\text{app}}(x, y, t)$  的如下精度表示式:

$$U_{\text{exa}}(x, y, t) - U_{n\text{app}}(x, y, t) = O(\varepsilon^{n+1}), \quad n = 1, 2, \dots, 0 < \varepsilon \ll 1.$$

同理, 利用泛函分析同伦映射理论<sup>[6]</sup>, 得知二维低频尘埃波动扰动方程(1)和初始条件

(9)的第  $n$  次近似解析解  $U_n(x, y, t)$  也具有良好的精度。

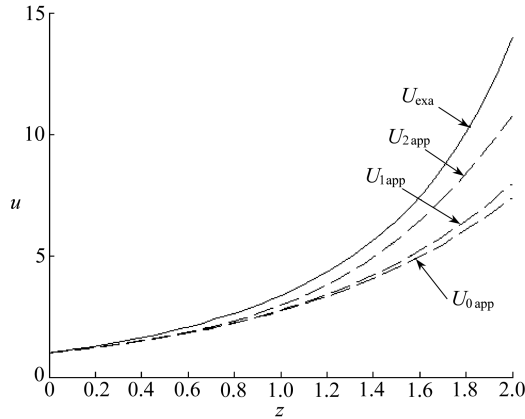


图2 初值问题(24),(25)精确解  $U_{\text{exa}}(z)$  和近似解  $U_{0\text{app}}(z), U_{1\text{app}}(z), U_{2\text{app}}(z)$  ( $z = x + y - t$ )

Fig. 2 Exact solution  $U_{\text{exa}}(z)$  and approximate solutions  $U_{0\text{app}}(z), U_{1\text{app}}(z), U_{2\text{app}}(z)$  ( $z = x + y - t$ )

### 4 扰动项对尘埃分布的影响

例2 考虑尘埃等离子体无量纲广义非线性 KP 方程和初始条件:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial u}{\partial t} - au \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right] + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a \exp(-bu), \tag{34}$$

$$u|_{t=0} = d, \tag{35}$$

其中  $a, b, c, d$  为正常数。

不难得到问题(34)、(35)的一次、二次近似解  $U_1(x, y, t), U_2(x, y, t)$ 。为了简单起见,不妨选取无量纲参数  $a = 1, 0.5, 0.1, c = 0.1, d = 1$  及  $b = 1$  和  $b = 0.5, 0.1$ , 这时可得二次近似行波解  $U_2(z)$  ( $z = x + y - t$ ), 如图 3, 4 和表 1, 2 所示。

由图 3, 4 和表 1, 2 可以看出, 尘埃等离子体低频振动广义非线性 KP 问题的解  $u$  的分布与扰动项  $a \exp(-bu)$  有直接的关联, 并且扰动项值的幅度越大(即参数  $a$  越大或  $b$  越小), 势函数  $u$  的幅度变化就越大。

表1 扰动项为  $a \exp(-0.5z)$  时  $u$  的模拟数值

Table 1 The simulation values of  $u$  with disturbance term  $a \exp(-0.5z)$

$z$	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
$u(a = 1)$	1.00	1.00	1.00	1.01	1.03	1.05	1.10	1.17	1.27	1.37	1.40
$u(a = 0.5)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.01	1.01	1.03	1.05	1.07	1.12	1.21
$u(a = 0.1)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.01	1.01	1.03	1.04

表2 扰动项为  $0.5 \exp(-bz)$  时  $u$  的模拟数值

Table 2 The simulation values of  $u$  with disturbance term  $0.5 \exp(-bz)$

$z$	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
$u(b = 1)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.01	1.02	1.04	1.07	1.13	1.21	1.32
$u(b = 0.5)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.01	1.01	1.03	1.05	1.07	1.12	1.21
$u(b = 0.1)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.01	1.01	1.02	1.04	1.06	1.09	1.12



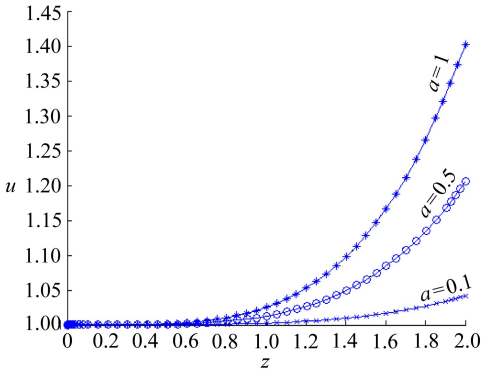


图3 扰动项为  $a\exp(-0.5z)$  时  $u$  的模拟曲线  
Fig. 3 The simulation curves of  $u$  with disturbance term  $a\exp(-0.5z)$

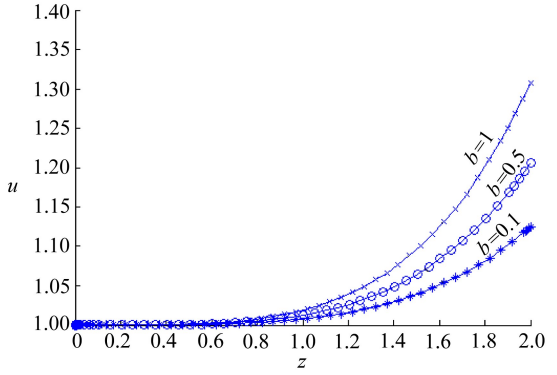


图4 扰动项为  $0.5\exp(-bz)$  时  $u$  的模拟曲线  
Fig. 4 The simulation curves of  $u$  with disturbance term  $0.5\exp(-bz)$

我们还可通过  $u$  的近似解析表示式进行解析运算, 例如进行微分运算得到  $u$  的导数的近似解析式, 对应的曲线和数值参见图 5, 6 和表 3, 4 所示。

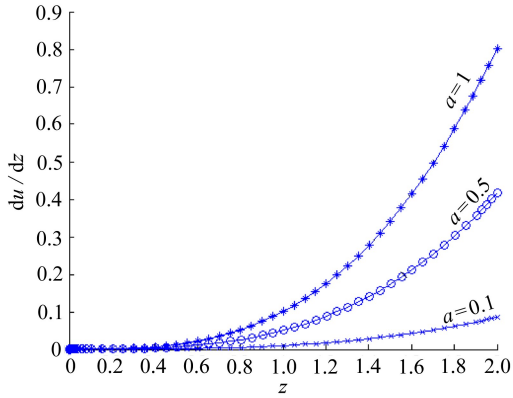


图5 扰动项为  $a\exp(-0.5z)$  时  $du/dz$  的模拟曲线  
Fig. 5 The simulation curves of  $du/dz$  with disturbance term  $a\exp(-0.5z)$

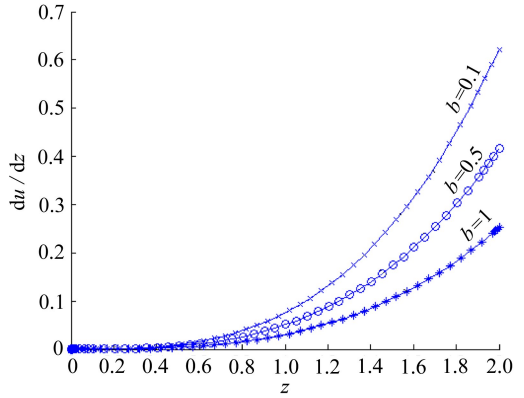


图6 扰动项为  $0.5\exp(-bz)$  时  $du/dz$  的模拟曲线  
Fig. 6 The simulation curves of  $du/dz$  with disturbance term  $0.5\exp(-bz)$

表3 扰动项为  $a\exp(-0.5z)$  时  $du/dz$  的模拟数值

Table 3 The simulation values of  $du/dz$  with disturbance term  $a\exp(-0.5z)$

$z$	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
$du/dz(a = 1)$	0.00	0.00	0.00	0.02	0.05	0.10	0.18	0.28	0.41	0.59	0.80
$du/dz(a = 0.5)$	0.00	0.00	0.00	0.01	0.03	0.05	0.09	0.14	0.21	0.30	0.42
$du/dz(a = 0.1)$	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.02	0.03	0.05	0.07	0.08

表4 扰动项为  $0.5\exp(-bz)$  时  $du/dz$  的模拟数值

Table 4 The simulation values of  $du/dz$  with disturbance term  $0.5\exp(-bz)$

$z$	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
$du/dz(b = 0.1)$	0.00	0.00	0.01	0.02	0.04	0.08	0.14	0.22	0.33	0.46	0.62
$du/dz(b = 0.5)$	0.00	0.00	0.00	0.01	0.03	0.05	0.09	0.14	0.21	0.30	0.42
$du/dz(b = 1)$	0.00	0.00	0.00	0.01	0.02	0.04	0.07	0.11	0.15	0.21	0.25

由图 5, 6 和表 3, 4, 可以看出与扰动项  $a\exp(-bu)$  对  $du/dz$  的变化有直接的关联, 并完全符合实际的情况。

## 5 解的物理意义的进一步探索

正如前面所述,由泛函分析同伦映射方法得到的尘埃等离子体广义 KP 方程初值问题的近似解  $u_{n\_app}(x, y, t)$  是近似的解析关系式,因此一般还可以通过解析运算,譬如进行微分、积分等运算,继续对尘埃等离子体进一步研究,定量地得到其它相关的物理性态。

例如,可以通过近似解析函数  $u_{n\_app}(x, y, t)$  计算出尘埃等离子体的流速以及流速关于  $x, y$  或  $t$  的变化率的分布情况.再如,通过近似函数  $u_{n\_app}(x, y, t)$  定量地计算出尘埃等离子体的密度、电荷量、对应的波峰值等,由此来推算出可能出现的超高密度电荷聚集而导致放电击穿现象等.同时人们还可定量地计算出有关尘埃的其它相关物理量的预报.不但如此,我们还可采取措施,人为地控制非线性 KP 方程(1)的扰动项,例如监管城乡和工、矿区对各种形式的尘埃污染物继续向大气排放、并可在适当的时间和地点发送适量的气象导弹等,以减轻和改变尘埃分布强度,使大气环境尽快趋于正常和稳定.关于上述情况,本文不再详细论述。

## 6 结 论

对于非线性问题的解,一般不能用有限的初等函数项来得到其精确解,本文是用泛函分析同伦映射方法,选择合理的初始近似函数,以较快地得到较高精度的近似解析解。

本文用泛函分析同伦映射方法得到的具有扰动的广义非线性 KP 方程(1)的尘埃等离子体低频振动近似解析解.不同于单纯用数值模拟方法得到的模拟解,可进行微分、积分等运算,继续对尘埃等离子体进一步研究,得到其它相关的物理性态,使得对大气环境的预报数据更为充分、准确,以便人们能及早采取恰当的措施去缓解它,减轻和避免由此可能发生的灾害。

### 参考文献(References):

- [1] Keidar M, Boyd L D, Beilis I I. Plasma flow and plasma-wall transition in Hall thruster channel[J]. *Physics of Plasmas*, 2001, **8**(12): 5315-5322.
- [2] DUAN Wen-shan, SHI Yu-ren. The effect of dust size distribution for two ion temperature dusty plasmas[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2003, **18**(2): 321-328.
- [3] 韩久宁, 王苍龙, 栗生长, 段文山. 二维热离子等离子体中离子声孤波的相互作用[J]. 物理学报, 2008, **57**(10): 6068-6073.(HAN Jiu-ning, WAN Cang-long, LI Sheng-chang, DUAN Wen-shan. The interaction of ion-acoustic solitary waves in a two-dimensional hot ion plasmam [J]. *Acta Physica Sinica*, 2008, **57**(10): 6068-6073. (in Chinese))
- [4] 何广军, 田多祥, 林麦麦, 段文山. 含有带正负电离子的等离子体中的非线性波研究[J]. 物理学报, 2008, **57**(4): 2320-2327.(HE Guang-jun, TIAN Duo-xiang, LIN Mai-mai, DUAN Wen-shan. The study of nonlinear waves in plasma containing both positively and negatively charged ions[J]. *Acta Physica Sinica*, 2008, **57**(4): 2320-2327. (in Chinese))
- [5] 仲生仁. 尘埃等离子体中非线性波的叠加效应及稳定性问题[J]. 物理学报, 2010, **59**(4): 2178-2181.(ZHONG Sheng-ren. Instability and interaction of the nonlinear solitary waves in two-temperature-ion dusty plasma [J]. *Acta Physica Sinica*, 2010, **59**(4): 2178-2181. (in Chinese))
- [6] Liao S J. *Beyond Perturbation: Introduction to the Homotopy Analysis Method* [M]. New York: CRC Press Co, 2004.
- [7] de Jager E M, JIANG Fu-ru. *The Theory of Singular Perturbation* [M]. Amsterdam: North-

Holland Publishing Co, 1996.

- [8] 周焕林, 徐兴盛, 李秀丽, 陈豪龙. 反演二维瞬态热传导问题随温度变化的导热系数[J]. 应用数学和力学, 2014, **35**(12): 1341-1351. (ZHOU Huan-lin, XU Xing-sheng, LI Xiu-li, CHEN Hao-long. Identification of temperature-dependent thermal conductivity for 2-D transient heat conduction problems[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, **35**(12): 1341-1351. (in Chinese))
- [9] MO Jia-qi, LIN Wan-tao. Generalized variation iteration solution of an atmosphere-ocean oscillator model for global climate[J]. *Journal of Systems Science and Complexity*, 2011, **24**(2): 271-276.
- [10] MO Jia-qi. Solution of travelling wave for nonlinear disturbed long-wave system[J]. *Communications in Theoretical Physics*, 2011, **55**(3): 387-390.
- [11] MO Jia-qi, LIN Wan-tao, LIN Yi-hua. Asymptotic solution for the El Niño time delay sea-air oscillator model[J]. *Chinese Physics B*, 2011, **20**(7): 070205.
- [12] MO Jia-qi. A variational iteration solving method for a class of generalized Boussinesq equation[J]. *Chinese Physics Letters*, 2009, **26**(6): 060202.
- [13] MO Jia-qi, LIN Wan-tao, WANG Hui. A class of homotopic solving method for ENSO model [J]. *Acta Mathematica Scientia*, 2009, **29**(1): 101-110.
- [14] MO Jia-qi. Homotopic mapping solving method for gain fluency of a laser pulse amplifier [J]. *Science in China, Physics, Mechanics & Astronomy (Series G)*, 2009, **52**(7): 1007-1010.
- [15] 石兰芳, 陈贤峰, 韩祥临, 许永红, 莫嘉琪. 一类 Fermi 气体在非线形扰动机制中轨线的渐近表示[J]. 物理学报, 2014, **63**(6): 060204. (SHI Lan-fang, CHEN Xian-feng, HAN Xiang-lin, XU Yong-hong, MO Jia-qi. Asymptotic expressions of path curve for a class of Fermi gases in nonlinear disturbed mechanism[J]. *Acta Physica Sinica*, 2014, **63**(6): 060204. (in Chinese))
- [16] 汪维刚, 许永红, 石兰芳, 莫嘉琪. 一类双参数非线性高阶反应扩散方程的摄动解法[J]. 应用数学和力学, 2014, **35**(12): 1383-1391. (WAN Wei-gang, XU Yong-hong, SHI Lan-fang, MO Jia-qi. Perturbation method for a class of high-order nonlinear reaction diffusion equations with double parameters[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, **35**(12): 1383-1391. (in Chinese))
- [17] 史娟荣, 石兰芳, 莫嘉琪. 一类非线性强阻尼扰动发展方程的解[J]. 应用数学和力学, 2014, **35**(9): 1046-1054. (SHI Juan-rong, SHI Lan-fang, MO Jia-qi. Solutions to a class of nonlinear strong-dump disturbed evolution equations[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, **35**(9): 1046-1054. (in Chinese))

## Study on a Class of Diffusion Models for Dust Plasma in Atmosphere

FENG Yi-hu<sup>1</sup>, SHI Lan-fang<sup>2</sup>, XU Yong-hong<sup>3</sup>, MO Jia-qi<sup>4</sup>

(1. *Department of Electronics Information Engineering,*

*Bozhou Teachers College, Bozhou, Anhui 236800, P.R.China;*

2. *College of Mathematics and Statistics, Nanjing University of Information*

*Science & Technology, Nanjing 210044, P.R.China;*

3. *Department of Mathematics & Physics, Bengbu College,*

*Bengbu, Anhui 233030, P.R.China;*

4. *Department of Mathematics, Anhui Normal University,*

*Wuhu, Anhui 241003, P.R.China)*

**Abstract:** A class of nonlinear diffusion equation initial value problems about dust plasma diffusion in atmosphere were investigated. Firstly, the exact solution to the non-disturbed dust plasma diffusion equation was obtained with the Fourier transformation method. Then a homotopic mapping was introduced and an initial approximate function was chosen to find out successively the arbitrary-order approximate analytic solutions to the disturbed initial value problems according to the homotopic mapping theory again. Next, the fixed point theory was applied to make clear validity of the approximate analytic solutions and determine their respective degrees of approximation. In the 2 examples, simulation curves and tables were given to make comparison between the exact solution and the various-order approximate ones. Finally, the physical sense of the approximate solutions obtained with the homotopic mapping method was analyzed simply and their easy application and high accuracy were examined.

**Key words:** atmosphere; diffusion equation; plasma; homotopic mapping

**Foundation item:** The National Natural Science Foundation of China(11202106)