文章编号:1000-0887(2015)06-0668-09

多目标优化问题 proximal 真有效解的最优性条件*

李小燕, 高 英

(重庆师范大学 数学学院, 重庆 400047)

摘要: 在广义凸性假设下,给出了集合 proximal 真有效点的线性标量化,并在此基础上证明了它与 Benson 真有效点和 Borwein 真有效点的等价性.将这些结果应用到多目标优化问题上,得到 proximal 真有效解的最优性条件.最后,利用 proximal 次微分,得到了 proximal 真有效解的模糊型最优性条件.

关 键 词: proximal 法锥; 多目标优化; proximal 真有效解; 最优性条件
中图分类号: O221.6 **文献标志码**: A
doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2015.06.011

引 言

在多目标优化问题中,如何定义解是首要的问题.1951 年,Koopmans[1]在生产与分配的活动分析中第一次提出了 Pareto 有效解的概念,较好地刻画了在偏序而非全序关系下解的概念.同年,Kuhn 和 Tucker[2]发现 Pareto 有效解有时不具备标量化特征,为了消除这样的反常性质,针对可微多目标优化问题,他们首次提出了真有效解的概念,称之为 Kuhn-Tucker 真有效解.此后,不少学者开始研究不同类型的真有效解.例如:Geoffrion[3]对于非可微多目标优化问题提出了一种新的真有效解的概念.Borwein[4]和 Benson[5]通过切锥和生成锥给出了两种真有效解的概念.1993 年,Borwein 和 Zhuang[6-7]在赋范空间中又定义了超有效点(解)的概念.2005 年,Lalitha 和 Arora[8]利用 proximal 法锥就多目标优化问题提出了一种新的真有效点的概念,称之为 proximal 真有效点.有了这些解的概念之后,它的理论研究随之丰富起来,比如解的最优性条件,解集的稠密性和连通性等[8-15].

文献[8]在局部星形条件下,研究了多目标优化问题 proximal 真有效点的线性标量化,在凸性条件下研究了它与 Benson 和 Borwein 真有效点之间的关系.本文在文献[8]的基础上,在另一种广义凸性条件下,研究了 proximal 真有效点的最优性条件.基本结构如下:第 1 节,给出基本的定义和引理.第 2 节,首先,指出文献[8]中的错误,并给予修正.其次,在广义凸性假设下,得到 proximal 真有效点的线性标量化,并研究了它与 Benson 和 Borwein 真有效点之间的等

* **收稿日期**: 2014-12-08; **修订日期**: 2015-05-05
基金项目: 国家自然科学基金(11201511;11271391;11431004)
作者简介: 李小燕(1990—),女,重庆人,硕士生(E-mail: xyanzi1201@163.com);
高英(1982—),女,内蒙古人,副教授(通讯作者. E-mail: gaoyingimu@163.com).

价性.第 3 节,将第 2 节的结果应用到多目标优化问题中,并在标量化的基础上,利用 proximal 次微分,得到了 proximal 真有效解的模糊型最优性条件.

1 预备知识

令 R^p 为 p 维欧氏空间,R^p_+ 为其非负象限.本文总假设 Y 为 R^p 中的非空闭集,C 为 R^p 中内部非空的闭凸点锥.锥 C 的正极锥定义为

$$C^* = \{\boldsymbol{d} \in R^p \mid \langle \boldsymbol{d},\boldsymbol{c}\rangle \geqslant 0,\ \forall \boldsymbol{c} \in C\}.$$

锥 C 的严格正极锥定义为

$$C^{*0} = \{\boldsymbol{d} \in R^p \mid \langle \boldsymbol{d},\boldsymbol{c}\rangle > 0,\ \forall \boldsymbol{c} \in C\backslash\{\boldsymbol{0}\}\}.$$

引理 1.1[16] 如果 C 为 R^p 中的点凸锥,那么

(i) $(-C)^* =-C^*$,

(ii) $C^{*0} + C^* \subseteq C^{*0}$.

定义 1.1[8] 令 $\bar{\boldsymbol{y}} \in Y$.则 Y 在 $\bar{\boldsymbol{y}}$ 的切锥定义为

$$T(Y,\bar{\boldsymbol{y}}) = \{\boldsymbol{d} \in R^p \mid \exists t_j \downarrow 0,\ \boldsymbol{d}_j \to \boldsymbol{d} \text{ 使得 } \bar{\boldsymbol{y}} + t_j\boldsymbol{d}_j \in Y\}.$$

Y 在 $\bar{\boldsymbol{y}}$ 的法锥定义为

$$N(Y,\bar{\boldsymbol{y}}) = \{\boldsymbol{d} \in R^p \mid \langle \boldsymbol{d},\boldsymbol{h}\rangle \leqslant 0,\ \forall \boldsymbol{h} \in T(Y,\bar{\boldsymbol{y}})\}.$$

定义 1.2[17] 令 $\boldsymbol{x} \notin Y$,$\bar{\boldsymbol{y}} \in Y$ 为 $\boldsymbol{x}$ 在 Y 上的投影, 即 $\|\boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{y}}\| = \min_{y\in Y}\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$,向量 $\lambda(\boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{y}})$ 称为 Y 在 $\bar{\boldsymbol{y}}$ 的 proximal 法向量,$\lambda \geqslant 0$.所有法向量之集称为 Y 在 $\bar{\boldsymbol{y}}$ 的 proximal 法锥,记为 $N_p(Y,\boldsymbol{y})$.$\boldsymbol{x}$ 在 Y 上的所有投影之集记为 $\mathrm{proj}_Y(\boldsymbol{x})$.假设 $\boldsymbol{y} \in Y$,且对 $\forall \boldsymbol{x} \notin Y$ 都有 $\boldsymbol{y} \notin \mathrm{proj}_Y(\boldsymbol{x})$,则令 $N_p(Y,\boldsymbol{y}) = \{\boldsymbol{0}\}$.

引理 1.2[17] $\boldsymbol{\xi} \in N_p(Y,\bar{\boldsymbol{y}})$ 当且仅当存在 $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\xi},\bar{\boldsymbol{y}}) \geqslant 0$ 使得

$$\langle \boldsymbol{\xi},\boldsymbol{y} - \bar{\boldsymbol{y}}\rangle \leqslant \boldsymbol{\sigma}\|\boldsymbol{y} - \bar{\boldsymbol{y}}\|^2,\qquad \forall \boldsymbol{y} \in Y.$$

定义 1.3[18,8] 令 $\bar{\boldsymbol{y}} \in Y$,

(i) 称 $\bar{\boldsymbol{y}}$ 为 Y 关于 C 的有效点,如果

$$Y \cap (\bar{\boldsymbol{y}} - C) = \{\bar{\boldsymbol{y}}\}.$$

(ii) 称 $\bar{\boldsymbol{y}}$ 为 Y 关于 C 的 Benson 真有效点, 如果

$$\mathrm{clcone}(Y + C - \bar{\boldsymbol{y}}) \cap (-C) = \{\boldsymbol{0}\}.$$

(iii) 称 $\bar{\boldsymbol{y}}$ 为 Y 关于 C 的 Borwein 真有效点,如果

$$T(Y + C,\bar{\boldsymbol{y}}) \cap (-C) = \{\boldsymbol{0}\}.$$

(iv) 称 $\bar{\boldsymbol{y}}$ 为 Y 关于 C 的 proximal 真有效点,如果 $\bar{\boldsymbol{y}} \in E[Y,C]$ 且

$$N_p(Y + C,\bar{\boldsymbol{y}}) \cap (-C^{*0}) \neq \varnothing.$$

Y 的有效点之集,Benson 真有效点之集,Borwein 真有效点之集,proximal 真有效点之集分别记为 $E[Y,C]$,$\mathrm{Ben}[Y,C]$,$\mathrm{Bor}[Y,C]$ 和 $\mathrm{Pr}[Y,C]$.

注 1.1 (i) 定义 1.3(iv) 中的条件 $\bar{\boldsymbol{y}} \in E[Y,C]$ 可以去掉.因为 $N_p(Y + C,\bar{\boldsymbol{y}}) \cap (-C^{*0}) \neq \varnothing$ 蕴含 $\bar{\boldsymbol{y}} \in E[Y,C]$.事实上,假设 $N_p(Y + C,\bar{\boldsymbol{y}}) \cap (-C^{*0}) \neq \varnothing$,如 $\bar{\boldsymbol{y}} \notin E[Y,C]$,则存在 $\boldsymbol{q} \neq \boldsymbol{0}$ 使得 $\boldsymbol{q} \in (Y - \bar{\boldsymbol{y}}) \cap (-C)$.因此,$\boldsymbol{q} + \bar{\boldsymbol{y}} + [-(t + 1)\boldsymbol{q}] = \bar{\boldsymbol{y}} - t\boldsymbol{q} \in Y + C$, $\forall t \in (-1,0)$.下面证明 $N_p(Y + C,\bar{\boldsymbol{y}}) \cap (-C^{*0}) = \varnothing$.事实上,令 $\boldsymbol{d} \in N_p(Y + C,\bar{\boldsymbol{y}})$,则由引理 1.1,存在 $\boldsymbol{\sigma} \geqslant 0$ 使得

$$\langle \bar{\boldsymbol{y}},\bar{\boldsymbol{y}} - t\boldsymbol{q} - \bar{\boldsymbol{y}}\rangle = \langle \boldsymbol{d}, -t\boldsymbol{q}\rangle \leqslant \boldsymbol{\sigma}\|-t\boldsymbol{q}\|^2,$$

即

$$-t\langle \boldsymbol{d},\boldsymbol{q}\rangle \leqslant \sigma t^2 \|\boldsymbol{q}\|^2.$$

因为 $-t \in (0,1)$，则

$$\langle \boldsymbol{d},\boldsymbol{q}\rangle \leqslant \sigma(-t)\|\boldsymbol{q}\|^2.$$

在上式中令 $t \to 0$，有 $\langle \boldsymbol{d},\boldsymbol{q}\rangle \leqslant 0$。又因为 $\boldsymbol{q} \in -C\setminus\{\boldsymbol{0}\}$，则 $\boldsymbol{d} \in C^{*0}$，所以 $N_p(Y+C,\bar{\boldsymbol{y}}) \cap (-C^{*0}) = \varnothing$，与假设矛盾。因此 $(Y-\bar{\boldsymbol{y}}) \cap (-C) = \{\boldsymbol{0}\}$，即 $\bar{\boldsymbol{y}} \in E[Y,C]$。

(ii) 定义 1.3(iv)中的条件 $N_p(Y+C,\bar{\boldsymbol{y}}) \cap (-C^{*0}) \neq \varnothing$ 不能换成 $N_p(Y+C,\bar{\boldsymbol{y}}) \cap (-C^{*}\setminus\{\boldsymbol{0}\}) \neq \varnothing$，因为 $N_p(Y+C,\bar{\boldsymbol{y}}) \cap (-C^{*}\setminus\{\boldsymbol{0}\}) \neq \varnothing$ 不能保证 $\bar{\boldsymbol{y}} \in E[Y,C]$，见例 1.1。

(iii) 一般地，$N_p(Y+C,\bar{\boldsymbol{y}}) \subseteq N_p(Y,\bar{\boldsymbol{y}})$。因此，$N_p(Y+C,\bar{\boldsymbol{y}}) \cap (-C^{*0}) \neq \varnothing$ 也不能换成 $N_p(Y,\bar{\boldsymbol{y}}) \cap (-C^{*0}) \neq \varnothing$。见例 1.2。

例 1.1 令 $C = R_+^2$，$Y = \{(y_1,y_2) \in R^2 \mid y_1 \geqslant 0\}$，$\bar{\boldsymbol{y}} = (0,0)$，则 $N_p(Y+C,\bar{\boldsymbol{y}}) = \{(y_1,y_2) \mid y_1 \leqslant 0, y_2 = 0\}$。因此，$N_p(Y+C,\bar{\boldsymbol{y}}) \cap (-C^{*}\setminus\{\boldsymbol{0}\}) \neq \varnothing$，但 $N_p(Y+C,\bar{\boldsymbol{y}}) \cap (-C^{*0}) = \varnothing$，$\bar{\boldsymbol{y}} = (0,0) \notin E[Y,C]$。

例 1.2 令 $C = R_+^2$，$Y = \{(y_1,y_2) \in R^2 \mid y_1 \leqslant -2, y_2 = 0\} \cup \{(0,0)\}$，$\bar{\boldsymbol{y}} = (0,0)$，那么 $N_p(Y,\bar{\boldsymbol{y}}) = -C$，因此，$N_p(Y,\bar{\boldsymbol{y}}) \cap (-C^{*0}) \neq \varnothing$。但 $\bar{\boldsymbol{y}} = (0,0) \notin E[Y,C]$。

2 Proximal 真有效点的线性标量化

本节首先指出文献[8]中例 4.1 的计算错误。其次，在一种广义凸性假设下，给出 proximal 真有效点的线性标量化。

记 $S_{\boldsymbol{\mu}}Y = \{\bar{\boldsymbol{y}} \mid \langle \boldsymbol{\mu},\bar{\boldsymbol{y}}\rangle = \inf\{\langle \boldsymbol{\mu},\boldsymbol{y}\rangle \mid \boldsymbol{y} \in Y\}\}$，$D[Y,C] = \cup_{\boldsymbol{\mu} \in C^{*0}} S_{\boldsymbol{\mu}}Y$。

引理 2.1[8] 如果 $\bar{\boldsymbol{y}} \in \mathrm{Pr}[Y,C]$ 且 $Y+C$ 在 $\bar{\boldsymbol{y}}$ 是局部星形的(即对 $\forall \boldsymbol{y} \in Y$，存在 $0 < a(\boldsymbol{y},\bar{\boldsymbol{y}}) \leqslant 0$，使得 $(1-\lambda)\bar{\boldsymbol{y}} + \lambda \boldsymbol{y} \in Y$，$\forall 0 < \lambda < a(\boldsymbol{y},\bar{\boldsymbol{y}})$)，则 $\bar{\boldsymbol{y}} \in D[Y,C]$。

文献[8]中给出如下例子说明 $Y+C$ 在 $\bar{\boldsymbol{y}}$ 局部星形的条件必不可少。但例子中存在一些计算错误。

例 2.1[8] 令 $C = R_+^n$，$Y = \{(y_1,y_2) \in R^2 \mid y_2 = -y_1, 0 \leqslant y_1 \leqslant 2\} \cup \{(y_1,y_2) \mid y_2 = 2, -2 \leqslant y_1 < 0\}$。那么 $Y+C$ 在 $\bar{\boldsymbol{y}} = (0,0)$ 不是局部星形的，这是因为 $(1-\lambda)\bar{\boldsymbol{y}} + \lambda \boldsymbol{y} \notin Y+C$，$\forall 0 < \lambda < 1$，其中 $\boldsymbol{y} = (-1,2)$。由 $N_p(Y+C,\bar{\boldsymbol{y}}) = -C$ 有 $\bar{\boldsymbol{y}} \in \mathrm{Pr}[Y,C]$。注意到 $C^{*0} = \{(\mu_1,\mu_2) \mid \mu_1 > 0, \mu_2 > 0\}$ 且 $\forall \boldsymbol{\mu} = (\mu_1,\mu_2) \in C^{*0}$，

$$S_{\boldsymbol{\mu}}Y = \begin{cases} \{(-2,2)\}, & \mu_1 \geqslant \mu_2, \\ \{(2,-2)\}, & \mu_1 < \mu_2. \end{cases}$$

因此，$D[Y,C] = \{(-2,2),(2,-2)\}$。综上，$\bar{\boldsymbol{y}} \notin D[Y,C]$。

事实上，在上述例子中，$N_p(Y+C,\bar{\boldsymbol{y}}) = \{(y_1,y_2) \mid y_2 \geqslant y_1, y_1 \leqslant 0, y_2 \leqslant 0\} \neq -C$，且

$$S_{\boldsymbol{\mu}}Y = \begin{cases} \{(-2,2)\}, & \mu_1 > \mu_2, \\ \{(2,-2)\}, & \mu_1 < \mu_2, \\ \{(-2,2)\} \cup \{(y_1,y_2) \mid y_2 = -y_1, 0 \leqslant y_1 \leqslant 2\}, & \mu_1 = \mu_2, \end{cases}$$

所以 $\bar{\boldsymbol{y}} = (0,0) \in D[Y,C]$。因此，该例子不能说明引理 2.1 中的局部星形性必不可少。我们修改例 2.1，得到如下的例子。

例 2.2 令 $C = R_+^2$，$Y = \{(y_1,y_2) \mid y_2 = -y_1, 0 \leqslant y_1 \leqslant 2\} \cup \{(y_1,y_2) \mid y_2 = 2, -3 \leqslant y_1 < 0\}$。容易验证，$Y+C$ 在 $\bar{\boldsymbol{y}} = (0,0)$ 不是局部星形的，且 $\bar{\boldsymbol{y}} \in \mathrm{Pr}[Y,C]$，$\bar{\boldsymbol{y}} \notin D[Y,C]$。因此，引理 2.1 中的局部星形性必不可少。

文献[8]在局部星形条件下研究了 proximal 真有效点的线性标量化.下面在另一种广义凸性假设下研究 proximal 真有效点的线性标量化.首先引进如下引理.

引理 2.2[13]　下面的命题等价:

(i) $Y+\operatorname{int} C$ 是凸集;

(ii) $\forall \boldsymbol{\mu} \in \operatorname{int} C,\ \boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2 \in Y, \alpha \in (0,1)$,存在 $\boldsymbol{y}_3 \in Y$ 使得

$$\boldsymbol{\mu}+\alpha \boldsymbol{y}_1+(1-\alpha)\boldsymbol{y}_2 \in \boldsymbol{y}_3+\operatorname{int} C.$$

定理 2.1　若 $\bar{\boldsymbol{y}} \in \operatorname{Pr}[Y,C]$ 且 $Y+\operatorname{int} C$ 凸,则 $\bar{\boldsymbol{y}} \in D[Y,C]$.

证明　因 $\bar{\boldsymbol{y}} \in \operatorname{Pr}[Y,C]$,所以存在 $\boldsymbol{h} \in -C^{*0}$ 使得 $\boldsymbol{h} \in N_p(Y+C,\bar{\boldsymbol{y}})$.由引理 1.2 有,存在 $\sigma \geqslant 0$ 使得

$$\langle \boldsymbol{h},\tilde{\boldsymbol{y}}\rangle \leqslant \sigma \|\tilde{\boldsymbol{y}}-\bar{\boldsymbol{y}}\|^2, \qquad \forall \tilde{\boldsymbol{y}} \in Y+C. \tag{1}$$

因 $Y+\operatorname{int} C$ 凸,由引理 2.2 有,$\forall \boldsymbol{\mu} \in \operatorname{int} C,\ \forall \boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2 \in Y$ 和 $\forall \alpha \in (0,1)$,

$$\boldsymbol{\mu}+\alpha \boldsymbol{y}_1+(1-\alpha)\boldsymbol{y}_2 \in Y+\operatorname{int} C \subseteq Y+C.$$

因此,对 $\alpha^2\boldsymbol{\mu} \in \operatorname{int} C$ 和 $\forall \boldsymbol{y} \in Y$, 有

$$\alpha^2\boldsymbol{\mu}+\alpha \boldsymbol{y}+(1-\alpha)\bar{\boldsymbol{y}} \in Y+C.$$

上式结合式(1)有

$$\langle \boldsymbol{h},\alpha^2\boldsymbol{\mu}+\alpha(\boldsymbol{y}-\bar{\boldsymbol{y}})\rangle \leqslant \sigma\alpha^2\|\alpha\boldsymbol{\mu}+(\boldsymbol{y}-\bar{\boldsymbol{y}})\|^2.$$

即

$$\langle \boldsymbol{h},\boldsymbol{y}-\bar{\boldsymbol{y}}\rangle \leqslant \sigma\alpha\|\alpha\boldsymbol{\mu}+(\boldsymbol{y}-\bar{\boldsymbol{y}})\|^2-\alpha\langle \boldsymbol{h},\boldsymbol{\mu}\rangle.$$

在上式中,令 $\alpha \to 0^+$,有 $\langle \boldsymbol{h},\boldsymbol{y}-\bar{\boldsymbol{y}}\rangle \leqslant 0, \forall \boldsymbol{y} \in Y$.令 $\bar{\boldsymbol{h}}=-\boldsymbol{h}$,则 $\bar{\boldsymbol{h}} \in C^{*0}$ 且 $\langle \bar{\boldsymbol{h}},\bar{\boldsymbol{y}}\rangle \leqslant \langle \bar{\boldsymbol{h}},\boldsymbol{y}\rangle, \forall \boldsymbol{y} \in Y$.因此 $\bar{\boldsymbol{y}} \in D[Y,C]$.

注 2.1　(i) 若 $Y+\operatorname{int} C$ 不凸,则定理不一定成立.参见例 2.2.

(ii) $Y+\operatorname{int} C$ 凸不能保证 $Y+C$ 在 $\bar{\boldsymbol{y}}$ 局部星形.相反,$Y+C$ 的局部星形性也并不意味着 $Y+\operatorname{int} C$ 凸.参见例 2.3 和例 2.4.

(iii) $Y+\operatorname{int} C$ 凸不能减弱为 $\operatorname{cone}(Y)+\operatorname{int} C$ 凸或 $\operatorname{clcone}(Y+C)$ 凸.参见例 2.5.

例 2.3　令

$$Y=\{(y_1,y_2) \mid y_2=-y_1, y_1 \leqslant 0\} \cup \{(1,1)\},\ C=R_+^2,\ \bar{\boldsymbol{y}}=(0,0).$$

则 $Y+C$ 在 $\bar{\boldsymbol{y}}$ 不局部星形,但 $Y+\operatorname{int} C$ 凸,且 $\bar{\boldsymbol{y}} \in \operatorname{Pr}[Y,C]$,因此,定理 2.1 中的条件满足,所以 $\bar{\boldsymbol{y}} \in D[Y,C]$.

例 2.4　令 $Y=\{(y_1,y_2) \mid y_1 \geqslant 0, y_2 \geqslant 0, y_1^2+y_2^2=1\}, C=R_+^2, \bar{\boldsymbol{y}}=(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$.则 $Y+\operatorname{int} C$ 不凸,但 $Y+C$ 在 $\bar{\boldsymbol{y}}$ 局部星形,且 $\bar{\boldsymbol{y}} \in \operatorname{Pr}[Y,C]$.因此,由引理 2.1 有,$\bar{\boldsymbol{y}} \in D[Y,C]$.

例 2.5　令

$$Y=\{(y_1,y_2) \mid y_1<0, y_2 \geqslant 1\} \cup R_+^2,\ C=R_+^2,\ \bar{\boldsymbol{y}}=(0,0).$$

则 $\operatorname{cone}(Y)+\operatorname{int} C$ 和 $\operatorname{clcone}(Y+C)$ 凸,且 Y 闭.容易证明 $\bar{\boldsymbol{y}} \in \operatorname{Pr}[Y,C]$.但 $\bar{\boldsymbol{y}} \notin D[Y,C]$.事实上,$\forall \boldsymbol{\mu}=(\mu_1,\mu_2) \in C^{*0}=\{(\mu_1,\mu_2) \mid \mu_1>0, \mu_2>0\}, \langle \boldsymbol{\mu},\bar{\boldsymbol{y}}\rangle=0$.对 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2) \in Y\backslash\{(0,0)\}$,当 $y_2=1$ 且 $y_1<-\mu_2/\mu_1$ 时,有 $\langle \boldsymbol{\mu},\boldsymbol{y}\rangle=\mu_1y_1+\mu_2y_2<0=\langle \boldsymbol{\mu},\bar{\boldsymbol{y}}\rangle$,因此,$\forall \boldsymbol{\mu} \in C^{*0}, \langle \boldsymbol{\mu},\bar{\boldsymbol{y}}\rangle \neq \inf\{\langle \boldsymbol{\mu},\boldsymbol{y}\rangle \mid \boldsymbol{y} \in Y\}$,即,$\bar{\boldsymbol{y}} \notin D[Y,C]$.

定理 2.2　令 $\bar{\boldsymbol{y}} \in Y$,若 $Y+\operatorname{int} C$ 凸.则下面的命题等价:

(i) $\bar{\boldsymbol{y}} \in \operatorname{Bor}[Y,C]$,

(ii) $\bar{\boldsymbol{y}} \in \operatorname{Ben}[Y,C]$,

(iii) $\bar{\boldsymbol{y}} \in \mathrm{Pr}[Y,C]$,

(iv) $N(Y+C,\bar{\boldsymbol{y}}) \cap (-C^{*0}) \neq \varnothing$.

证明　因 $Y+\mathrm{int}\,C$ 凸，由文献[10]的定理 1 有

$$\mathrm{Bor}[Y,C]=\mathrm{Ben}[Y,C].$$

由文献[12]的定理 6.2，有

$$D[Y,C]=\mathrm{Ben}[Y,C].$$

因 Y 是 R^p 中的闭集，由文献[8]的定理 3.1 和 4.1 有

$$D[Y,C]\subseteq \mathrm{Pr}[Y,C]\subseteq \mathrm{Bor}[Y,C].$$

因此，$\mathrm{Pr}[Y,C]=\mathrm{Ben}[Y,C]=\mathrm{Bor}[Y,C]$.

现在证明(i)和(iv)等价. 假设 $\bar{\boldsymbol{y}} \in \mathrm{Bor}[Y,C]$，即 $T(Y+C,\bar{\boldsymbol{y}})\cap(-C)=\{\boldsymbol{0}\}$. 因 $\bar{\boldsymbol{y}}\in Y$ 且 C 是锥，所以 $\bar{\boldsymbol{y}}\in \mathrm{cl}(Y+\mathrm{int}\,C)$. 由文献[10]的引理 1 有

$$T(Y+C,\bar{\boldsymbol{y}})=T(Y+\mathrm{int}\,C,\bar{\boldsymbol{y}}).$$

因此

$$(T(Y+C,\bar{\boldsymbol{y}})\cap(-C))^{*}=(T(Y+\mathrm{int}\,C,\bar{\boldsymbol{y}})\cap(-C))^{*}=\{\boldsymbol{0}\}^{*}=R^p,$$

也即是

$$-N(Y+\mathrm{int}\,C,\bar{\boldsymbol{y}})+(-C)^{*}=R^p.$$

由引理 1.1 有

$$-N(Y+\mathrm{int}\,C,\bar{\boldsymbol{y}})-C^{*}=R^p.$$

因此，$\forall \boldsymbol{x}\in C^{*0}\subseteq R^p$，存在 $\boldsymbol{h}\in N(Y+\mathrm{int}\,C,\bar{\boldsymbol{y}})$，$\boldsymbol{k}\in C^{*0}$ 使得 $\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{h}-\boldsymbol{k}$. 再由引理 1.1，可得 $-\boldsymbol{h}=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{k}\in C^{*0}+C^{*}\subseteq C^{*0}$. 因此，$\boldsymbol{h}\in N(Y+\mathrm{int}\,C,\bar{\boldsymbol{y}})\cap(-C^{*0})=N(Y+C,\bar{\boldsymbol{y}})\cap(-C^{*0})$，即，$N(Y+C,\bar{\boldsymbol{y}})\cap(-C^{*0})\neq\varnothing$.

反过来，若 $N(Y+C,\bar{\boldsymbol{y}})\cap(-C^{*0})\neq\varnothing$，假设 $\bar{\boldsymbol{y}}\notin \mathrm{Bor}[Y,C]$，则存在 $\boldsymbol{d}\neq\boldsymbol{0}$ 使得 $\boldsymbol{d}\in T(Y+C,\bar{\boldsymbol{y}})\cap(-C)$. 令 $\boldsymbol{h}\in N(Y+C,\bar{\boldsymbol{y}})\cap(-C^{*0})$，则 $\langle \boldsymbol{h},\boldsymbol{d}\rangle\leqslant 0$. 因 $\boldsymbol{d}\in(-C)\setminus\{\boldsymbol{0}\}$，又有 $\langle \boldsymbol{h},\boldsymbol{d}\rangle>0$. 因此 $\bar{\boldsymbol{y}}\in \mathrm{Bor}[Y,C]$.

注 2.2　定理 2.2 推广了文献[8]中的定理 5.1. 参见如下例子.

例 2.6　令

$$Y=\{(y_1,y_2)\mid y_1\geqslant 0,y_2\geqslant 0,1<y_1+y_2<2\}\cup\{(1,0),(0,1)\},C=R_{+}^{2}.$$

注意到 $Y+C$ 不凸，但 $Y+\mathrm{int}\,C$ 凸. 容易验证，$\boldsymbol{y}_1=(1,0)$，$\boldsymbol{y}_2=(0,1)\in \mathrm{Bor}[Y,C]$($\mathrm{Ben}[Y,C]$, $\mathrm{Pr}[Y,C]$) 且 $N(Y+C,\boldsymbol{y}_i)\cap(-C^{*0})\neq\varnothing$, $i=1,2$.

注 2.3　$Y+\mathrm{int}\,C$ 凸不能减弱为 $\mathrm{cone}(Y)+\mathrm{int}\,C$ 凸或 $\mathrm{clcone}(Y+C)$ 凸. 事实上，在例 2.5 中，$\mathrm{cone}(Y)+\mathrm{int}\,C$ 和 $\mathrm{clcone}(Y+C)$ 都是凸集，但因 $T(Y+C,\bar{\boldsymbol{y}})\cap(-R_{+}^{2})=\{\boldsymbol{0}\}$，所以 $\bar{\boldsymbol{y}}\in \mathrm{Bor}[Y,C]$. 因 $\mathrm{clcone}(Y+C-\bar{\boldsymbol{y}})\cap(-R_{+}^{2})\neq\{\boldsymbol{0}\}$，所以 $\bar{\boldsymbol{y}}\notin \mathrm{Ben}[Y,C]$.

3　多目标优化问题 proximal 真有效解的线性标量化

将上一节的结果应用到多目标优化问题中，得到多目标优化问题解的线性标量化. 再通过 proximal 次微分，得到 proximal 真有效解的模糊型最优性条件.

考虑如下的多目标最优化问题：

$$(\mathrm{MOP})\begin{cases}\text{minimize} & \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=(f_1(\boldsymbol{x}),\cdots,f_p(\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}},\\ \text{subject to} & \boldsymbol{x}\in X,\end{cases}$$

其中，X 为 R^n 中的非空子集，$f_i:X\to\mathbf{R}, i=1,2,\cdots,p$. 令 $\boldsymbol{f}(X):=\bigcup_{\boldsymbol{x}\in X}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$.

定义 3.1 $\bar{\boldsymbol{x}}\in X$ 称为(MOP)的有效解，如果

$$\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})\in E[\boldsymbol{f}(X),C];$$

$\bar{\boldsymbol{x}}\in X$ 称为(MOP)的 Benson 真有效解，如果

$$\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})\in \mathrm{Ben}[\boldsymbol{f}(X),C];$$

$\bar{\boldsymbol{x}}\in X$ 称为(MOP)的 Borwein 真有效解，如果

$$\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})\in \mathrm{Bor}[\boldsymbol{f}(X),C];$$

$\bar{\boldsymbol{x}}\in X$ 称为(MOP)的 proximal 真有效解，如果

$$\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})\in \mathrm{Pr}[\boldsymbol{f}(X),C].$$

注 3.1 由文献[12,15]中的定义可知，$\boldsymbol{f}$ 在 X 上是 C-次似凸的当且仅当 $\boldsymbol{f}(X)\,\mathrm{int}\,C$ 凸. $\boldsymbol{f}$ 在 X 上是广义 C-次似凸的当且仅当 $\mathrm{cone}(\boldsymbol{f}(X))+\mathrm{int}\,C$. $\boldsymbol{f}$ 被称为邻近 C-次似凸的，如果 $\mathrm{clcone}(\boldsymbol{f}(X)+C)$ 凸.

若将定理 2.1 和定理 2.2 的结果应用到多目标优化问题中，可得到如下推论.

推论 3.1 假设 $\boldsymbol{f}$ 在 X 上是 C-次似凸的，且 $\boldsymbol{f}(X)$ 是 R^p 中的闭集. 若 $\bar{\boldsymbol{x}}\in X$ 是问题(MOP)的 proximal 真有效解，则 $\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})\in D[\boldsymbol{f}(X),C]$.

推论 3.2 假设 $\boldsymbol{f}$ 在 X 上是 C-次似凸的，$\bar{\boldsymbol{x}}\in X$ 且 $\boldsymbol{f}(X)$ 是 R^p 中的闭集. 则下面的命题等价：(i) $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是问题(MOP)的 Borwein 真有效解；(ii) $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是问题(MOP)的 Benson 真有效解；(iii) $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是问题(MOP)的 proximal 真有效解；(iv) $N(\boldsymbol{f}(X)+C,\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}))\cap(-C^{*0})\neq\varnothing$.

注 3.2 由注 2.3 有，C-次似凸不能减弱为广义 C-次似凸或邻近 C-次似凸.

定义 3.2[17] 令 $\varphi:R^n\to\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ 下半连续，$\boldsymbol{x}\in\mathrm{dom}\,\varphi$. 称 $\boldsymbol{\zeta}\in R^n$ 为 φ 在 $\boldsymbol{x}$ 的 proximal 次微分(P-次微分)，如果

$$(\boldsymbol{\zeta},-1)\in N_P(\mathrm{epi}\,\varphi,(\boldsymbol{x},\varphi(\boldsymbol{x}))).$$

所有 $\boldsymbol{\zeta}$ 之集记作 $\partial_P\varphi(\boldsymbol{x})$，其中，$\mathrm{dom}\,\varphi:=\{\boldsymbol{x}\in R^n:\varphi(\boldsymbol{x})<+\infty\}$，$\mathrm{epi}\,\varphi=\{(\boldsymbol{x},r)\in R^n\times\mathbf{R}:\varphi(\boldsymbol{x})\leqslant r\}$.

引理 3.1[17] 令

$$\varphi_1,\varphi_2:R^n\to\mathbf{R}\cup\{+\infty\},\boldsymbol{x}_0\in\mathrm{dom}\,\varphi_1\cap\mathrm{dom}\,\varphi_2,\boldsymbol{\zeta}\in\partial_P(\varphi_1+\varphi_2)(\boldsymbol{x}_0).$$

假设如下两个条件其中之一成立：

(i) φ_1 和 φ_2 是下半连续的；(ii) φ_1 和 φ_2 中有一个在 $\boldsymbol{x}_0$ 附近是 Lipschitz 的.

则 $\forall\varepsilon>0$，存在 $\boldsymbol{x}_i\in B(\boldsymbol{x}_0;\varepsilon)$ 满足 $|\varphi_i(\boldsymbol{x}_0)-\varphi_i(\boldsymbol{x}_i)|<\varepsilon, i=1,2$，使得

$$\boldsymbol{\zeta}\in\partial_P\varphi_1(\boldsymbol{x}_1)+\partial_P\varphi_2(\boldsymbol{x}_2)+B(\boldsymbol{x}_0;\varepsilon).$$

注 3.3 由引理 3.1，如果假设 φ_1 在 $X\subset R^n$ 中的最小值在 $\boldsymbol{x}_0$ 处取得. 那么 $\forall\varepsilon>0$，存在 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\in B(\boldsymbol{x}_0;\varepsilon)$ 使得

$$\mathbf{0}\in\partial_P\varphi(\boldsymbol{x}_1)+N_P(X,\boldsymbol{x}_2)+\varepsilon B(\boldsymbol{x}_0;\varepsilon).$$

定理 3.1 令 X 为 R^n 中的闭集，$\boldsymbol{f}$ 在 X 上是 C-次似凸的，且 $\boldsymbol{f}(X)$ 是 R^p 中的闭集. 假设 $\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})\in\mathrm{Pr}[\boldsymbol{f}(X),C]$ 且 $\boldsymbol{f}$ 在 X 上是 Lipschitz 的，则存在 $\boldsymbol{\lambda}\in C^{*0}$，$\forall\varepsilon>0$，存在 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\in B(\bar{\boldsymbol{x}};\varepsilon)$ 使得

$$\mathbf{0}\in\partial_P\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1)+N_P(X,\boldsymbol{x}_2)+\varepsilon B(\bar{\boldsymbol{x}};\varepsilon).$$

证明 因 $\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})\in\mathrm{Pr}[\boldsymbol{f}(X),C]$，则由推论 3.1 有 $\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})\in D[\boldsymbol{f}(X),C]$，即，存在 $\boldsymbol{\lambda}\in C^{*0}$ 使得 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是以下问题的最优解：

$$\begin{cases}\text{minimize} & \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),\\ \text{subject to} & \boldsymbol{x}\in X.\end{cases}$$

因 $\boldsymbol{f}$ 在 X 上是 Lipschitz 的，则 $\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 X 上也是 Lipschitz 的.事实上，$\|\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})\|\leqslant\|\boldsymbol{\lambda}\|\cdot\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})\|$.因此，由注 3.3，$\forall\varepsilon>0$，存在 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\in B(\bar{\boldsymbol{x}};\varepsilon)$ 使得

$$\boldsymbol{0}\in\partial_P\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1)+N_P(X,\boldsymbol{x}_2)+\varepsilon B(\bar{\boldsymbol{x}};\varepsilon).$$

推论 3.3　在定理 3.1 的假设下，特别地，令 $C=R_+^p$，则 $\forall\varepsilon>0$，存在 $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p)\in C^{*0}$，$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\in B(\bar{\boldsymbol{x}};\varepsilon)$，$\boldsymbol{x}_{2i+1},\boldsymbol{x}_{2i+2}\in B(\boldsymbol{x}_{2i-1};\varepsilon)$，$i=1,2,\cdots,p-1$，使得

$$\boldsymbol{0}\in\sum_{i=1}^{p-1}\lambda_i\partial_P f_i(\boldsymbol{x}_{2i+2})+\lambda_p\partial_P f_p(\boldsymbol{x}_{2p-1})+\sum_{j=1}^{p-1}\varepsilon B(\boldsymbol{x}_{2j-1},\varepsilon)+\varepsilon B(\bar{\boldsymbol{x}},\varepsilon)+N_P(X,\boldsymbol{x}_2).$$

证明　因 $\boldsymbol{f}$ 在 X 上是 Lipschitz 的，则 $f_i(\boldsymbol{x})$ 在 X 上是 Lipschitz 的，$i=1,2,\cdots,p$.由定理 3.1，对任意固定的 $\varepsilon>0$，存在 $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p)\in C^{*0}$，$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\in B(\bar{\boldsymbol{x}};\varepsilon)$ 使得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{0}&\in\partial_P\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1)+N_P(X,\boldsymbol{x}_2)+\varepsilon B(\bar{\boldsymbol{x}},\varepsilon)=\\&\partial_P(\lambda_1 f_1(\boldsymbol{x}_1)+\lambda_2 f_2(\boldsymbol{x}_1)+\cdots+\lambda_p f_p(\boldsymbol{x}_1))+N_P(X,\boldsymbol{x}_2)+\varepsilon B(\bar{\boldsymbol{x}},\varepsilon).\end{aligned}$$

因此，存在 $\boldsymbol{\xi}_1\in\partial_P(\lambda_1 f_1(\boldsymbol{x}_1)+\lambda_2 f_2(\boldsymbol{x}_1)+\cdots+\lambda_p f_p(\boldsymbol{x}_1))$，$\boldsymbol{\xi}'_1\in N_P(X,\boldsymbol{x}_2)+\varepsilon B(\bar{\boldsymbol{x}},\varepsilon)$ 使得 $\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}'_1=\boldsymbol{0}$.由定理 3.1，对上述 ε，存在 $\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{x}_4\in B(\boldsymbol{x}_1,\varepsilon)$ 使得

$$\boldsymbol{\xi}_1\in\partial_P(\lambda_2 f_2(\boldsymbol{x}_3)+\cdots+\lambda_p f_p(\boldsymbol{x}_3))+\partial_P f_1(\boldsymbol{x}_4)+B(\boldsymbol{x}_1,\varepsilon).$$

因此，存在

$$\boldsymbol{\xi}_2\in\partial_P(\lambda_2 f_2(\boldsymbol{x}_3)+\cdots+\lambda_p f_p(\boldsymbol{x}_3)),\ \boldsymbol{\xi}'_2\in\partial_P f_1(\boldsymbol{x}_4)+B(\boldsymbol{x}_1,\varepsilon)$$

使得 $\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\xi}'_2=\boldsymbol{\xi}_1$.由定理 3.1，对上述 ε，$\boldsymbol{x}_5,\boldsymbol{x}_6\in B(\boldsymbol{x}_3,\varepsilon)$ 使得

$$\boldsymbol{\xi}_2\in\partial_P(\lambda_3 f_3(\boldsymbol{x}_5)+\cdots+\lambda_p f_p(\boldsymbol{x}_5))+\partial_P f_2(\boldsymbol{x}_6)+\varepsilon B(\boldsymbol{x}_3,\varepsilon).$$

依次进行下去，存在 $\boldsymbol{x}_{2p-1},\boldsymbol{x}_{2p}\in B(\boldsymbol{x}_{2p-3},\varepsilon)$ 使得

$$\boldsymbol{\xi}_{p-1}\in\partial_P\lambda_p f_p(\boldsymbol{x}_{2p-1})+\partial_P\lambda_{p-1}f_{p-1}(\boldsymbol{x}_{2p})+\varepsilon B(\boldsymbol{x}_{2p-3},\varepsilon).$$

因此，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{0}&=\boldsymbol{\xi}'_1+\boldsymbol{\xi}'_2+\cdots+\boldsymbol{\xi}'_{p-1}+\boldsymbol{\xi}_{p-1}\in\\&\sum_{i=1}^{p-1}\partial_P\lambda_i f_i(\boldsymbol{x}_{2i+2})+\partial_P\lambda_p f_p(\boldsymbol{x}_{2p-1})+\sum_{j=1}^{p-1}\varepsilon B(\boldsymbol{x}_{2j-1},\varepsilon)+\varepsilon B(\bar{\boldsymbol{x}},\varepsilon)+N_P(X,\boldsymbol{x}_2).\end{aligned}$$

因对 $\forall c>0$，有 $\partial_P c\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=c\partial_P\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 且 $\boldsymbol{\lambda}\in C^{*0}=\operatorname{int}R_+^p$，即 $\lambda_i>0$，$i=1,2,\cdots,p$，从而有

$$\boldsymbol{0}\in\sum_{i=1}^{p-1}\lambda_i\partial_P f_i(\boldsymbol{x}_{2i+2})+\lambda_p\partial_P f_p(\boldsymbol{x}_{2p-1})+\sum_{j=1}^{p-1}\varepsilon B(\boldsymbol{x}_{2j-1},\varepsilon)+\varepsilon B(\bar{\boldsymbol{x}},\varepsilon)+N_P(X,\boldsymbol{x}_2),$$

其中，$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\in B(\bar{\boldsymbol{x}};\varepsilon)$，$\boldsymbol{x}_{2i+1},\boldsymbol{x}_{2i+2}\in B(\boldsymbol{x}_{2i-1};\varepsilon)$，$i=1,2,\cdots,p-1$.

4　结　　论

本文在锥次似凸假设下，得到了多目标优化问题 proximal 真有效解的线性标量化.利用标量化结果证明了 proximal 真有效解与 Benson 真有效解和 Borwein 真有效解在一定条件下的等价性，并通过例子说明锥次似凸不能减弱为广义锥次似凸或邻近锥次似凸.所得结果推广了文献[8]中相应的结果.在接下来的工作中可进一步研究 proximal 真有效解集的稠密性和连通性等性质.

参考文献（References）：

[1]　Koopmans T C. Analysis of production as an efficient combination of activities[C]//Koop-

mans T C, Alchian A, Dantizg G B, Georgescu-Roegen N, Samuelson P A, Tucker A W eds. *Activity Analysis of Production and Allocation Proceedings of a Conference*. New York: John Wiley and Sons, 1951, **13**: 33-97.

[2] Kuhn H W, Tucker A W. Nonlinear programming[C]//*Proceeding of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*. Berkeley, CA: University of California Press, 1951: 481-492.

[3] Geoffrion A M. Proper efficiency and the theory of vector maximization[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1968, **22**(3): 618-630.

[4] Borwein J M. Proper efficient points for maximizations with respect to cones[J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1997, **15**(1): 57-63.

[5] Benson H P. An improved definition of proper efficiency for vector minimization with respect to cones[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1979, **71**(1): 232-241.

[6] Borwein J M, Zhuang D M. Super efficiency in convex vector optimization[J]. *Zeitschrift für Operations Research*, 1991, **35**(3): 175-184.

[7] Borwein J M, Zhuang D M. Super efficiency in vector optimization[J]. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1993, **338**(1): 105-122.

[8] Lalitha C S, Arora R. Proximal proper efficiency for minimisation with respect to normal cones[J]. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 2005, **71**(2): 215-224.

[9] Chen G Y, Rong W D. Characterizations of the Benson proper efficiency for nonconvex vector optimization[J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1998, **98**(2): 365-384.

[10] YANG Xin-min. The equivalency of Borwein proper efficient and Benson proper efficient solutions[J]. *Mathematica Applicata*, 1994, **7**: 246-247.

[11] 彭再云, 李科科, 张石生. 向量 D-η-E-半预不变凸映射与向量优化[J]. 应用数学和力学, 2014, **35**(9): 1020-1032.(PENG Zai-yun, LI Ke-ke, ZHANG Shi-sheng. D-η-E-semipreinvex vector mappings and vector optimization[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, **35**(9): 1020-1032.(in Chinese))

[12] Yang X M, Li D, Wang S Y. Near-subconvexlikeness in vector optimization with set-valued functions[J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2001, **110**(2): 413-427.

[13] Li Z F, Wang S Y. Lagrange multipliers and saddle points in multiobjective programming[J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1994, **83**(1): 63-81.

[14] 赵勇, 彭再云, 张石生. 向量优化问题有效点集的稳定性[J]. 应用数学和力学, 2013, **34**(6): 643-650.(ZHAO Yong, PENG Zai-yun, ZHANG Shi-sheng. Stability of the sets of efficient points of vector-valued optimization problems[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2013, **34**(6): 643-650.(in Chinese))

[15] Yang X M, Yang X Q, Chen G Y. Theorem of the alternative and optimization with set-valued maps[J]. *Journal of Optimization Theory and Application*, 2000, **107**(3): 627-640.

[16] Rockafellar R T. *Convex Analysis*[M]. Princeton: Princeton University Press, 1970.

[17] Clarke F H, Ledyaev Y S, Stern R J, Wolenski P R. *Nonsmooth Analysis and Control Theory*[M]. New York: Springer Verlag, 1998.

[18] Sawaragi Y, Nakayama H, Tanino T. *Theory of Multiobjective Optimization*[M]. New York: Academic Press, 1985.

Optimality Conditions for Proximal Proper Efficiency in Multiobjective Optimization Problems

LI Xiao-yan， GAO Ying

（*College of Mathematics Science*，*Chongqing Normal University*，*Chongqing* 400047，*P.R.China*）

Abstract：First，linear scalarization of the proximal proper efficient points to a closed set was presented under the generalized convexity assumption，and the equivalency among the proximal proper efficiency，Benson proper efficiency and Borwein proper efficiency in multiobjective optimization problems was proved. Second，the optimality conditions for multiobjective optimization problems were obtained through application of these results to the problems. Finally，the fuzzy optimality conditions for the proximal proper efficient solutions were given with the proximal subdifferential.

Key words：proximal normal cone；multiobjective optimization problem；proximal proper efficiency；optimality condition

Foundation item：The National Natural Science Foundation of China（11201511；11271391；11431004）