

# Cosserat 生长弹性杆动力学的 Gauss 最小拘束原理\*

薛 纭<sup>1</sup>, 曲佳乐<sup>1</sup>, 陈立群<sup>2</sup>

(1. 上海应用技术学院 机械工程学院, 上海 201418;

2. 上海大学 理学院 力学系, 上海 200444)

(我刊编委陈立群来稿)

**摘要:** 以自然界中具有生长、变形和运动特征的细长体为背景,用经典力学中的 Gauss 最小拘束原理研究生长弹性杆的动力学建模问题.在为生长弹性杆动力学建模提供新方法的同时,扩大了 Gauss 原理的应用范围,以 Cosserat 弹性杆为对象,分析弹性杆生长和变形的几何规则,表明生长应变和弹性应变是非线性耦合的;本构方程给出了截面的内力与弹性变形的线性关系;利用逆并矢,将经典力学中的 Gauss 原理和 Gauss 最小拘束原理用于生长弹性杆动力学,得到等价的两种表现形式,反映了时间和弧坐标在表述上的对称性,由此导出了封闭的动力学微分方程,给出了两种形式的最小拘束函数,表明生长弹性杆的实际运动使拘束函数取驻值,且为最小值.最后讨论了生长弹性杆的约束与条件极值等问题.

**关键词:** 生长弹性杆动力学; 大变形; Gauss 最小拘束原理; 分析动力学; 逆并矢

**中图分类号:** O316      **文献标志码:** A

**doi:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2015.07.003

## 引 言

弹性杆力学具有广泛的工程背景,宏观的如电缆、钻杆和输油气管道,以及植物的枝、藤和根等,微观的有细菌纤维、脱氧核糖核酸(DNA)等生物大分子链,都以弹性杆为力学模型研究其位形<sup>[1-4]</sup>.经典的弹性杆力学在引入了超细长性后,产生了大位移、自接触等问题,导致严重的几何非线性.再考虑生长,从而形成运动、变形和生长非线性耦合的动力学,使得动力学建模和分析,以及数值计算都存在困难.基于 Kirchhoff 动力学比拟思想建立的弹性杆动力学的分析力学方法,开辟了建模和分析的新途径.薛纭,刘延柱,陈立群等已经把分析力学方法移植到弹性杆力学,形成 Cosserat 弹性杆动力学的分析力学方法<sup>[5-8]</sup>.

在分析力学中, Gauss 原理居于重要的地位<sup>[9-11]</sup>,除了导出动力学方程外,还具有极值性质,得到了广泛的应用<sup>[12-14]</sup>.对于 Kirchhoff 弹性杆,动力学的 Gauss 原理表明其在逻辑上更为简洁<sup>[7]</sup>.刘延柱和薛纭利用刚体的拘束公式列写微段杆的拘束函数的微分,得到积分形式的拘束函数<sup>[15]</sup>.本文将 Gauss 原理用于中心线存在应变以及具有生长特性的弹性杆动力学建模.通

\* 收稿日期: 2015-03-16; 修订日期: 2015-06-09

基金项目: 国家自然科学基金(11372195; 10972143)

作者简介: 薛纭(1956—),男,上海人,教授,博士,硕士生导师(通讯作者. E-mail: xy@sit.edu.cn).

过定义惯量并矢以及刚度并矢的逆,改进了在文献[7]中的表达.

运动、变形以及生长的耦合是物体存在的一般形式,其中生长现象在几何上也包括物体的热胀冷缩现象.生长是物体体积和质量随时间的增大,还包括物理性质的改变,但不是力作用的结果<sup>[16-17]</sup>.因此,它既不同于经典力学中的变质量问题,也不同于固体的变形问题.生物学和植物学意义上的生长速度要比运动和变形慢得多,因此可以不计其随时间的变化率;对于生长弹性杆的动力学,仍在慢生长的前提下讨论而不计物理参数的时间变化率.

生长弹性杆动力学研究已有文献报道.文献[16,18]用矢量力学方法讨论了生长弹性直杆和圆环在弹性基础上的屈曲,其中生长是按指数规律生长;文献[19]以顶端生长弹性杆为模型讨论了攀爬植物的攀爬现象.

生长的几何规律独立于力学定律.描述生长规律的有 Lockhart-Ortega-Cosgrove 模型,线应变服从 Hooke 定律,且应力的时间导数为 0,于是,线应变的时间导数亦为 0<sup>[20-21]</sup>.还有 Goodwin 模型和 Stein 模型<sup>[22-23]</sup>等.

本文在给定生长规律的基础上,用 Gauss 原理讨论生长弹性杆的动力学建模问题,旨在为分析和数值计算提供方法.

## 1 弹性杆的变形和生长的几何规则

### 1.1 生长弹性杆的位形

设杆的弹性变形和生长的几何规则仍服从刚性截面假定<sup>[1,5]</sup>.区分生长弹性杆的 3 种位形.一是原始位形,即无外力作用、且为生长初始时刻的位形,此时弹性杆中心线的弧坐标为原始弧坐标,记为  $s^0$ ;二是参考位形,即无外力作用时的自然生长状态,此时弹性杆中心线的弧坐标称为参考弧坐标,记为

$$s = (s^0, t), s|_{t=0} = s^0, \quad (1)$$

其中时间  $t$  为生长自变量,式(1)由生长规律确定;三是实时位形,即在外力作用下的实际位形,弧坐标记为  $s^e = s^e(s, t)$ ,其中时间  $t$  为运动自变量,这表明弹性变形与生长是耦合的.设弹性杆 3 种位形下与截面固结、沿主轴的方向子依次为  $(\mathbf{e}_1^0(s^0), \mathbf{e}_2^0(s^0), \mathbf{e}_3^0(s^0))$ ,  $(\mathbf{e}_1^e(s), \mathbf{e}_2^e(s), \mathbf{e}_3^e(s))$ ,  $(\mathbf{e}_1(s^e, t), \mathbf{e}_2(s^e, t), \mathbf{e}_3(s^e, t))$ ,其中  $\mathbf{e}_3^0(s^0), \mathbf{e}_3^e(s)$  重合,为截面的法向量且沿中心线的切线,并且当  $t = 0$  时  $s = s^0, \mathbf{e}_i^0(s^0) = \mathbf{e}_i^e(s); \mathbf{e}_3(s^e)$  为截面的法向量;当无外力作用时有  $s^e = s$ ,以及  $\mathbf{e}_i^e(s) = \mathbf{e}_i(s^e) (i = 1, 2, 3)$ .

值得注意的是,参考弧坐标在生长弹性杆动力学中居重要地位.它既是时间的函数,显示其生长特性,又作为独立变量描述弹性变形.本文对变量  $s$  的导数记为  $\partial_s$ ,或  $\partial/\partial s$ ;将  $s$  作为独立变量对时间  $t$  的导数记为  $\partial/\partial t$ ,或记为  $\partial_t$ .于是,将生长弧坐标和时间作为实时位形方向子的自变量,即  $(\mathbf{e}_1(s, t), \mathbf{e}_2(s, t), \mathbf{e}_3(s, t))$ .

### 1.2 生长弹性杆中心线的应变、截面的弯扭度和角速度

弹性杆中心线的总应变  $\boldsymbol{\varepsilon}$  为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \partial_{s^0} s^e - 1, \quad (2)$$

其中包含的弹性应变  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$  和生长应变  $\boldsymbol{\varepsilon}^g$  分别为

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \partial_s s^e - 1, \boldsymbol{\varepsilon}^g = \partial_{s^0} s - 1. \quad (3)$$

这里弹性应变  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$  是小量;而当  $\partial_{s^0} s = 1$  时,生长应变  $\boldsymbol{\varepsilon}^g$  为 0,否则其大小与时间有关,当时间足够长时可成为有限量.根据复合函数的求导规则,式(2)可写作

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^g + \boldsymbol{\varepsilon}^e \boldsymbol{\varepsilon}^g. \quad (4)$$

可见弹性变形和生长是非线性耦合的,但不是未知函数的耦合。

用 Cosserat 方向子  $\boldsymbol{e}_i(s, t)$  ( $i = 1, 2, 3$ ), 分别以 3 种弧坐标  $s^0, s, s^e$  为基准, 截面的弯扭度表示为

$$\boldsymbol{\omega}_{s^0} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \boldsymbol{e}_i \times \partial_{s^0} \boldsymbol{e}_i, \quad \boldsymbol{\omega}_s = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \boldsymbol{e}_i \times \partial_s \boldsymbol{e}_i, \quad \boldsymbol{\omega}_{s^e} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \boldsymbol{e}_i \times \partial_{s^e} \boldsymbol{e}_i. \quad (5)$$

其在主轴基上的投影都可以用截面的姿态坐标及其对弧坐标的导数表达。

设原长为  $\Delta s^0$  的微段杆, 两端面随弧坐标的角位移矢量为  $\Delta \boldsymbol{\Phi}^0$ ; 在  $t$  时刻经历  $\Delta t$  时间间隔, 弧长生长为

$$\Delta s = s(s^0 + \Delta s^0, t + \Delta t) - s(s^0, t) = (\partial_{s^0}) \Delta s^0 + (\partial_t s) \Delta t. \quad (6)$$

两端面的角位移矢量的增量为  $\Delta \boldsymbol{\Phi}^g$ , 截面的生长角速度为

$$\boldsymbol{\Omega}^g(s, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \boldsymbol{\Phi}^g}{\Delta t}, \quad (7)$$

也可以用 Cosserat 方向子表示为

$$\boldsymbol{\Omega}^g = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^3 \boldsymbol{e}_i^g \times \partial_s \boldsymbol{e}_i^g \right) \partial_t s = (\partial_t s) \boldsymbol{\omega}_s^g, \quad (8)$$

其中

$$\boldsymbol{\omega}_s^g = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^3 \boldsymbol{e}_i^g \times \partial_s \boldsymbol{e}_i^g \right) \quad (9)$$

为参考位形的弯扭度。 $\boldsymbol{\Omega}^g$  既是因生长导致截面随时间转动的角速度, 同时也形成随弧坐标转动的弯扭度, 即

$$\boldsymbol{\omega}_s^g \Delta s = \boldsymbol{\Omega}^g \Delta t. \quad (10)$$

截面的角速度表示为

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \boldsymbol{e}_i \times \partial_t \boldsymbol{e}_i = (\partial_t s) \boldsymbol{\omega}_s + \frac{\partial s^e}{\partial t} \boldsymbol{\omega}_{s^e} + \boldsymbol{\Omega}^r, \quad (11)$$

其中

$$\boldsymbol{\Omega}^g = \boldsymbol{\omega}_s \partial_t s, \quad \boldsymbol{\Omega}^e = \frac{\partial s^e}{\partial t} \boldsymbol{\omega}_{s^e}, \quad \boldsymbol{\Omega}^r = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \boldsymbol{e}_i \times \frac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial t} \quad (12)$$

分别为截面生长角速度、弹性变形角速度以及刚体运动角速度。故有弹性杆截面的角速度等于生长角速度和弹性变形角速度以及刚体运动角速度的矢量和, 通常前两者为小量。

### 1.3 弯扭度和角速度的相容条件

生长弹性杆截面的弯扭度  $\boldsymbol{\omega}_s$  和角速度  $\boldsymbol{\Omega}$  不是独立的, 要满足相容条件。

设与截面固结的任意矢量为  $\boldsymbol{e}(s^0, t)$ , 弯扭度  $\boldsymbol{\omega}$  和角速度  $\boldsymbol{\Omega}$  满足

$$\partial_s \boldsymbol{e} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}, \quad (13)$$

$$\partial_t \boldsymbol{e} = \frac{\partial \boldsymbol{e}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{e}}{\partial s} \partial_t s = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{e}, \quad (14)$$

或

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}}{\partial t} = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{e} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e} \partial_t s. \quad (15)$$

将式(13)和(14)分别对时间和参考弧坐标求导数, 注意到式(15), 得到

$$\frac{\partial}{\partial t} \partial_s \mathbf{e} = \frac{\partial}{\partial t} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}) = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} \times \mathbf{e} + \boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{e} - (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}) \partial_t s],$$

$$\partial_s \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} = \partial_s \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{e} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}) - \partial_s \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e} \partial_t s - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}) \partial_t s - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e} \partial_s (\partial_t s).$$

对独立变量  $s, t$  的偏导次序可以交换, 根据  $\partial_s \partial_t \mathbf{e} = \partial_t \partial_s \mathbf{e}$ , 并注意到三重矢积恒等式, 导出

$$\left( \partial_s \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\omega} - \partial_s \boldsymbol{\omega} \partial_t s - \boldsymbol{\omega} \partial_s (\partial_t s) - \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} \right) \times \mathbf{e} = \mathbf{0}. \quad (16)$$

因矢量  $\mathbf{e}$  是任意的, 有

$$\partial_s \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\omega} - \partial_s \boldsymbol{\omega} \partial_t s - \boldsymbol{\omega} \partial_s (\partial_t s) - \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \mathbf{0}. \quad (17)$$

注意到

$$\partial_t \boldsymbol{\omega} = \partial_s \boldsymbol{\omega} \partial_t s + \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t}, \quad (18)$$

式(17)化作

$$\tilde{\partial}_t \boldsymbol{\omega} = \tilde{\partial}_s \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega} \partial_s (\partial_t s) - \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\omega}. \quad (19)$$

这就是生长弹性杆的变形协调关系, 当生长停止时,  $\partial_t s = 0$ , 成为无生长时的变形协调关系<sup>[8]</sup>, 原始弧坐标成为参考弧坐标,

$$\partial_s \boldsymbol{\Omega} = \tilde{\partial}_t \boldsymbol{\omega}_s \text{ or } \partial_t \boldsymbol{\omega}_s = \tilde{\partial}_s \boldsymbol{\Omega}, \quad (20)$$

式中波浪号“~”表示相对截面主轴坐标系的导数。

#### 1.4 中心线微分方程

设生长保持截面法线与中心线一致, 考察截面形心的应变, 从图 1 可以看到, 存在以下关系:

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{e}_3 \Delta s + \Delta \mathbf{w}^e,$$

其中  $\Delta \mathbf{w}^e$  为中心线的弹性变形造成截面形心的位移, 将上式除以  $\Delta s$ , 并令  $\Delta s \rightarrow 0$ , 导出

$$\partial_s \mathbf{r} = \mathbf{e}_3 + \boldsymbol{\gamma}_s^e, \quad (21)$$

其中  $\boldsymbol{\gamma}_s^e = \partial_s \mathbf{w}^e$  为中心线上一点的弹性应变, 表征因弹性变形导致截面随弧坐标平移的“速率”, 其主轴分量为  $\gamma_{si}^e = \boldsymbol{\gamma}_s^e \cdot \mathbf{e}_i, i = 1, 2, 3$ .  $\gamma_{si}^e$  的力学意义是:  $\gamma_{s1}^e, \gamma_{s2}^e$  为沿主轴  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  的剪应变,  $\gamma_{s3}^e$  为沿主轴  $\mathbf{e}_3$  的拉/压应变, 即  $\varepsilon^e = \gamma_{s3}^e$ .

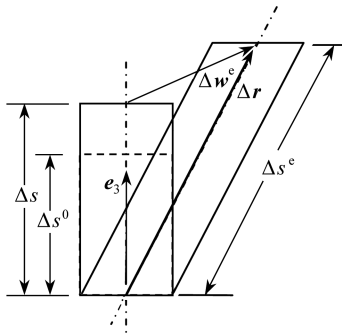


图 1 微段杆的拉/压和剪切变形以及生长

Fig. 1 Axial and shear deformations of the differential element of a growing rod

式(21)就是变形-生长耦合的弹性杆中心线的微分方程, 表明了变形-生长的几何规则. 当

取  $\boldsymbol{\gamma}_s^e = \mathbf{0}$  时,即为生长弹性杆的 Kirchhoff 模型.

中心线对截面法线的偏离,导致与中心线垂直的截面与讨论的截面形状的改变.式(21)可写作

$$\frac{\partial s^e}{\partial s} \partial_{s^e} \mathbf{r} = \mathbf{e}_3 + \boldsymbol{\gamma}_s^e, \quad (22)$$

与截面的法向量  $\mathbf{e}_3$  作数量积,注意到式(3),导出

$$(\boldsymbol{\varepsilon}^e + 1) \cos \phi = 1 + \boldsymbol{\varepsilon}_3^e, \quad (23)$$

其中  $\phi$  为中心线对截面法线的偏角.解得

$$\cos \phi = \frac{1 + \boldsymbol{\varepsilon}_3^e}{1 + \boldsymbol{\varepsilon}^e} = \frac{1 + \boldsymbol{\varepsilon}_3^e}{1 + \sqrt{(\boldsymbol{\varepsilon}_1^e)^2 + (\boldsymbol{\varepsilon}_2^e)^2 + (\boldsymbol{\varepsilon}_3^e)^2}}. \quad (24)$$

当忽略剪应变  $\boldsymbol{\varepsilon}_1^e, \boldsymbol{\varepsilon}_2^e$  时,由上式得  $\phi = 0$ ,再次表明剪应变  $\boldsymbol{\varepsilon}_1^e, \boldsymbol{\varepsilon}_2^e$  是产生  $\phi$  角的原因.

## 2 生长弹性杆的本构方程

生长弹性杆的位形取决于生长模式和力的作用方式,后者通过本构方程影响弹性杆的变形.生长模式就是指式(1)和(7)的具体形式.

设外力仅产生弹性变形且服从 Hooke 定律,因此,应变要求以参考弧坐标  $s$  为基准.本构方程用主轴分量表示为

$$F_i = K_i(\boldsymbol{\gamma}_{si} - \boldsymbol{\gamma}_{si}^g), M_i = B_i(\boldsymbol{\omega}_{si} - \boldsymbol{\omega}_{si}^g - \boldsymbol{\omega}_{si}^0) \quad (i = 1, 2, 3), \quad (25)$$

式中  $K_1, K_2$  和  $B_1, B_2$  为关于主轴  $x, y$  的抗剪刚度和抗弯刚度,  $K_3, B_3$  为关于主轴  $z$  的抗拉/压刚度和抗扭刚度,皆为时间的慢变函数,是生长在弹性杆物理性质上的体现,本文忽略其对时间和弧坐标的变化率;  $\boldsymbol{\gamma}_{si}, \boldsymbol{\gamma}_{si}^g, \boldsymbol{\omega}_{si}, \boldsymbol{\omega}_{si}^g$  分别为实时位形和参考位形中心线的应变和弯扭度,本文取  $\boldsymbol{\gamma}_{s1}^g = \boldsymbol{\gamma}_{s2}^g = 0, \boldsymbol{\gamma}_{s3}^g = \boldsymbol{\varepsilon}^g$ .式(25)也可化作

$$F_i = K_i \boldsymbol{\gamma}_{si}^e, M_i = B_i \boldsymbol{\omega}_{si}^e \quad (i = 1, 2, 3), \quad (26)$$

其中  $\boldsymbol{\gamma}_{si}^e, \boldsymbol{\omega}_{si}^e$  为弹性变形引起的应变和弯扭度分量.写作矢量形式:

$$\mathbf{F} = \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\gamma}_s^e, \mathbf{M} = \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega}_s^e, \quad (27)$$

其中  $\mathbf{K}, \mathbf{B}$  分别为关于  $\boldsymbol{\gamma}_s^e, \boldsymbol{\omega}_s^e$  的刚度并矢.

## 3 生长弹性杆动力学的 Gauss 变分及其截面的虚位移

以生长弹性杆的截面为对象,设惯性坐标系  $O-\xi\eta\zeta$ ,基矢量列阵  $\mathbf{e}^I = (\mathbf{e}_\xi \ \mathbf{e}_\eta \ \mathbf{e}_\zeta)^T$ ; 截面位形用姿态坐标  $(q_1, q_2, q_3)$  和形心位置矢量  $\mathbf{r}(q_4, q_5, q_6)$  给定.因生长弹性杆动力学存在时间和参考弧坐标两个独立自变量,有两种形式定义 Gauss 变分,分别用记号  $\delta_{Gt}, \delta_{Gs}$  表示,即

(i)  $\delta_{Gt} \ddot{q}_i \neq 0$ , 其余变分均为 0, 即  $\delta_{Gt} s = 0, \delta_{Gt} \dot{s} = 0, \delta_{Gt} \ddot{s} = 0, \delta_{Gt} t = 0, \delta_{Gt} q_i = 0, \delta_{Gt} q_i' = 0, \delta_{Gt} \dot{q}_i = 0, \delta_{Gt} \dot{q}_i' = 0, \delta_{Gt} q_i'' = 0$ ;

(ii)  $\delta_{Gs} q_i'' \neq 0$ , 其余变分均为 0, 即  $\delta_{Gs} s = 0, \delta_{Gs} \dot{s} = 0, \delta_{Gs} \ddot{s} = 0, \delta_{Gs} t = 0, \delta_{Gs} q_i = 0, \delta_{Gs} q_i' = 0, \delta_{Gs} \dot{q}_i = 0, \delta_{Gs} \dot{q}_i' = 0, \delta_{Gs} \ddot{q}_i = 0$ ,

其中  $i = 1, 2, \dots, 6, q_i$  上面的撇号“'”表示对参考弧坐标  $s$  的导数,点号“·”表示对时间  $t$  的导数.对于定义(i)和(ii),有

$$\delta_{Gt} \ddot{q}_i = \delta_{Gt} \frac{\partial^2 q_i}{\partial t^2}, \delta_{Gs} q_i'' = \delta_{Gs} \partial_s^2 q_i, \quad (28)$$

由此导致截面在加速度空间中两种平行的虚位移

$$\delta_{G_s} \mathbf{r}'' = \sum_{i=4}^6 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \delta_{G_s} q_i'', \quad \delta_{G_s} \boldsymbol{\omega}' = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \boldsymbol{\omega}'}{\partial q_i''} \delta_{G_s} q_i'' = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial q_i'} \delta_{G_s} q_i'', \quad (29)$$

$$\delta_{G_t} \ddot{\mathbf{r}} = \sum_{i=4}^6 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \delta_{G_t} \ddot{q}_i, \quad \delta_{G_t} \dot{\boldsymbol{\Omega}} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \dot{\boldsymbol{\Omega}}}{\partial \dot{q}_i} \delta_{G_t} \dot{q}_i = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial \dot{q}_i} \delta_{G_t} \dot{q}_i, \quad (30)$$

其中用到关系式  $\partial \mathbf{r}'' / \partial q_i'' = \partial \ddot{\mathbf{r}} / \partial \dot{q}_i = \partial \mathbf{r} / \partial q_i$ ,  $\partial \dot{\boldsymbol{\Omega}} / \partial \dot{q}_i = \partial \boldsymbol{\omega}' / \partial q_i'' = \partial \boldsymbol{\Omega} / \partial \dot{q}_i = \partial \boldsymbol{\omega} / \partial q_i'$ . 虚位移的全体  $\delta_{G_s} q_i''$  或  $\delta_{G_t} \dot{q}_i$ , 形成弹性杆在加速度空间中的虚位形, 实际位形是其中之一.

## 4 Gauss 最小拘束原理

在任意时刻, 取参考弧长为  $\Delta s$  的微段杆为对象, 其上所有的作用力基于 Gauss 变分定义 (i) 下的“虚功率”为

$$\delta_{G_t} W = [\partial_s(\mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\gamma}_s^e) - \rho \partial_t^2 \mathbf{r} + \mathbf{f}] \cdot \delta_{G_t} \ddot{\mathbf{r}} + [\partial_s(\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega}_s^e) + \partial_s \mathbf{r} \times (\mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\gamma}_s^e) - \partial_t(\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\Omega}) + \mathbf{m}] \cdot \delta_{G_t} \dot{\boldsymbol{\Omega}}, \quad (31)$$

其中用到理想约束条件

$$\mathbf{f}^c \cdot \delta_{G_t} \ddot{\mathbf{r}} + \mathbf{m}^c \cdot \delta_{G_t} \dot{\boldsymbol{\Omega}} = \mathbf{0}; \quad (32)$$

在定义(ii)下的“虚功率”为

$$\delta_{G_s} W = [\partial_s(\mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\gamma}_s^e) - \rho \partial_t^2 \mathbf{r} + \mathbf{f}] \cdot \delta_{G_s} \mathbf{r}'' + [\partial_s(\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega}_s^e) + \partial_s \mathbf{r} \times (\mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\gamma}_s^e) - \partial_t(\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\Omega}) + \mathbf{m}] \cdot \delta_{G_s} \boldsymbol{\omega}_s', \quad (33)$$

其中用到理想约束条件为

$$\mathbf{f}^c \cdot \delta_{G_s} \mathbf{r}'' + \mathbf{m}^c \cdot \delta_{G_s} \boldsymbol{\omega}_s' = \mathbf{0}, \quad (34)$$

式中  $\rho$  为杆沿中心线的密度,  $\mathbf{J}$  为截面的惯量并矢, 在主轴坐标系下的坐标阵为  $\mathbf{J} = \text{diag}(J_1 \quad J_2 \quad J_3)$ , 这里  $J_i = \rho I_i / A$ ,  $A$  为截面积,  $I_1, I_2$  为截面对主轴  $x, y$  的惯性矩,  $I_3$  为对  $z$  轴的极惯性矩, 且有  $I_3 = I_1 + I_2$ , 设这些物理和几何参数皆为时间的函数, 本文忽略其变化率. 设杆上作用有沿中心线的连续分布的主动力  $\mathbf{f}(s, t)$  和力偶  $\mathbf{m}(s, t)$  以及约束力  $\mathbf{f}^c(s, t)$  和约束力偶  $\mathbf{m}^c(s, t)$ . 我们有

**生长弹性杆动力学的 Gauss 原理** 受理想双面约束的生长弹性杆, 其实际状态不同于状态相同的其它运动学上的可能状态仅在于真实状态对于截面任意的虚位移 (29) 有

$$\delta_{G_t} W = 0, \quad (35)$$

或对于虚位移 (30) 有

$$\delta_{G_s} W = 0. \quad (36)$$

当加速度空间中的虚位移都是独立的时, 可以导出生长弹性杆动力学的运动微分方程:

$$\begin{cases} \partial_s(\mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\gamma}_s^e) - \rho \partial_t^2 \mathbf{r} + \mathbf{f} = \mathbf{0}, \\ \partial_s(\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega}_s^e) + \partial_s \mathbf{r} \times (\mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\gamma}_s^e) - \partial_t(\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\Omega}) + \mathbf{m} = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (37)$$

因弯扭度和角速度, 以及形心应变变矢都可以表示成截面形心和姿态坐标的函数, 因此式 (37) 含有 6 个未知函数, 方程组封闭.

式 (31) 和 (33) 都可写做泛函  $Z_t$  和  $Z_s$  的变分. 注意到惯量并矢  $\mathbf{J}$  和刚度并矢  $\mathbf{K}, \mathbf{B}$  的坐标阵都是非奇异的, 泛函定义为

$$Z_t = \frac{1}{2} \rho [\rho^{-1} \partial_s(\mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\gamma}_s^e) - \ddot{\mathbf{r}} + \rho^{-1} \mathbf{f}]^2 +$$

$$\frac{1}{2}[\mathbf{J} \cdot (\mathbf{J}^{-1} \cdot \mathbf{Y} - \dot{\mathbf{Q}})] \cdot (\mathbf{J}^{-1} \cdot \mathbf{Y} - \dot{\mathbf{Q}}), \quad (38)$$

其中  $\mathbf{Y} = \partial_s(\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega}_s^e) + \partial_s \mathbf{r} \times (\mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\gamma}_s^e) - \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\Omega}) - \mathbf{m}$ .

$$\begin{aligned} Z_s = & \frac{1}{2}[\mathbf{K} \cdot (\partial_s \boldsymbol{\gamma}_s^e + \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{X}_1)] \cdot (\partial_s \boldsymbol{\gamma}_s^e + \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{X}_1) + \\ & \frac{1}{2}[\mathbf{B} \cdot (\partial_s \boldsymbol{\omega}_s^e + \mathbf{B}^{-1} \mathbf{X}_2)] \cdot (\partial_s \boldsymbol{\omega}_s^e + \mathbf{B}^{-1} \mathbf{X}_2), \end{aligned} \quad (39)$$

其中

$\mathbf{X}_1 = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\gamma}_s^e) - \rho \partial_t^2 \mathbf{r} + \mathbf{f}$ ,  $\mathbf{X}_2 = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega}_s^e) + \partial_s \mathbf{r} \times (\mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\gamma}_s^e) - \partial_t(\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\Omega}) + \mathbf{m}$ ;  
 $\mathbf{J}^{-1}$ ,  $\mathbf{K}^{-1}$ ,  $\mathbf{B}^{-1}$  为逆并矢. 定义中用到了关系  $\delta_{G_s} \boldsymbol{\omega}_s^e = \delta_{G_s} \boldsymbol{\omega}_s^{e'}$ . 泛函  $Z_t$  和  $Z_s$  称为生长弹性杆动力学的拘束函数.

**生长弹性杆动力学的 Gauss 最小拘束原理** 受理想双面约束的生长弹性杆, 其实际状态不同于状态相同的其它运动学上的可能状态, 仅在于真实状态使拘束函数的 Gauss 变分为 0:

$$\delta_{G_t} Z_t = 0 \quad (40)$$

或

$$\delta_{G_s} Z_s = 0. \quad (41)$$

可以证明, 真实状态使拘束函数取极小值.

在 Gauss 变分定义(i)下, 拘束函数  $Z_t$  的增量为

$$\begin{aligned} \Delta Z_t = & \frac{1}{2} \rho (\Delta \dot{\mathbf{r}})^2 + \frac{1}{2} (\mathbf{J} \cdot \Delta \dot{\mathbf{Q}}) \cdot \Delta \dot{\mathbf{Q}} - \\ & [\partial_s(\mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\gamma}_s^e) - \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{f}] \cdot \Delta \dot{\mathbf{r}} - [\mathbf{J} \cdot (\mathbf{J}^{-1} \cdot \mathbf{Y} - \dot{\mathbf{Q}})] \cdot \Delta \dot{\mathbf{Q}}. \end{aligned} \quad (42)$$

真实运动满足式(37), 式(42)成为

$$\Delta Z_t = \frac{1}{2} \rho (\Delta \dot{\mathbf{r}})^2 + \frac{1}{2} (\mathbf{J} \cdot \Delta \dot{\mathbf{Q}}) \cdot \Delta \dot{\mathbf{Q}} > 0, \quad (43)$$

表明对真实运动, 拘束函数  $Z_t$  取极小值.

在 Gauss 变分定义(ii)下, 拘束函数  $Z_s$  的增量为

$$\begin{aligned} \Delta Z_s = & \frac{1}{2} (\mathbf{K} \cdot \Delta \partial_s \boldsymbol{\gamma}_s^e) \cdot \Delta \partial_s \boldsymbol{\gamma}_s^e + \frac{1}{2} (\mathbf{B} \cdot \Delta \partial_s \boldsymbol{\omega}_s^e) \cdot \Delta \partial_s \boldsymbol{\omega}_s^e + \\ & [\mathbf{K} \cdot (\partial_s \boldsymbol{\gamma}_s^e + \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{X}_1)] \cdot \Delta \partial_s \boldsymbol{\gamma}_s^e + [\mathbf{B} \cdot (\partial_s \boldsymbol{\omega}_s^e + \mathbf{B}^{-1} \mathbf{X}_2)] \cdot \Delta \partial_s \boldsymbol{\omega}_s^e. \end{aligned} \quad (44)$$

真实运动满足式(37), 式(44)成为

$$\Delta Z_s = \frac{1}{2} (\mathbf{K} \cdot \Delta \partial_s \boldsymbol{\gamma}_s^e) \cdot \Delta \partial_s \boldsymbol{\gamma}_s^e + \frac{1}{2} (\mathbf{B} \cdot \Delta \partial_s \boldsymbol{\omega}_s^e) \cdot \Delta \partial_s \boldsymbol{\omega}_s^e > 0, \quad (45)$$

表明对真实运动, 拘束函数  $Z_s$  取极小值.

对于弹性杆的平衡问题, 可看做动力学的特例处理, 此时只要令拘束函数  $Z_s$  中的加速度项为 0 即可.

## 5 生长弹性杆的约束与条件极值

自然界和工程中的生长弹性杆一般还受到约束. 式(35)或(36)中的加速度空间虚位移一般不独立, 因此, 不能得到形如式(37)的运动微分方程. 但是, 式(40)或(41)仍然成立. 因此, 约束生长弹性杆的真实运动就是求解式(40)或(41)的条件极值问题. 根据具体的约束形式讨

论约束条件,下面按照弧坐标分类叙述.

1) **全程约束** 即在原始弧长和时间的定义域内都存在如下函数独立的约束:

$$g_k(q_i, q'_i, \dot{q}_i, t) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n \leq 6). \quad (46)$$

考虑到截面的自由度,当  $n = 6$  时,弹性杆的运动和变形已经完全给定.当关于  $q'_i$ (或  $\dot{q}_i$ ) 不可积分时为非完整约束;当可积或不含  $q'_i$  和  $\dot{q}_i$  时为几何约束,如限制在光滑曲面上的弹性杆就属于这类约束.

2) **截面约束** 即指定弹性杆的某一截面的运动是给定的.约束条件(46)只在原始弧坐标的指定截面  $s^0 = s^0_*$  处成立.特殊情形是弹性杆的一端或两端受到约束.

3) **接触约束** 这是接触点预先未知的单面约束,有自身接触和与外界接触两种.因此,在根据式(40)或(41)进行极值计算时,接触或嵌入的解都是无效的.两者都破坏了边界条件,后者物理上不可实现.

对于圆截面杆,不自身嵌入条件是对于弧坐标相距  $s_i - s_j = \pi d/2$  以外的点,要求  $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| > d$ .弹性杆的侧面方程为  $\mathbf{R} = \mathbf{r} + x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2$ ,其中  $(x_1, x_2)$  是截面的边界点集.在惯性空间中障碍物构成的点集为  $\mathbf{D} = \{(\xi, \eta, \zeta) \mid |g(\xi, \eta, \zeta, t)| \leq 0\}$ .弹性杆不接触或不嵌入障碍物的条件是  $\mathbf{R} \notin \mathbf{D}$ .

当弹性杆自接触或与外界接触时,都将改变弹性杆受力和定解条件.因此,应该分段计算.

## 6 结 语

本文通过对 Cosserat 生长弹性杆的大变形、生长耦合的几何分析,明确了变形和生长的基本概念,在定义弯扭度和角速度的基础上给出了两者的相容条件;导出了中心线的微分方程以及本构方程.分别在关于时间和参考弧坐标的广义加速度空间上定义虚位移,即 Gauss 变分,建立生长弹性杆动力学的 Gauss 原理,并导出了其动力学方程;用本文定义的逆并矢,建立了拘束函数,给出了 Gauss 最小拘束原理.讨论了约束弹性杆的约束和接触约束,指出生长弹性杆位形的动力学求解在数学上是条件极值问题,为用分析力学的理论和方法分析生长弹性杆动力学提供了基础.

## 参考文献 (References):

- [1] 刘延柱. 弹性细杆的非线性力学——DNA 力学模型的理论基础[M]. 北京: 清华大学出版社, Springer, 2006: 14, 32. (LIU Yan-zhu. *Nonlinear Mechanics of Thin Elastic Rod—Theoretical Basis of Mechanical Model of DNA*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, Springer, 2006: 14, 32. (in Chinese))
- [2] 刘延柱. 弹性杆基因模型的力学问题[J]. 力学与实践, 2003, 25(1): 1-5. (LIU Yan-zhu. Mechanical problems on elastic rod model of DNA[J]. *Mechanics in Engineering*, 2003, 25(1): 1-5. (in Chinese))
- [3] 马拉森斯基 乔治 M. 分子生物学精要[M]. 第4版. 魏群, 译. 北京: 化学工业出版社, 2005: 59. (Malacinski George M. *Essentials of Molecular Biology*[M]. 4th ed. WEI Qun, transl. Beijing: Chemical Industry Press, 2005: 59. (Chinese version))
- [4] CAO Deng-qing, Tucker R W. Nonlinear dynamics of elastic rods using the Cosserat theory: modelling and simulation[J]. *International Journal of Solids and Structure*, 2008, 45(2): 460-470.
- [5] 薛纭, 刘延柱, 陈立群. 超细长弹性杆的分析力学问题[J]. 力学学报, 2005, 37(4): 485-493.



- (XUE Yun, LIU Yan-zhu, CHEN Li-qun. On analytical mechanics for a super-thin elastic rod [J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2005, **37**(4): 485-493. (in Chinese))
- [6] 薛纭, 刘延柱, 陈立群. Kirchhoff 弹性杆动力学建模的分析力学方法[J]. 物理学报, 2006, **55**(8): 3845-3851. (XUE Yun, LIU Yan-zhu, CHEN Li-qun. Methods of analytical mechanics for dynamics of the Kirchhoff elastic rod[J]. *Acta Physica Sinica*, 2006, **55**(8): 3845-3851. (in Chinese))
- [7] 薛纭, 翁德玮. 超细长弹性杆动力学的 Gauss 原理[J]. 物理学报, 2009, **58**(1): 34. (XUE Yun, WENG De-wei. Gauss principle for a super-thin elastic rod dynamics[J]. *Acta Physica Sinica*, 2009, **58**(1): 34. (in Chinese))
- [8] 薛纭, 翁德玮, 陈立群. 精确 Cosserat 弹性杆动力学的分析力学方法[J]. 物理学报, 2013, **62**(4): 044601. (XUE Yun, WENG De-wei, CHEN Li-qun. Methods of analytical mechanics for exact Cosserat elastic rod dynamic[J]. *Acta Physica Sinica*, 2013, **62**(4): 044601. (in Chinese))
- [9] 梅凤翔. 分析力学(下卷)[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 2013: 621. (MEI Feng-xiang. *Analytical Mechanics*(II)[M]. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 2013: 621. (in Chinese))
- [10] 陈滨. 分析动力学[M]. 北京: 北京大学出版社, 2012: 288. (CHEN Bin. *Analytical Dynamics* [M]. Beijing: Peking University Press, 2012: 288. (in Chinese))
- [11] 刘延柱. 高等动力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2001: 50. (LIU Yan-zhu. *Advanced Dynamics*[M]. Beijing: Higher Educational Press, 2001: 50. (in Chinese))
- [12] Kalaba R E, Udwardia F E. Equations of motion for nonholonomic, constrained dynamical systems via Gauss's principle[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1993, **60**(3): 662-668.
- [13] Kalaba R, Natsuyama H, Udwardia F. An extension of Gauss's principle of least constraint [J]. *International Journal of General Systems*, 2004, **33**(1): 63-69.
- [14] 董龙雷, 闫桂荣, 杜彦亭, 余建军, 牛宝良, 李荣林. 高斯最小拘束原理在一类刚柔耦合系统分析中的应用[J]. 兵工学报, 2001, **22**(3): 347-351. (DONG Long-lei, YAN Gui-rong, DU Yan-ting, YU Jian-jun, NIU Bao-liang, LI Rong-lin. Application of the Gauss minimum constraint theory in a rigid-flexible coupled system[J]. *Acta Armamentarii*, 2001, **22**(3): 347-351. (in Chinese))
- [15] 刘延柱, 薛纭. 基于高斯原理的 Cosserat 弹性杆动力学模型[J]. 物理学报, 2014, **64**(4): 044601. (LIU Yan-zhu, XUE Yun. Dynamical model of Cosserat elastic rod based on Gauss principle[J]. *Acta Physica Sinica*, 2014, **64**(4): 044601. (in Chinese))
- [16] Moulton D E, Lessinnes T, Goriely A. Morphoelastic rods—part I: a single growing elastic rod[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2013, **61**(2): 398-427.
- [17] Cao D Q, Song M T, Tucker R W, Zhu W D, Liu D S, Huang W H. Dynamic equations of thermoelastic Cosserat rods[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2013, **18**(7): 1880-1887.
- [18] Wolgemuth C W, Goldstein R E, Powers T R. Dynamic supercoiling bifurcations of growing elastic filaments[J]. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2004, **190**(3/4): 266-289.
- [19] Goriely A, Neukirch S. Mechanics of climbing and attachment in twining plants[J]. *Phys Rev Lett*, 2006, **97**(18): 184302.
- [20] Lockhart J A. An analysis of irreversible plant cell elongation[J]. *Journal of Theoretical Biology*, 1965, **8**(2): 264-275.

- [21] Cosgrove D J. Cell wall yield properties of growing tissue: evaluation by in vivo stress relaxation[J]. *Plant Physiol*, 1985, **78**(2): 347-356.
- [22] Goodwin B C, Brière C. A mathematical model of cytoskeletal dynamics and morphogenesis in acetabularia[C]//Menzel D, ed. *The Cytoskeleton of the Algae*. Boca Raton: CRC Press, 1992: 219-233.
- [23] Stein A A. The deformation of a rod of growing biological material under longitudinal compression[J]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1995, **59**(1): 139-146.

## Gauss Principle of Least Constraint for Cosserat Growing Elastic Rod Dynamics

XUE Yun<sup>1</sup>, QU Jia-le<sup>1</sup>, CHEN Li-qun<sup>2</sup>

(1. School of Mechanical Engineering, Shanghai Institute of Technology, Shanghai 201418, P.R.China;

2. Department of Mechanics, College of Sciences, Shanghai University, Shanghai 200444, P.R.China)

(Contributed by CHEN Li-qun, M. AMM Editorial Board)

**Abstract:** The dynamic modeling of growing elastic rods, with the background of a kind of growing, deforming and moving slender bodies in nature and engineering, was studied based on the Gauss principle of least constraint in the classical mechanics. This provides a new method for the dynamic modeling of growing elastic rods, and meanwhile expands the application scope of the Gauss principle of least constraint. With the Cosserat growing elastic rod as the object, the geometric rules for growth and deformation of the rod were analyzed, which show that the growing strain and elastic strain are in a nonlinear coupling relation. The constitutive equations were given as a linear relationship between the internal forces and elastic deformations of the rod's cross section; through definition of the inverse of dyad, the Gauss principle of least constraint was used to model the growing elastic rod dynamics and get 2 equivalent forms of the Gauss variation, which reflect the symmetry between time and arc coordinates in the expression of rod dynamics. The closed-form dynamic differential equations were derived. 2 forms of constraint functions were given, which indicate that the actual motion of an elastic rod made the function at a stationary value, and also the minimum value. Finally, some problems about the constraints and conditional extremums of the growing elastic rod dynamics were discussed.

**Key words:** growing elastic rod dynamics; large deformation; Gauss principle of least constraint; analytical dynamics; inverse dyad

**Foundation item:** The National Natural Science Foundation of China(11372195; 10972143)