

基于 Lie 群的刚体动力学建模及 数值计算方法研究*

白 龙¹, 董志峰¹, 戈新生²

(1. 中国矿业大学(北京) 机电与信息工程学院, 北京 100083;
2. 北京信息科技大学 机电工程学院, 北京 100192)

摘要: 基于 Lie 群和 Lie 代数之间的指数映射等价关系, 推导了基于 Lie 群的自由刚体连续动力学方程. 结合离散变分原理, 推导了其 Lie 群离散变分积分分子. 通过证明可知连续和离散动力学系统都具有动量守恒性. 对连续动力学方程进行同维化处理, 使其变为常规非线性方程组的形式, 利用 Runge-Kutta 法进行求解; 基于 Runge-Kutta 基本理论, 推导了直接用于 Lie 群的 Runge-Kutta 法, 从而使 Runge-Kutta 法可用于求解变维非线性方程组; 通过 Lie 代数变换, 利用 Kelly 变换和 Newton 迭代对 Lie 群离散变分积分分子进行求解. 仿真对比结果表明, 3 种算法下的计算结果高度吻合, 且能高精度地保持系统的结构守恒和动量守恒性.

关键词: Lie 群; Lie 代数; Runge-Kutta 法; 离散变分积分分子; 自由刚体

中图分类号: TH123; O302 **文献标志码:** A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2015.08.005

引 言

在机械设计领域, 单刚体可作为诸如飞行器^[1]、水下航体^[2]的动力学简化模型, 其运动分为空间平移运动和绕自身参考系的旋转运动. 相较平移运动, 旋转运动的表述形式较为复杂. 根据不同的理论分析和数值计算的要求产生了多种建模与计算方法. 从机械学的角度出发, Euler(欧拉)角是一种常用的建模方法, 但在包含大角度旋转时则会出现奇点问题, 导致计算精度降低或不能求解. 同时, Euler 角建模法表述形式复杂, 阻碍了该算法研究的进行. 而采用四元数^[3]或者旋转矩阵^[4]来描述旋转运动更为方便.

近年来, 计算几何力学的发展使得 Lie 群和 Lie 代数的基本理论被应用到动力学系统的建模及计算中. 该方法以姿态变换矩阵作为一个整体进行计算, 避免了 Euler 角法的奇点和四元数法的奇点附近模糊性问题, 表达形式也更简洁. Lee 等^[5]将离散变分积分分子与 Lie 群理论结合所得到的 Lie 群离散变分积分分子既保持了系统的几何结构, 又获得较高的计算精度. 该方法在 3D 刚体摆^[6]、多体系统^[7]的动力学计算及最优控制的求解^[8]中取得较好的收敛效果. 此外 Lie 群也用来求解柔性系统动力学问题^[9].

综上所述, 目前国际上关于 Lie 群动力学模型的研究, 主要集中于 Lie 群的离散变分积分

* 收稿日期: 2015-01-30; 修订日期: 2015-06-20

基金项目: 国家自然科学基金(11472058)

作者简介: 白龙(1988—), 男, 山东人, 博士生(通讯作者. E-mail: bailong0316jn@126.com).

子. Lie 群离散变分积分分子在本质上为一递推方程组, 与其它建模方式得到的非线性动力学方程组不具有等价性, 且推导复杂. 而基于连续 Lie 群的动力学方程则是非线性方程组的形式, 与其它建模方法得到的动力学模型具有等价性, 具有形式简洁的优势, 只是存在维数不一问题. 求解非线性方程组的最经典方法是 Runge-Kutta 法, 国内关于 Runge-Kutta 法的改进也有大量的研究^[10-11]. 故要使用 Runge-Kutta 法求解 Lie 群形式的非线性方程组, 就要对传统形式的 Runge-Kutta 法进行结构改进, 或者对基于 Lie 群的连续动力学方程进行改进, 使其达到可解的目的.

在离散变分积分分子^[12-13]的基础上, 本文推导了基于 Lie 群的连续动力学方程和 Lie 群离散变分积分分子, 证明了两种形式动力学表达式的动量守恒性. 结合 Runge-Kutta 算法的基本理论, 对其改进, 使其可直接求解 Lie 群连续动力学方程; 对 Lie 群连续动力学方程进行降维处理, 使其可直接使用 Runge-Kutta 法求解; 最后通过 Kelly (凯利) 变换和 Newton (牛顿) 迭代对 Lie 群离散变分积分分子进行求解. 仿真结果表明, 3 种计算方法下的动力学参数计算值一致, 且在仿真中具有较好的计算精度, 满足一般机械工程领域关于计算精度的需要.

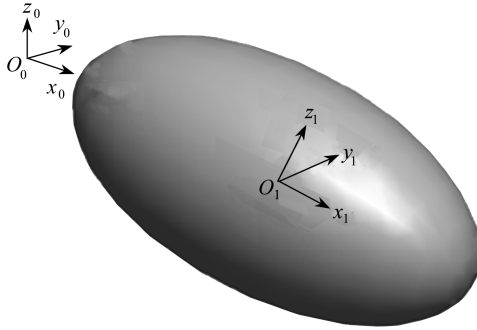


图 1 刚体位移姿态图

Fig. 1 The displacement and attitude of the rigid body

1 Lie 群连续动力学方程

首先建立系统的 Lagrange 函数. 在图 1 中, 坐标系 $O_0-x_0y_0z_0$ 为惯性坐标系, $O_1-x_1y_1z_1$ 为刚体的连体坐标系, 设 O_1 在坐标系 O_0 中的坐标为 \mathbf{b} , 刚体连体坐标系各轴的转动角速度向量为 $\boldsymbol{\omega}$, 刚体的质量为 m , g 为重力加速度, 则系统动能为

$$T(\dot{\mathbf{b}}, \boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{b}}^T m \dot{\mathbf{b}} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}, \quad (1)$$

其中, $\dot{\mathbf{b}}$ 为 O_1 在惯性系中的速度, $\mathbf{J} = \det(J_x, J_y, J_z)$ 为转动惯量. 系统势能受质心垂直位移和绕浮心转动共同作用:

$$U(\mathbf{b}, \mathbf{R}) = -mge_3^T \mathbf{b} + mge_3^T \mathbf{R} \mathbf{r}, \quad (2)$$

其中, \mathbf{r} 为质心在连体坐标系中的位置向量, $e_3 = [0; 0; 1]$ 为单位向量, m 为系统质量, \mathbf{R} 为旋转矩阵, 由于 $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$, 故 $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$. 由式(1)和(2)可得系统的 Lagrange 函数为

$$L(\mathbf{b}, \dot{\mathbf{b}}, \mathbf{R}, \boldsymbol{\omega}) = T(\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}) - U(\mathbf{b}, \mathbf{R}). \quad (3)$$

\mathbf{R} 和 $\boldsymbol{\omega}$ 之间的非线性关系为

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}}, \quad (4)$$

$\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega})$ 为反对称矩阵, 定义为

$$S(\boldsymbol{\omega}) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

定义系统在任意时间段内对时间的积分为

$$B = \int_{t_0}^{t_f} L(\mathbf{b}, \dot{\mathbf{b}}, \mathbf{R}, \boldsymbol{\omega}) dt. \quad (6)$$

由 Hamilton 原理可知,动力学方程通过对 B 求变分得到.由于在求变分之前,需对 Lagrange 函数及其中的参数 $\mathbf{R}, \boldsymbol{\omega}$ 进行 Lie 群意义下的变换.定义非标准转动惯量矩阵

$$J_d = \frac{1}{2} \text{tr}[J] I_{3 \times 3} - J, \quad (7)$$

其中 $\text{tr}[\cdot]$ 为矩阵对角线元素求和运算.由式(7)可将式(1)转换为

$$T(\dot{\mathbf{b}}, \boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{b}}^T m \dot{\mathbf{b}} + \frac{1}{2} \text{tr}[S(\boldsymbol{\omega}) J_d S^T(\boldsymbol{\omega})], \quad (8)$$

动能中的向量 $\boldsymbol{\omega}$ 变为反对称矩阵表示的形式.由 Lie 代数的概念,定义 \mathbf{R} 为指数形式

$$\mathbf{R}^\varepsilon = \mathbf{R} e^{\varepsilon S(\boldsymbol{\eta})}, \quad (9)$$

ε 为常量, $S(\boldsymbol{\eta})$ 为反对称阵.对 \mathbf{R} 求变分:

$$\delta \mathbf{R}^\varepsilon = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \mathbf{R} e^{\varepsilon S(\boldsymbol{\eta})} = \mathbf{R} S(\boldsymbol{\eta}). \quad (10)$$

利用变分式(10),将式(9)展开为

$$\mathbf{R}^\varepsilon = \mathbf{R} + \varepsilon \mathbf{R} S(\boldsymbol{\eta}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (11)$$

对式(11)求导可得

$$\dot{\mathbf{R}}^\varepsilon = \dot{\mathbf{R}} + \varepsilon \dot{\mathbf{R}} S(\boldsymbol{\eta}) + \varepsilon \mathbf{R} S(\dot{\boldsymbol{\eta}}). \quad (12)$$

将式(11)和(12)代入式(4),省略 $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ 可得

$$S(\boldsymbol{\omega}^\varepsilon) = S(\boldsymbol{\omega}) + \varepsilon S(\dot{\boldsymbol{\eta}}) + \varepsilon S(\boldsymbol{\omega}) S(\boldsymbol{\eta}) - \varepsilon S(\boldsymbol{\eta}) S(\boldsymbol{\omega}). \quad (13)$$

将式(13)代入式(8)的 $\text{tr}[\cdot]$ 部分,保留系数为 ε 的项为

$$S(\boldsymbol{\omega}^\varepsilon) J_d S^T(\boldsymbol{\omega}^\varepsilon) = -\varepsilon S(\boldsymbol{\omega}) J_d S(\dot{\boldsymbol{\eta}}) + \varepsilon S(\boldsymbol{\omega}) J_d S(\boldsymbol{\eta}) S(\boldsymbol{\omega}) - \varepsilon S(\dot{\boldsymbol{\eta}}) J_d S(\boldsymbol{\omega}) - \varepsilon S(\boldsymbol{\omega}) [J_d S(\boldsymbol{\omega}) S(\boldsymbol{\eta}) + S(\boldsymbol{\eta}) J_d S(\boldsymbol{\omega})] + \varepsilon S(\boldsymbol{\eta}) S(\boldsymbol{\omega}) J_d S(\boldsymbol{\omega}). \quad (14)$$

由此, Lagrange 函数变为 ε 的函数,则

$$\delta B = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \int_{t_0}^{t_f} L(\mathbf{b}, \dot{\mathbf{b}}, \mathbf{R}, \boldsymbol{\omega}) dt = \int_{t_0}^{t_f} \left[\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} L(\mathbf{b}, \dot{\mathbf{b}}, \mathbf{R}, \boldsymbol{\omega}) \right] dt. \quad (15)$$

将式(11)代入式(2),将式(14)代入式(8)计算 Lagrange 函数的变分为

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} L(\mathbf{b}, \dot{\mathbf{b}}, \mathbf{R}, \boldsymbol{\omega}) = & -\frac{1}{2} \text{tr} \{ S(\dot{\boldsymbol{\eta}}) [S(\boldsymbol{\omega}) J_d + J_d S(\boldsymbol{\omega})] \} + \\ & \frac{1}{2} \text{tr} \{ S(\boldsymbol{\eta}) S(\boldsymbol{\omega}) [S(\boldsymbol{\omega}) J_d + J_d S(\boldsymbol{\omega})] \} - \\ & \frac{1}{2} \text{tr} \{ S(\boldsymbol{\eta}) [S(\boldsymbol{\omega}) J_d + J_d S(\boldsymbol{\omega})] S(\boldsymbol{\omega}) \} + \text{tr}[mg e_3^T \mathbf{R}^T \mathbf{e}_3^T \mathbf{r}], \end{aligned} \quad (16)$$

其中, $mg e_3^T \mathbf{R} S(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{r} = \text{tr}[mg e_3^T \mathbf{R} S(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{r}] J, \boldsymbol{\omega}, J_d$ 之间存在以下关系:

$$S(J\boldsymbol{\omega}) = S(\boldsymbol{\omega}) J_d + J_d S(\boldsymbol{\omega}). \quad (17)$$

将式(17)代入式(16),并利用关系式 $S(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = S(\mathbf{x}) S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}) S(\mathbf{x})$ 整理后得

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} L(\mathbf{b}, \dot{\mathbf{b}}, \mathbf{R}, \boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \{ -\mathbf{S}(\dot{\boldsymbol{\eta}}) \mathbf{S}(\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}) + \mathbf{S}(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}) \} + \operatorname{tr}[\mathbf{S}(\boldsymbol{\eta}) mg \mathbf{R}^T \mathbf{e}_3^T \mathbf{r}]. \quad (18)$$

对式(18)求积分可得

$$\delta \mathbf{B} = \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2} \operatorname{tr}[\mathbf{S}(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{S}(\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}) + 2mg \mathbf{S}(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{R}^T \mathbf{e}_3^T \mathbf{r}^T] dt. \quad (19)$$

由 $\operatorname{tr}[\mathbf{S}(x)\mathbf{B}] = -\operatorname{tr}[\mathbf{S}(x)\mathbf{B}^T]$ 可知,

$$\operatorname{tr} \{ 2mge_3^T \mathbf{r} \mathbf{S}(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{R}^T \} = \operatorname{tr} \{ \mathbf{S}(\boldsymbol{\eta}) [mg(\mathbf{r} \mathbf{e}_3^T \mathbf{R} - \mathbf{R}^T \mathbf{e}_3^T \mathbf{r}^T)] \}. \quad (20)$$

$mg(\mathbf{R}^T \mathbf{e}_3^T \mathbf{r}^T - \mathbf{r} \mathbf{e}_3^T \mathbf{R})$ 即为重力矩 $\boldsymbol{\tau}$ 的反对称形式,即

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\tau}) = mg(\mathbf{R}^T \mathbf{e}_3^T \mathbf{r}^T - \mathbf{r} \mathbf{e}_3^T \mathbf{R}) = -mg(\mathbf{r}(\mathbf{R}^T \mathbf{e}_3)^T - (\mathbf{R}^T \mathbf{e}_3) \mathbf{r}^T). \quad (21)$$

将式(21)代入式(20)整理可得

$$\mathbf{S}(\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{S}(\boldsymbol{\tau}). \quad (22)$$

式(21)中的力矩 $\boldsymbol{\tau}$ 为反对称形式,将其等价于向量形式为 $\boldsymbol{\tau} = -mg \mathbf{S}(\mathbf{r}) \mathbf{R}^T \mathbf{e}_3$. 由于 Lagrange 函数(3)中显含 $\dot{\mathbf{b}}$ 和 \mathbf{b} , 故移动自由度的动力学方程可由 Lagrange 方程直接得到,即

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{b}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{b}} = 0, \quad (23)$$

计算得

$$m\dot{\mathbf{b}} = mge_3. \quad (24)$$

在实际运动中,驱动力的添加是以连体坐标系为基准而非惯性坐标系,故 \mathbf{b} 和 $\dot{\mathbf{b}}$ 为状态变量而非控制变量. 设水下航行器沿其连体坐标系各轴上的速度向量为 $\mathbf{v} = [v_x; v_y; v_z]$, 则 $\dot{\mathbf{b}}$ 和 \mathbf{v} 的关系为

$$\dot{\mathbf{b}} = \mathbf{R}\mathbf{v}. \quad (25)$$

对式(25)求导,将 $\dot{\mathbf{R}}$ 替换后整理可得

$$m\ddot{\mathbf{b}} = m\mathbf{R}\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega})\mathbf{v} + m\mathbf{R}\dot{\mathbf{v}}. \quad (26)$$

将式(26)代入式(24)整理得 $m\dot{\mathbf{v}}$ 的表达式为

$$m\dot{\mathbf{v}} = mg\mathbf{R}^T \mathbf{e}_3 - m\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega})\mathbf{v}. \quad (27)$$

系统转动的运动方程可以由 \mathbf{R} 和 $\boldsymbol{\omega}$ 之间的非线性关系式表达:

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}). \quad (28)$$

式(22)和(27)为系统动力学方程,式(25)和(28)为运动学方程,因显含速度量,故为 Lagrange 形式的状态方程. 为得到 Hamilton 形式的动力学方程,需进行 Legendre 变换. 定义 $\boldsymbol{\Pi} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}$ 为角动量,消去式(22)两边的 $\mathbf{S}(\cdot)$ 运算并将 $\boldsymbol{\Pi}$ 代入后整理成非线性方程为

$$\dot{\boldsymbol{\Pi}} = -(\mathbf{J}^{-1}\boldsymbol{\Pi}) \times \boldsymbol{\Pi} + \boldsymbol{\tau}. \quad (29)$$

同理,令 $\mathbf{P} = m\mathbf{v}$ 为动量,则式(27)变为

$$\dot{\mathbf{P}} = mg\mathbf{R}^T \mathbf{e}_3 - \mathbf{S}(\mathbf{J}^{-1}\boldsymbol{\Pi})\mathbf{P}. \quad (30)$$

同理,运动学方程(25)和(28)变为

$$\dot{\mathbf{b}} = (1/m) \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{P}, \quad (31)$$

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{S}(\mathbf{J}^{-1}\boldsymbol{\Pi}). \quad (32)$$

式(29)~(32)即为基于 Lie 群的 Hamilton 形式的空间刚体 6 自由度动力学与运动学方程. 相较三角函数等建模方法,基于 Lie 群的动力学方程在形式上较为简洁,且消除了计算中

可能出现的奇点问题,除此以外,基于 Lie 群的 6 自由度方程具有普适性,通过在计算中设定 $\mathbf{P}_{3 \times 1}$ 和 $\mathbf{P}_{3 \times 1}$ 中某个或几个参数为 0 或定值,即可得到各种欠驱动形式的动力学方程,而无需重新推导.

2 Lie 群离散变分积分分子

定义以下离散关系:

$$\mathbf{R} = (\mathbf{R}_{k+1} + \mathbf{R}_k)/2, \mathbf{R}_{k+1} = \mathbf{R}_k \mathbf{F}_k, \quad (33)$$

则 $\dot{\mathbf{R}}$ 和 $\boldsymbol{\omega}$ 的离散形式分别为

$$\dot{\mathbf{R}}_k = \mathbf{R}_k (\mathbf{F}_k - \mathbf{I})/h, \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_k) = (\mathbf{F}_k - \mathbf{I})/h. \quad (34)$$

定义位移矢量和速度矢量的离散关系为

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{b}_{k+1} + \mathbf{b}_k}{2}, \dot{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{b}_{k+1} - \mathbf{b}_k}{h} = \frac{1}{h} \Delta \mathbf{b}_k, \quad (35)$$

则对式(3)进行离散化后求积分可得

$$\begin{aligned} L_d = h\mathbf{L}(\mathbf{b}_k, \Delta \mathbf{b}_k, \mathbf{R}_k, \mathbf{F}_k) = \Delta \mathbf{b}_k^T m \Delta \mathbf{b}_k / (2h) + \\ \text{tr}[\mathbf{J}_d - \mathbf{F}_k \mathbf{J}_d] / h - mgh e_3^T \mathbf{R}_k (\mathbf{F}_k + \mathbf{I}) \mathbf{r} / 2 - \\ h(\rho V - m) g e_3^T (\Delta \mathbf{b}_k + 2\mathbf{b}_k) / 2. \end{aligned} \quad (36)$$

对 L_d 中的 \mathbf{F}_k 求变分可得

$$\mathbf{D}_{\mathbf{F}_k} L_{dk} \cdot \delta \mathbf{F}_k = -\frac{1}{h} \text{tr}[\delta \mathbf{F}_k \mathbf{J}_d] - \frac{mgh}{2} e_3^T \mathbf{R}_k \delta \mathbf{F}_k \mathbf{r}. \quad (37)$$

根据 Lie 群函数映射的理论,要将 $\delta \mathbf{F}_k$ 消去,需根据 $\mathbf{F}_k \mathbf{F}_k^T = \mathbf{I}$ 将 $\delta \mathbf{F}_k$ 凑成反对称阵 $\mathbf{F}_k^T \delta \mathbf{F}_k$ 的形式,则式(37)第 1 项可变为

$$-\frac{1}{h} \text{tr}[\delta \mathbf{F}_k \mathbf{J}_d] = -\frac{1}{h} \text{tr}[\mathbf{F}_k (\mathbf{F}_k^T \delta \mathbf{F}_k) \mathbf{J}_d] = \frac{1}{h} \langle \mathbf{J}_d \mathbf{F}_k - \mathbf{F}_k^T \mathbf{J}_d, \mathbf{F}_k^T \delta \mathbf{F}_k \rangle. \quad (38)$$

同理,结合 $\mathbf{y}^T \mathbf{S}(\mathbf{x}) \mathbf{z} = \langle \mathbf{y} \mathbf{z}^T - \mathbf{z} \mathbf{y}^T, \mathbf{S}(\mathbf{x}) \rangle$, 式(37)第 2 项可变为

$$-\frac{mgh}{2} e_3^T \mathbf{R}_k \delta \mathbf{F}_k \mathbf{r} = -\frac{mgh}{2} \langle \mathbf{R}_{k+1}^T e_3 \mathbf{r}^T - \mathbf{r} e_3^T \mathbf{R}_{k+1}, \mathbf{F}_k^T \delta \mathbf{F}_k \rangle. \quad (39)$$

根据 Lie 群 Lie 代数映射关系,定义映射 $\mathbf{T}_e^* L_{F_k}$ 消去 $\mathbf{F}_k^T \delta \mathbf{F}_k$, 则提取式(38)、(39)前两项可得

$$\mathbf{T}_e^* L_{F_k} \cdot \mathbf{D}_{\mathbf{F}_k} L_{dk} = (\mathbf{J}_d \mathbf{F}_k - \mathbf{F}_k^T \mathbf{J}_d) / h - mgh (\mathbf{R}_{k+1}^T e_3 \mathbf{r}^T - \mathbf{r} e_3^T \mathbf{R}_{k+1}) / 2. \quad (40)$$

定义映射关系

$$\mathbf{Ad}_{\mathbf{F}_k^T}^* (\mathbf{T}_e^* L_{F_k} \cdot \mathbf{D}_{\mathbf{F}_k} L_{dk}) = \mathbf{F}_k (\mathbf{T}_e^* L_{F_k} \cdot \mathbf{D}_{\mathbf{F}_k} L_{dk}) \mathbf{F}_k^T,$$

且根据向量计算关系 $\mathbf{S}(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = \mathbf{y} \mathbf{x}^T - \mathbf{x} \mathbf{y}^T$ 可得

$$\mathbf{Ad}_{\mathbf{F}_k^T}^* (\mathbf{T}_e^* L_{F_k} \cdot \mathbf{D}_{\mathbf{F}_k} L_{dk}) = (\mathbf{F}_k \mathbf{J}_d - \mathbf{J}_d \mathbf{F}_k^T) / h - mgh \mathbf{S}(\mathbf{F}_k \mathbf{r} \times \mathbf{R}_k^T e_3) / 2. \quad (41)$$

对 \mathbf{R}_k 求变分可得 $\mathbf{D}_{\mathbf{R}_k} L_{dk} \cdot \delta \mathbf{R}_k = -mgh e_3^T \delta \mathbf{R}_k (\mathbf{F}_k + \mathbf{I}) \mathbf{r} / 2$. 由于 $\mathbf{R}_k^T \delta \mathbf{R}_k$ 为反对称形式,根据式(40)的推导过程,利用 $\mathbf{R}_k^T \mathbf{R}_k = \mathbf{I}$ 消去 $\mathbf{R}_k^T \delta \mathbf{R}_k$ 得到

$$\mathbf{T}_e^* L_{R_k} \cdot \mathbf{D}_{\mathbf{R}_k} L_{dk} = -\frac{mgh}{2} \mathbf{S}((\mathbf{F}_k + \mathbf{I}) \mathbf{r} \times \mathbf{R}_k^T e_3). \quad (42)$$

由 Legendre (勒让德) 变换可知:

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{S}^{-1}(\mathbf{Ad}_{\mathbf{F}_k^T}^* (\mathbf{T}_e^* L_{F_k} \cdot \mathbf{D}_{\mathbf{F}_k} L_{dk}) - \mathbf{T}_e^* L_{R_k} \cdot \mathbf{D}_{\mathbf{R}_k} L_{dk}) =$$

$$\frac{1}{h} \mathbf{S}^{-1}(\mathbf{F}_k \mathbf{J}_d - \mathbf{J}_d \mathbf{F}_k^T) + \frac{mgh}{2}(\mathbf{r} \times \mathbf{R}_k^T \mathbf{e}_3), \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{k+1} &= \mathbf{S}^{-1}(\mathbf{T}_e^* \mathbf{L}_{\mathbf{F}_k} \cdot \mathbf{D}_{\mathbf{F}_k} \mathbf{L}_{d_k}) = \\ &= \frac{1}{h} \mathbf{S}^{-1}(\mathbf{J}_d \mathbf{F}_k - \mathbf{F}_k^T \mathbf{J}_d) - \frac{mgh}{2}(\mathbf{r} \times \mathbf{R}_{k+1}^T \mathbf{e}_3). \end{aligned} \quad (44)$$

将式(43)左乘 \mathbf{F}_k^T 并右乘 \mathbf{F}_k 后代入式(44)可得角动量的递推公式为

$$\mathbf{H}_{k+1} = \mathbf{F}_k^T \mathbf{H}_k - mgh \mathbf{S}(\mathbf{F}_k^T \mathbf{r})(\mathbf{R}_{k+1}^T \mathbf{e}_3)/2 - mgh \mathbf{S}(\mathbf{r})(\mathbf{R}_{k+1}^T \mathbf{e}_3)/2. \quad (45)$$

分别对 $\Delta \mathbf{b}_k$ 和 \mathbf{b}_k 求变分后进行 Legendre 变换:

$$\mathbf{p}_{b_k} = \mathbf{D}_{\Delta \mathbf{b}_k} \mathbf{L}_{d_k} - \mathbf{D}_{\mathbf{b}_k} \mathbf{L}_{d_k} = m(\mathbf{b}_{k+1} - \mathbf{b}_k)/h + h(\rho V - m) \mathbf{g} \mathbf{e}_3^T/2, \quad (46)$$

$$\mathbf{p}_{b_{k+1}} = \mathbf{D}_{\Delta \mathbf{b}_k} \mathbf{L}_{d_k} = m(\mathbf{b}_{k+1} - \mathbf{b}_k)/h - h(\rho V - m) \mathbf{g} \mathbf{e}_3^T/2. \quad (47)$$

将式(46)代入式(47)可得动量的递推公式为

$$\mathbf{p}_{b_{k+1}} = \mathbf{p}_{b_k} - h(\rho V - m) \mathbf{g} \mathbf{e}_3^T. \quad (48)$$

姿态矩阵 \mathbf{R}_k 的递推公式为

$$\mathbf{R}_{k+1} = \mathbf{R}_k \mathbf{F}_k. \quad (49)$$

式(45), (48)及(49)构成了 Lie 群离散变分积分子.由 Legendre 变换, $\mathbf{p}_{b_{k+1}} = m \dot{\mathbf{b}}_{k+1}$, 根据式(25)得 $\mathbf{p}_{b_{k+1}} = m \mathbf{R}_{k+1} \mathbf{v}_{k+1}$, 则连体坐标系上速度递推公式为 $\mathbf{v}_{k+1} = m^{-1} \mathbf{R}_{k+1}^T \mathbf{p}_{b_{k+1}}$.

3 动量守恒性证明

刚体在空间中自由运动时,由于重力的方向不变,故在保守力作用下刚体应存在一守恒量,即角动量在惯性系 z 上的投影为恒定值,从而式(29)在惯性系 z 轴上的投影值应恒为 $\mathbf{0}$, 现予证明.将式(29)等号两边同时左乘 $\mathbf{e}_3^T \mathbf{R}$ 得

$$\mathbf{e}_3^T \mathbf{R} \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\omega}} = -\mathbf{e}_3^T \mathbf{R}(\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}) \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} + m \mathbf{g} \mathbf{S}(\mathbf{r}) \mathbf{R}^T \mathbf{e}_3), \quad (50)$$

其中 $\mathbf{e}_3^T \mathbf{R} = (\mathbf{R}^T \mathbf{e}_3)^T$, $\mathbf{R}^T \mathbf{e}_3$ 为连体坐标系各轴上的单位向量在惯性系 z 轴上的投影,又称姿态.将等式右边括号展开,利用 $\mathbf{S}(\mathbf{a}) \mathbf{b} = -\mathbf{S}(\mathbf{b}) \mathbf{a}$ 得到

$$-\mathbf{e}_3^T \mathbf{R} \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}) \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} - m \mathbf{g} \mathbf{e}_3^T \mathbf{R} \mathbf{S}(\mathbf{r}) \mathbf{R}^T \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3^T \mathbf{R} \mathbf{S}(\mathbf{J} \boldsymbol{\omega}) \boldsymbol{\omega} - m \mathbf{g} \mathbf{e}_3^T \mathbf{S}(\mathbf{R}^T \mathbf{r}) \mathbf{e}_3. \quad (51)$$

在式(51)第2项中, $\mathbf{S}(\mathbf{R}^T \mathbf{r})$ 为反对称矩阵,故对角线元素恒为0,又因为 $\mathbf{e}_3 = [0; 0; 1]$, 则 $\mathbf{e}_3^T \mathbf{S}(\mathbf{R}^T \mathbf{r}) \mathbf{e}_3$ 恒为 $\mathbf{0}$.将式(17)代入式(51)得

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_3^T \mathbf{R} \mathbf{S}(\mathbf{J} \boldsymbol{\omega}) \boldsymbol{\omega} &= \mathbf{e}_3^T \mathbf{R}[\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}) \mathbf{J}_d + \mathbf{J}_d \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega})] \boldsymbol{\omega} = \\ &= (\mathbf{R}^T \mathbf{e}_3)^T \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega})(\mathbf{J}_d \boldsymbol{\omega}) + (\mathbf{J}_d \boldsymbol{\omega})^T \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega})(\mathbf{R}^T \mathbf{e}_3). \end{aligned} \quad (52)$$

由 $\mathbf{a}^T \mathbf{S}(\mathbf{b}) \mathbf{c} = -\mathbf{c}^T \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}) \mathbf{a}$ 可知,式(52)恒为 $\mathbf{0}$,故式(51)恒为 $\mathbf{0}$.故绕垂直轴动量守恒.

下面证明 Lie 群离散变分积分子的动量守恒性.将 $\mathbf{F}_k = \mathbf{R}_k^T \mathbf{R}_{k+1}$ 代入式(45)化简后两边同时左乘 $\mathbf{e}_3^T \mathbf{R}_{k+1}$, 化简后可得

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_3^T \mathbf{R}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1} - \mathbf{e}_3^T \mathbf{R}_k \mathbf{H}_k &= \\ &= m \mathbf{g} \mathbf{h} \mathbf{e}_3^T \mathbf{R}_{k+1} \mathbf{S}(\mathbf{R}_{k+1}^T \mathbf{R}_k \mathbf{r}) \mathbf{R}_{k+1}^T \mathbf{e}_3/2 - m \mathbf{g} \mathbf{h} \mathbf{e}_3^T \mathbf{R}_{k+1} \mathbf{S}(\mathbf{r}) \mathbf{R}_{k+1}^T \mathbf{e}_3/2. \end{aligned} \quad (53)$$

由 $\mathbf{R}^T \mathbf{S}(\mathbf{x}) \mathbf{R} = \mathbf{S}(\mathbf{R}^T \mathbf{x})$ 可知式(53)等号右边两项都可化为 $\mathbf{e}_3^T \mathbf{S}(\mathbf{x}) \mathbf{e}_3$ 的形式,由于 $\mathbf{S}(\mathbf{x})$ 为反对称矩阵,故 $\mathbf{e}_3^T \mathbf{S}(\mathbf{x}) \mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$, 从而可知 $\mathbf{e}_3^T \mathbf{R}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1} = \mathbf{e}_3^T \mathbf{R}_k \mathbf{H}_k$ 恒成立,证毕.

4 动力学方程的降维

式(22), (24), (25), (28)构成了 Lagrange 形式的动力学方程,其中除式(28)以外,其余

部分构成了一维列向量,故而要利用一般 Runge-Kutta 法进行求解,需对式(28)进行变换.将旋转矩阵写成以下列向量的形式:

$$\mathbf{R} = [\mathbf{R}_1^T; \mathbf{R}_2^T; \mathbf{R}_3^T], \tag{54}$$

其中 \mathbf{R}_i 为列向量,分别为 $\mathbf{R}_1 = [r_{11}; r_{12}; r_{13}]$, $\mathbf{R}_2 = [r_{21}; r_{22}; r_{23}]$, $\mathbf{R}_3 = [r_{31}; r_{32}; r_{33}]$. 则式(28)可变换为下述列向量形式的非线性方程组:

$$\dot{\mathbf{R}}_1 = \mathbf{S}(\mathbf{R}_1)\boldsymbol{\omega}, \dot{\mathbf{R}}_2 = \mathbf{S}(\mathbf{R}_2)\boldsymbol{\omega}, \dot{\mathbf{R}}_3 = \mathbf{S}(\mathbf{R}_3)\boldsymbol{\omega}. \tag{55}$$

由此,系统的动力学方程展成为 18 维的非线性方程组,可直接通过 Runge-Kutta 法求解.

5 基于 Lie 群的 Runge-Kutta 法

三阶 Runge-Kutta 法的基本公式为^[13]

$$\begin{cases} y_{k+1} = y_k + (h/6)(K_1 + 4K_2 + K_3), \\ K_1 = f(x_k, y_k), K_2 = f(x_k + h/2, y_k + K_1 h/2), \\ K_3 = f(x_k + h, y_k - hK_1 + 2hK_2). \end{cases} \tag{56}$$

基于 Lie 群的 Runge-Kutta 法是将各阶参数 K_i 进行分步化求解,以解决 Lie 群非线性方程组中 \mathbf{R} 与 $\mathbf{b}, \mathbf{P}, \mathbf{\Pi}$ 的维数不一问题.令 $\mathbf{X}_{9 \times 1} = [\mathbf{b}; \mathbf{P}; \mathbf{\Pi}]$, $\dot{\mathbf{X}} = [\dot{\mathbf{b}}; \dot{\mathbf{P}}; \dot{\mathbf{\Pi}}]$, 则式(29)~(32)可表示为

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{f}(\mathbf{P}_k, \mathbf{R}_k, \mathbf{\Pi}_k), \dot{\mathbf{R}} = \mathbf{f}_R(\mathbf{\Pi}, \mathbf{R}). \tag{57}$$

由三阶 Runge-Kutta 法的基本原理,构建 Runge-Kutta 法中的一至三阶参数及中间变量分别为

$$\begin{cases} \mathbf{K}_{1X_k} = \mathbf{f}_{X_k}(\mathbf{X}_k, \mathbf{R}_k) \\ \mathbf{K}_{1R_k} = \mathbf{f}_{R_k}(\mathbf{X}_k, \mathbf{R}_k) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{X}_k^2 = \mathbf{X}_k + \frac{h}{2} \mathbf{K}_{1X_k} \\ \mathbf{R}_k^2 = \mathbf{R}_k + \frac{h}{2} \mathbf{K}_{1R_k} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{K}_{2X_k} = \mathbf{f}_{X_k}(\mathbf{X}_k^2, \mathbf{R}_k^2) \\ \mathbf{K}_{2R_k} = \mathbf{f}_{R_k}(\mathbf{X}_k^2, \mathbf{R}_k^2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{X}_k^3 = \mathbf{X}_k - h\mathbf{K}_{1X_k} + 2h\mathbf{K}_{2X_k} \\ \mathbf{R}_k^3 = \mathbf{R}_k - h\mathbf{K}_{1R_k} + 2h\mathbf{K}_{2R_k} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{K}_{3X_k} = \mathbf{f}_{X_k}(\mathbf{X}_k^3, \mathbf{R}_k^3) \\ \mathbf{K}_{3R_k} = \mathbf{f}_{R_k}(\mathbf{\Pi}_k^3, \mathbf{R}_k^3) \end{cases}. \tag{58}$$

由式(58)可推出基于 Lie 群的 Runge-Kutta 法递推公式为

$$\begin{cases} \mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_k + \frac{h}{6}(\mathbf{K}_{1X_k} + 4\mathbf{K}_{2X_k} + \mathbf{K}_{3X_k}), \\ \mathbf{R}_{k+1} = \mathbf{R}_k + \frac{h}{6}(\mathbf{K}_{1R_k} + 4\mathbf{K}_{2R_k} + \mathbf{K}_{3R_k}). \end{cases} \tag{59}$$

6 Kelly 变换和 Newton 迭代

由于 Lie 群离散变分积分中 \mathbf{R} 的递推矩阵 \mathbf{F} 的求解式(43)为隐式,故需将 \mathbf{F} 进行一定的变换,然后通过 Newton 迭代求解.目前的变换方式有 Rodrigues (罗德里格斯)参数法和 Kelly 变换法,此处采用 Kelly 变换法进行求解.式(43)可变为以下形式:

$$\mathbf{F}_k \mathbf{J}_d - \mathbf{J}_d \mathbf{F}_k^T = \mathbf{S}(\mathbf{a}), \tag{60}$$

其中, $\mathbf{a} = h\mathbf{\Pi}_k - (mgh^2/2)(\mathbf{r} \times \mathbf{R}_k^T \mathbf{e}_3)$. Kelly 变换定义为

$$\mathbf{F} = \text{Cay}(\mathbf{f}_c) = (\mathbf{I} + \mathbf{S}(\mathbf{f}_c))(\mathbf{I} - \mathbf{S}(\mathbf{f}_c))^{-1}, \tag{61}$$

其中 \mathbf{f}_c 为三维向量,将式(61)代入式(60),左乘 $(\mathbf{I} - \mathbf{S}(\mathbf{f}_c))$,右乘 $(\mathbf{I} + \mathbf{S}(\mathbf{f}_c))$ 后展开:

$$S(\mathbf{a}) + S(\mathbf{a})S(\mathbf{f}_c) - S(\mathbf{f}_c)S(\mathbf{a})S(\mathbf{f}_c) - S(\mathbf{f}_c)S(\mathbf{a}) = 2(S(\mathbf{f}_c)\mathbf{J}_d + \mathbf{J}_dS(\mathbf{f}_c)). \quad (62)$$

根据简化关系 $S(\mathbf{f}_c)S(\mathbf{a})S(\mathbf{f}_c) = -(\mathbf{a}^T\mathbf{f}_c)S(\mathbf{f}_c)$ 以及 $S(\mathbf{a})S(\mathbf{f}_c) - S(\mathbf{f}_c)S(\mathbf{a}) = S(\mathbf{a} \times \mathbf{f}_c)$ 和 $S(\mathbf{f}_c)\mathbf{J}_d + \mathbf{J}_dS(\mathbf{f}_c) = S(\mathbf{J}\mathbf{f}_c)$, 对式(62)化简, 可得关于 \mathbf{f}_c 的隐式函数为

$$\mathbf{A}_c(\mathbf{f}_c) = \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{f}_c + (\mathbf{a}^T\mathbf{f}_c)\mathbf{f}_c - 2\mathbf{J}\mathbf{f}_c = \mathbf{0}. \quad (63)$$

定义 Newton 迭代:

$$\mathbf{f}_c^{(i+1)} = \mathbf{f}_c^{(i)} - \nabla\mathbf{A}_c(\mathbf{f}_c^{(i)})^{-1}\mathbf{A}_c(\mathbf{f}_c^{(i)}), \quad (64)$$

其中 Jacobi(雅可比)矩阵 $\nabla\mathbf{A}_c(\mathbf{f}_c)$ 为

$$\nabla\mathbf{A}_c(\mathbf{f}_c) = S(\mathbf{a}) + (\mathbf{a}^T\mathbf{f}_c)\mathbf{I} + \mathbf{f}_c\mathbf{a}^T - 2\mathbf{J}, \quad (65)$$

设定迭代终止条件为 $\|\mathbf{f}_c^{(i+1)} - \mathbf{f}_c^{(i)}\| < \varepsilon$, ε 的选择随计算要求精度而定。

7 仿真结果分析

为验证上述 3 种计算方法的正确性, 本部分基于 MATLAB 对上述动力学计算方法进行仿真验证。设定自由刚体的质量为 $m = 5 \text{ kg}$, 质心在连体坐标系中的位置向量为 $\mathbf{r} = [0, 0, 0.1] \text{ m}$, 刚体转动惯量为 $\mathbf{J} = \text{det}(1.25, 0.8, 0.45) \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, 重力加速度为 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ 。

设刚体在惯性坐标系中的初始位置为 $\mathbf{b}_0 = [0, 0, 0] \text{ m}$, 刚体沿连体坐标系各坐标轴的初始速度向量为 $\mathbf{v}_0 = [1, 1, 1] \text{ m/s}$, 刚体绕连体坐标系各轴的转动角速度初值为 $\boldsymbol{\omega}_0 = [\pi, \pi, \pi] \text{ rad/s}$, 设时间步长 $t_b = 0.01 \text{ s}$, 仿真时间为 10 s 。设定在 Lie 群离散变分积分分子算法中, Newton 迭代的终止条件为 $\varepsilon = 10^{-10}$ 。旋转矩阵的初始值为

$$\mathbf{R}_0 = \begin{bmatrix} 0.433 & 0.1768 & 0.8839 \\ 0.25 & 0.9186 & -0.3062 \\ -0.866 & 0.3536 & 0.3536 \end{bmatrix}.$$

为验证上文所研究的基于 Lie 群的 Runge-Kutta 法, 基于降维方程组的 Runge-Kutta 法和 Lie 群离散变分积分分子求解离散动力学方程法这 3 种算法的正确性, 对 3 种算法下的动力学参数随时间变化进行了仿真。

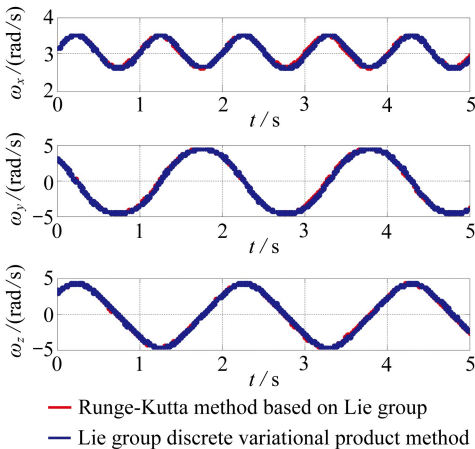


图 2 系统角速度随时间的变化

Fig. 2 The angular velocity time history in the body-fixed frame

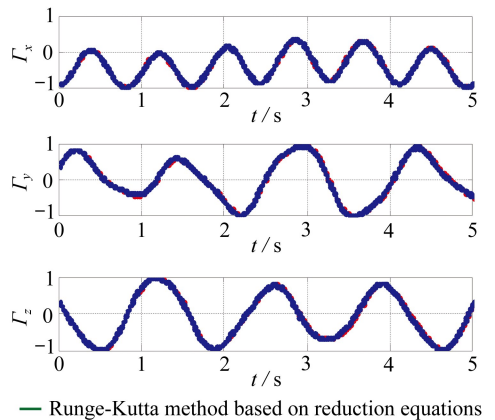


图 3 系统姿态随时间的变化

Fig. 3 The attitude time history of the system

图 2~图 4 为 3 种算法下刚体各运动参数随时间的变化曲线, 其中图 2 为刚体绕连体坐标

系各轴的角速度随时间的变化,由该图可知,3 轴角速度近似呈现规律性变化,其中 $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ 的转动最大幅值分别为 3.14 rad/s, 4.92 rad/s 和 4.92 rad/s,这是由于绕 y 轴和 z 轴的转动都受到了重力作用的影响.图 3 为质心相对于连体坐标系中的方向向量在与连体坐标系原点重合的惯性系中的投影随时间的变化,由该图可知,3 个方向的投影大致呈现规律性变化,且幅值都未超过 1,符合方向向量所应满足的性质.由于受到转动的耦合作用,图 4 中连体坐标系中 3 轴上的速度也呈现规律性变化.图 2~图 4 为 3 种算法下的运动参数的变化曲线,这 3 种算法下的参数变化曲线高度重合,从而证明了 3 种算法的正确性和一致性.

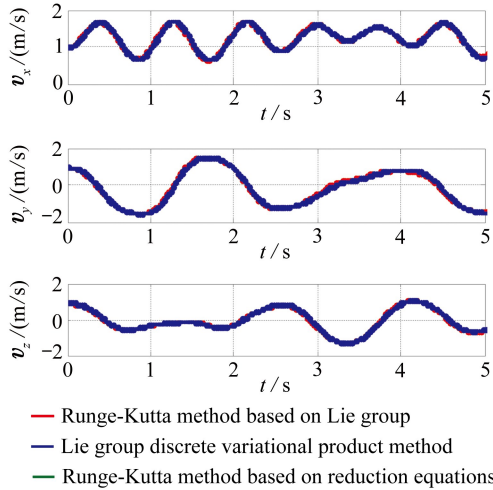


图 4 连体坐标系上速度随时间的变化

Fig. 4 The velocity time history in the body-fixed frame

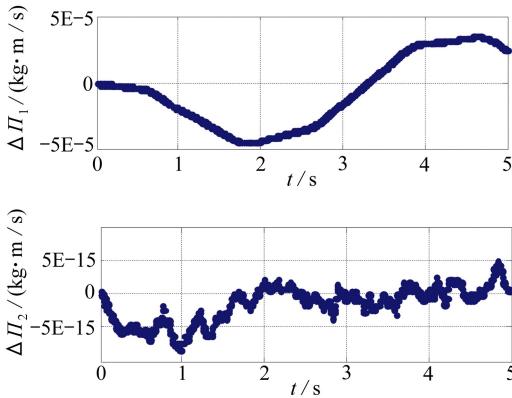


图 5 角动量的误差随时间的变化

Fig. 5 The error of momentum with time

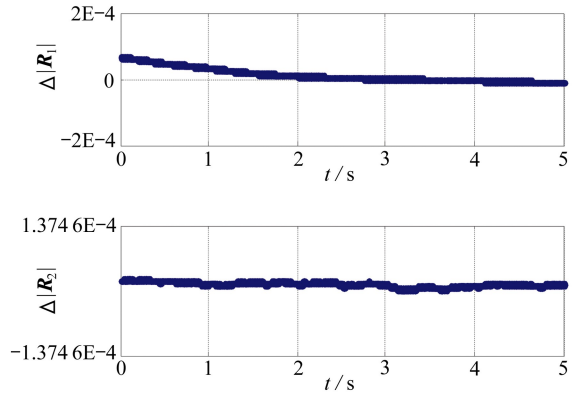


图 6 角动量及结构的误差随时间的变化

Fig. 6 The error of the proper value of rotation matrix with time

为进一步比较 Lie 群 Runge-Kutta 法和 Lie 群离散变分积分子这两种具有几何性质的算法在精度上的差异,对这两种算法在动量守恒性以及结构守恒性方面进行比较.图 5 和图 6 分别为基于 Lie 群的 Runge-Kutta 法和基于 Lie 群的离散变分积分子下的系统动量守恒和结构守恒性的比较.由计算结果可知,Lie 群 Runge-Kutta 法和 Lie 群离散变分积分子法两种算法的动量守恒计算误差数量级分别为 10^{-5} 和 10^{-14} , 旋转矩阵计算误差数量级分别为 10^{-5} 和 10^{-4} .由此可知,Lie 群离散变分积分子在动量保持和结构守恒性方面精度要高于 Runge-Kutta 法,尤其是在动量守恒方面,这也说明了在等步长情况下,Lie 群离散变分积分子可用于最优控制求解,而等

步长 Runge-Kutta 法却无法实现的原因。

8 结 论

相比参数较多的 Euler 角建模法,利用 Lie 群理论和变分法所建立的刚体动力学方程的形式更加简洁;基于连续变分和离散变分分别推导出了连续系统和离散系统的动力学方程;通过对 Runge-Kutta 法进行改进,使其能够求解具有维数不一性的 Lie 群动力学方程;通过 Kelly 变换和 Newton 迭代,克服了 Lie 群离散变分积分分子中的隐式求解问题。仿真结果说明在短时间的求解问题上,在步长为 0.01 s 时,3 种算法的精度都可以控制在 10^{-5} ,在效果上都具有较高的精度,可满足一般工程需要。

参考文献(References):

- [1] Chaturvedi N A, Lee T, Leok M, McClamroch N H. Nonlinear dynamics of the 3D pendulum [J]. *Nonlinear Science*, 2011, **21**(1): 3-32.
- [2] 边宇枢,高志慧. 6 自由度水下机器人动力学分析与运动控制[J]. 机械工程学报, 2007, **43**(7): 87-92.(BIAN Yu-shu, GAO Zhi-hui. Dynamic analysis and motion control of 6-dof underwater robot [J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2007, **43**(7): 87-92.(in Chinese))
- [3] 徐正武,唐国元. 四元数在水下航行体运动建模中的应用[J]. 中国舰船研究, 2014, **9**(2): 12-29.(XU Zheng-wu, TANG Guo-yuan. Applying the four-parameter approach to establish the motion model of an AUV[J]. *Chinese Journal of Ship Research*, 2014, **9**(2): 12-29.(in Chinese))
- [4] LIN Xi-chuan, GUO Shu-xiang. A simplified dynamics modeling of a spherical underwater vehicle[C]//*Proceeding of the 2008 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics*, 2009: 1140-1145.
- [5] Lee T. Computational geometric mechanics and control of rigid bodies[D]. PhD Thesis. Michigan: University of Michigan, 2008.
- [6] Lee T, McClamroch N H, Leok M. A Lie group variational integrator for the attitude dynamics of a rigid body with application to the 3D pendulum[C]//*Proceedings of the IEEE International Conference on Control Applications*, 2005: 962-967.
- [7] Nordkvist N, Sanyal A K. A Lie group variational integrator for rigid body motion in SE(3) with applications to underwater vehicle dynamics[C]//*49th IEEE Conference on Decision and Control*, 2010: 5414-5419.
- [8] Jiménez F, Kobilarov M, de Diego D M. Discrete variational optimal control[J]. *Journal of Nonlinear Science*, 2013, **23**(3): 393-426.
- [9] 丁希仑,刘颖. 用李群李代数分析具有空间柔性变形杆件的机器人动力学[J]. 机械工程学报, 2007, **43**(12): 184-189.(DING Xi-lun, LIU Ying. Dynamics analysis of robot with spatial compliant links using Lie group and Lie algebra[J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2007, **43**(12): 184-189.(in Chinese))
- [10] 张继锋,邓子辰,张凯. 结构动力方程求解的改进精细 Runge-Kutta 方法[J]. 应用数学和力学, 2015, **36**(4): 378-385.(ZHANG Ji-feng, DENG Zi-chen, ZHANG Kai. An improved precise Runge-Kutta method for structural dynamic equations[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, **36**(4): 378-385.(in Chinese))
- [11] 李庆军,叶学华,王博,王艳. 辛 Runge-Kutta 方法在卫星交会对接中的非线性动力学应用研究[J]. 应用数学和力学, 2014, **35**(12): 1299-1370.(LI Qing-jun, YE Xue-hua, WANG Bo,

- WANG Yan. Nonlinear dynamic behavior of the satellite rendezvous and docking based on the symplectic Runge-Kutta method[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, **35**(12): 1299-1370.(in Chinese)
- [12] 白龙, 戈新生. 基于李群离散变分积分分子 3D 摆姿态动力学研究[J]. 北京信息科技大学学报, 2013, **28**(3): 14-18.(BAI Long, GE Xin-sheng. Attitude dynamics of 3D pendulum based on the Lie group variational integrator[J]. *Journal of Beijing Information Science and Technology University*, 2013, **28**(3): 14-18.(in Chinese))
- [13] 白龙, 戈新生. 基于球摆模型的离散变分积分分子算法研究[J]. 动力学与控制学报, 2013, **11**(4): 295-300.(BAI Long, GE Xin-sheng. The discrete variational integrators method of the spherical pendulum[J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2013, **11**(4): 295-300.(in Chinese))
- [14] 刘延柱. 高等动力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2001: 93-105.(LIU Yan-zhu. *Advanced Dynamics*[M]. Beijing: Higher Education Press, 2001: 93-105.(in Chinese))
- [15] 丁丽娟, 程杞元. 数值计算方法[M]. 北京: 高等教育出版社, 2011: 300-305.(DING Li-juan, CHENG Qi-yuan. *Numerical Computation Method*[M]. Beijing: Higher Education Press, 2011: 300-305.(in Chinese))
- [16] Onishchik A L. *Lie Groups and Lie Algebras: Foundations of Lie Theory, Lie Transformation Groups*[M]. Beijing: Science Press, 2008: 44-52.

Lie Group and Lie Algebra Modeling for Numerical Calculation of Rigid Body Dynamics

BAI Long¹, DONG Zhi-feng¹, GE Xin-sheng²

(1. School of Mechanical Electronic & Information Engineering, China University of Mining and Technology(Beijing), Beijing 100083, P.R.China;

2. Mechanical & Electrical Engineering School, Beijing Information Science & Technology University, Beijing 100192, P.R.China)

Abstract: The Lie group dynamics equation for rigid bodies was derived based on the exponent mapping equivalence relationship between the Lie group and Lie algebra. The discrete Lie group variational integrator was derived according to the discrete variation theory. The momentum conservation of the 2 Lie group equations was demonstrated. The Lie group dynamics equation was processed so that every part has the same dimension and the equation can be solved with the Runge-Kutta method directly. The Runge-Kutta method to directly solve the Lie group dynamics equation with different dimensions was also built. The Lie group variational integrator was solved with the Lie algebraic transform, the Cayley transform and Newton iteration, respectively. The computation results of the 3 algorithms are highly identical to each other, the structure conservation and momentum conservation both have high precisions.

Key words: Lie group; Lie algebra; Runge-Kutta method; discrete variational integrator; free rigid body

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11472058)