

守恒高阶各向异性交通流模型基于 POD方法的降阶外推差分格式*

罗振东, 徐源

(华北电力大学 数理学院, 北京 102206)

摘要: 利用 Godunov 流方法和特征投影分解方法,对守恒高阶各向异性交通流模型建立一种自由度很少、精度足够高的降阶外推差分算法,并给出这种降阶外推差分算法近似解的误差估计和算法实现.最后,用数值例子说明数值结果与理论结果相吻合,并阐明这种降阶外推差分算法的优越性.

关键词: Godunov 流; 各向异性交通流模型; 降阶外推差分算法; 特征投影分解; 误差估计

中图分类号: O242.21 **文献标志码:** A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2015.08.009

引言

一个国家的交通是这个国家的命脉之一,其运输和管理系统先进与否是一个国家现代化程度的重要标志,直接影响国民经济的发展.随着社会经济的发展,由于交通建设和管理相对滞后而造成的交通阻塞对于经济发展的影响十分明显.无论国内还是国外,由交通阻塞所造成的经济损失和低下的效率都十分惊人.因此,交通流问题成了当今国内外的热点研究课题之一,受到了国内外专家的高度关注^[1-6].

研究交通流问题最为有效和实用的方法就是将其抽象为数学方程(一般为偏微分方程),而大多数的交通流问题是非线性交通流偏微分方程(组).在求解非线性偏微分方程时,只有极少数的方程可以得到解析解,大多数的非线性偏微分方程需要利用数值模拟方法求解其数值解以近似解代替解析解.经典差分方法是处理非线性偏微分方程的有效方法之一,但是在求解数值解过程中需要用特殊的方法来讨论其稳定性,并且要用许多处理流体方程的方法来求解才能保证数值解有较高精度.这样,随着计算过程截断误差的累计,即使有很好的有限差分方法也有可能在计算若干步后,出现浮点溢出,无法得到理想的数值解.因此,目前急需解决的重要问题是:在保证数值解有足够精度的前提下,如何有效降低有限差分格式的自由度、简化计算、节省计算量和存储要求,减少计算过程中截断误差的积累,以便获得理想的数值解.

大量实践证明:特征投影分解(proper orthogonal decomposition, 简记为 POD)方法^[7]是一

* 收稿日期: 2015-03-16; 修订日期: 2015-07-03

基金项目: 国家自然科学基金(11271127)

作者简介: 罗振东(1958—),男,广西桂平人,教授,博士,博士生导师(通讯作者. E-mail: zhdluo@ncepu.edu.cn).

种能有效减少自由度,并降低数值模型维数的高效逼近方法,该方法已经广泛应用于包括信号分析和模式识别^[8]、统计学、地球物理流体动力学和气象学^[9]等多个领域.POD方法的本质就是在最小二乘意义下,寻找已知数据的一组正交基,也就是求已知数据的一种最优逼近.目前,已经有一些将POD方法与有限差分方法、有限元方法以及有限体积方法相结合,建立降维模式的报道^[10-22],并且POD方法也被用于处理交通流方面的某些简单的交通流模型^[23-24].但在处理较为复杂的交通流模型时,POD方法是否有效、所得结果是否能满足要求还有待进一步研究.

本文的目标是建立守恒高阶各向异性交通流模型^[6]基于POD基的一种高精度降阶外推差分格式,并给出降阶外推差分格式解的误差估计和算法实现.守恒高阶各向异性交通流模型是一种能够描述复杂交通流的模型,它既可以模拟交通流中的平衡流,又可以模拟两个临界密度的非平衡流^[6],但是求解其差分数值解时计算量较大.通过用POD方法对其降阶,将能大大减少偏微分方程的未知量,从而有效减少计算量,削减计算时间.因此,本文较之文献^[23-24]的创新之处在于:在求解降阶外推差分格式时,需要对由POD基构成的未知量运用Godunov流^[25]求解.然而,由于由POD基经过线性组合而得到的降阶数值解与经典差分解存在误差,能否应用Godunov流求解是一个新的尚未被研究的问题.本文从理论分析及数值例子验证了用POD方法处理Godunov流是可行的,从而证明了POD方法对于处理复杂交通流模型问题是有效的,本文的工作是对现有工作^[23-24]的改进.

本文的安排如下:第1节给出守恒高阶各向异性交通流模型的经典差分格式及其基于Godunov流方法的求解,并给出经典差分格式的误差估计;第2节选取瞬像,利用POD方法处理瞬像,构造标准正交POD基函数,建立一种具有足够高精度、维数很低的降阶外推差分格式;第3节分析守恒高阶各向异性交通流模型降阶外推差分格式解的误差,并给出降阶外推差分格式的算法实现;第4节用数值例子验证理论结果与数值模拟结果相吻合,并阐明这种降阶外推仿真模型的优越性;第5节给出主要结论.

1 守恒高阶各向异性交通流模型的有限差分格式

守恒高阶各向异性交通流模型是定义在 $(0, L) \times (0, T)$ 上的守恒偏微分方程,可以描述如下:

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{s}(\mathbf{u}), & (x, t) \in (0, L) \times (0, T), \\ \rho(x, 0) = \rho^0(x), w(x, 0) = w^0(x), & x \in (0, L), \\ \rho(x, 0) = \rho_0(x), w(x, 0) = w_0(x), & t \in (0, T), \end{cases} \quad (1)$$

其中, L 是已知道路长度, T 是最大时间, $\mathbf{u} = (\rho, w)^\top$, $\mathbf{f} = (\rho V(w), wV(w))^\top$, $\mathbf{s} = (0, \tilde{\tau}^{-1}(V(w) - v_e(\rho)))^\top$, ρ 是未知车辆密度, w 是伪密度,可以理解为所需密度,在车辆跟随理论中 $1/w$ 表示为满足与实际速度相关的所需车头间距, V 是理想情况下车辆的平均速度, v_e 为实际情况下车辆的平均速度, $\tilde{\tau} = -\tau V'(w)$, τ 是弛豫时间.分别用 V_f 和 v_f 表示 V 和 v_e 的最大值.伪密度 w 与速度-密度函数 V, v_e 有如下关系:

$$v_e = V(w). \quad (2)$$

设 Δx 和 Δt 分别表示空间步长和时间步长.记 $\mathbf{u}_i^n = \mathbf{u}(x_i, t_n)$,则可以得到方程(1)如下的差分格式:

$$\mathbf{u}_i^{n+1} = \mathbf{u}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{u}_i^n, \mathbf{u}_{i+1}^n) - \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{u}_{i-1}^n, \mathbf{u}_i^n)) + \Delta t \mathbf{s}(\mathbf{u}_i^n), \quad (3)$$

其中, $i = 0, 1, 2, \dots, M + 1$ (即计算区域 $(0, L)$ 被分为 $M + 1$ 等份), $\hat{f} = (\hat{f}_1, \hat{f}_2)^T$ 是逼近 $f = (f_1, f_2)$ 的数值通量函数. 为了保证数值稳定性, 取 Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) 条件^[26]为 $\Delta t \leq \Delta x / V_f$. 对于差分格式 (3) 中非线性部分的计算, 应用 Godunov 流进行处理, 其形式为

$$\hat{f}_2^G(u_1, u_2) = \begin{cases} \min_{w_1 \leq w \leq w_2} f_2(w), & w_1 \leq w_2, \\ \max_{w_1 \geq w \geq w_2} f_2(w), & w_1 > w_2; \end{cases} \quad \hat{f}_1^G(u_1, u_2) = \frac{\rho_1}{w_1} \hat{f}_2^G(u_1, u_2), \quad (4)$$

其中 $\hat{f}_2^G(u_1, u_2) = \hat{f}(w_1, w_2)$ 即为 Godunov 流. 数值通量函数 \hat{f}_1^G 从

$$f_1(u(0)) = f_2(u(0))\rho(0)/w(0) \quad (5)$$

得到, 其中 $\rho(0)/w(0) = w_1/\rho_1$. 对于边界条件, 选择周期边界条件如下:

$$\rho_0^n = \rho_M^n, \quad \rho_{M+1}^n = \rho_1^n; \quad w_0^n = w_M^n, \quad w_{M+1}^n = w_1^n. \quad (6)$$

注 1 各向异性交通流模型为非线性流体方程, 在求其数值解时, 为了保证其稳定性, 需要满足 CFL 条件, 在实际问题中, 要求 CFL 条件为 $\Delta t \leq \Delta x / V_f$. 同时应用处理流体方程的方法如 Godunov 流, Lax-Friedrichs 流等, 可以更为准确地描述方程对应的问题. 在保证稳定性的情况下, 可以求得经典差分格式 (3) 的解与精确解之间的误差为

$$|u(x_i, t_n) - u_i^n| = O(\Delta x, \Delta t), \quad 1 \leq n \leq N, \quad 1 \leq i \leq M + 2. \quad (7)$$

这样, 只要给定道路最大速度 V_f , 最大平均速度 v_f , 空间步长 Δx , 速度-密度函数 $V(\rho)$, $v_e(\rho)$, 弛豫时间 τ 以及初始函数 $\rho^0(x)$, 利用周期边界条件和 Godunov 流就可以求解经典差分格式 (3), 并得到一组数值解 $\{\rho_i^n, w_i^n\}_{n=1}^N (i = 1, 2, \dots, M + 2)$.

2 POD 基和基于 POD 方法的外推差分格式构造

2.1 构造 POD 基

提取经典有限差分格式数值解的前 $K (0 < K \ll N)$ 组 $\{\rho_i^k, w_i^k\}_{k=1}^K (1 \leq i \leq M + 2)$ 作为瞬像, 并且表示成下面的两个 $(M + 2) \times K$ 矩阵:

$$\mathbf{A}_\rho = \begin{pmatrix} \rho_1^1 & \rho_1^2 & \cdots & \rho_1^K \\ \rho_2^1 & \rho_2^2 & \cdots & \rho_2^K \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{M+2}^1 & \rho_{M+2}^2 & \cdots & \rho_{M+2}^K \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_w = \begin{pmatrix} w_1^1 & w_1^2 & \cdots & w_1^K \\ w_2^1 & w_2^2 & \cdots & w_2^K \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{M+2}^1 & w_{M+2}^2 & \cdots & w_{M+2}^K \end{pmatrix}. \quad (8)$$

对于矩阵 $\mathbf{A}_s \in A^{(M+2) \times K} (s = \rho \text{ 或 } w)$ 有奇值分解

$$\mathbf{A}_s = \mathbf{U}_s \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{V}_s^T, \quad (9)$$

其中 $\mathbf{U}_s \in R^{(M+2) \times (M+2)}$ 和 $\mathbf{V}_s \in R^{K \times K}$ 都是正交矩阵, $\boldsymbol{\Sigma}_s = \text{diag}\{\sigma_{s1}, \sigma_{s2}, \dots, \sigma_{sr}\} \in R^{r \times r}$ 是对角矩阵, $\sigma_{si} (i = 1, 2, \dots, r)$ 是 \mathbf{A}_s 的奇值, 且 $\sigma_{s1} \geq \sigma_{s2} \geq \dots \geq \sigma_{sr} > 0$, $\mathbf{U}_s = (\boldsymbol{\phi}_{s1}, \boldsymbol{\phi}_{s2}, \dots, \boldsymbol{\phi}_{s(M+2)}) \in R^{(M+2) \times (M+2)}$ 和 $\mathbf{Y}_s = (\boldsymbol{\varphi}_{s1}, \boldsymbol{\varphi}_{s2}, \dots, \boldsymbol{\varphi}_{sK}) \in R^{K \times K}$ 分别是由 $\mathbf{A}_s \mathbf{A}_s^T$ 和 $\mathbf{A}_s^T \mathbf{A}_s$ 的正交特征向量构成的特征矩阵. 由于 $\mathbf{A}_s \mathbf{A}_s^T$ 的阶数远大于 $\mathbf{A}_s^T \mathbf{A}_s$ 的阶数, 而它们的非零特征值相同, 因此可以先求出 $\mathbf{A}_s^T \mathbf{A}_s$ 的特征值 λ_{sj} 和特征向量 $\boldsymbol{\varphi}_{sj} (j = 1, 2, \dots, r)$, 然后利用关系式

$$\boldsymbol{\phi}_{sj} = \frac{1}{\sigma_{sj}} \mathbf{A}_s \boldsymbol{\varphi}_{sj}, \quad j = 1, 2, \dots, r, \quad (10)$$

可得到 $\mathbf{A}_s \mathbf{A}_s^T$ 的非零特征值对应的特征向量 $\boldsymbol{\phi}_{sj} (1 \leq j \leq r \leq K)$.

其中 $\boldsymbol{\rho}_{M+2}^n$ 和 $\boldsymbol{w}_{M+2}^n (1 \leq n \leq K)$ 是方程(3)的 K 个解构成的向量, $\boldsymbol{\beta}_\rho^n = (\beta_{\rho 1}, \beta_{\rho 2}, \dots, \beta_{M\rho})^T$ 和 $\boldsymbol{\beta}_w^n = (\beta_{w 1}, \beta_{w 2}, \dots, \beta_{Mw})^T$ 是两个未知向量. 由于 Φ_ρ 和 Φ_w 的列向量是正交向量, 因此分别将它们乘在两个方程组的两边, 可以得到下面的降阶差分格式:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\beta}_\rho^n = \Phi_\rho^T \boldsymbol{\rho}_{M+2}^n, \boldsymbol{\beta}_w^n = \Phi_w^T \boldsymbol{w}_{M+2}^n, & n = 1, 2, \dots, K; \\ \boldsymbol{\beta}_\rho^{n+1} = \boldsymbol{\beta}_\rho^n - \Phi_\rho^T \hat{F}_1(\Phi_\rho \boldsymbol{\beta}_\rho^n, \Phi_w \boldsymbol{\beta}_w^n) + \Phi_\rho^T S_1(\Phi_\rho \boldsymbol{\beta}_\rho^n, \Phi_w \boldsymbol{\beta}_w^n), \\ \boldsymbol{\beta}_w^{n+1} = \boldsymbol{\beta}_w^n - \Phi_w^T \hat{F}_2(\Phi_\rho \boldsymbol{\beta}_\rho^n, \Phi_w \boldsymbol{\beta}_w^n) + \Phi_w^T S_2(\Phi_\rho \boldsymbol{\beta}_\rho^n, \Phi_w \boldsymbol{\beta}_w^n), \end{cases} \quad n = K, K + 1, \dots, N - 1, \quad (20)$$

从式(20)解出 $\boldsymbol{\beta}_\rho^n$ 和 $\boldsymbol{\beta}_w^n (n = 1, 2, \dots, N)$ 后, 就可以得到各向异性交通流模型降阶格式的解向量:

$$\boldsymbol{U}_{M+2}^{*n} = (\boldsymbol{\rho}_{M+2}^{*n}, \boldsymbol{w}_{M+2}^{*n}), \boldsymbol{\rho}_{M+2}^{*n} = \Phi_\rho \boldsymbol{\beta}_\rho^n, \boldsymbol{w}_{M+2}^{*n} = \Phi_w \boldsymbol{\beta}_w^n, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (21)$$

于是, 可以得到各向异性交通流的降阶解的分量.

3 外推降维有限差分格式解的误差估计及算法实现

3.1 外推降维有限差分格式解的误差估计

先将式(19)写成如下形式:

$$\boldsymbol{U}_{M+2}^{*n+1} = \boldsymbol{U}_{M+2}^{*n} - \hat{F}(\boldsymbol{U}_{M+2}^{*n}) + \boldsymbol{S}(\boldsymbol{U}_{M+2}^{*n}), \quad K \leq n \leq N - 1. \quad (22)$$

由式(14)有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{U}_{M+2}^{*n+1} - \boldsymbol{U}_{M+2}^{n+1} &= \boldsymbol{U}_{M+2}^{*n} - \boldsymbol{U}_{M+2}^n - [\hat{F}(\boldsymbol{U}_{M+2}^{*n}) - \hat{F}(\boldsymbol{U}_{M+2}^n)] + \\ &[\boldsymbol{S}(\boldsymbol{U}_{M+2}^{*n}) - \boldsymbol{S}(\boldsymbol{U}_{M+2}^n)], \quad K \leq n \leq N - 1. \end{aligned} \quad (23)$$

令 $\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{U}_i^{*n} - \boldsymbol{U}_i^n$, 则有

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{e}_{n+1}\|_2 &\leq \|\boldsymbol{e}_n\|_2 + \|\hat{F}(\boldsymbol{U}_{M+2}^{*n}) - \hat{F}(\boldsymbol{U}_{M+2}^n)\|_2 + \\ &\|\boldsymbol{S}(\boldsymbol{U}_{M+2}^{*n}) - \boldsymbol{S}(\boldsymbol{U}_{M+2}^n)\|_2, \quad K \leq n \leq N - 1. \end{aligned} \quad (24)$$

由于当稳定条件 $\Delta t \leq \Delta x / V_i$ 成立时, $|\rho|_i^{*n}, |w|_i^{*n}, |\rho|_i^n$ 和 $|w|_i^n$ 都是有界的, 从而有

$$\begin{cases} \|\hat{F}(\boldsymbol{U}_{M+2}^{*n}) - \hat{F}(\boldsymbol{U}_{M+2}^n)\|_2 \leq M_1 \frac{\Delta t}{\Delta x} \|\boldsymbol{e}_n\|_2, \\ \|\boldsymbol{S}(\boldsymbol{U}_{M+2}^{*n}) - \boldsymbol{S}(\boldsymbol{U}_{M+2}^n)\|_2 \leq M_2 \Delta t \|\boldsymbol{e}_n\|_2, \end{cases} \quad (25)$$

其中 M_1 和 M_2 是与 Δx 和 Δt 无关的常数, 因此式(24)可以写成

$$\|\boldsymbol{e}_{n+1}\|_2 \leq \|\boldsymbol{e}_n\|_2 + M_1 \frac{\Delta t}{\Delta x} \|\boldsymbol{e}_n\|_2 + M_2 \Delta t \|\boldsymbol{e}_n\|_2, \quad K \leq n \leq N - 1. \quad (26)$$

对式(26)从 $K, K + 1, \dots, n - 1$ 递推, 得

$$\|\boldsymbol{e}_{n+1}\|_2 \leq \left(1 + M_1 \frac{\Delta t}{\Delta x} + M_2 \Delta t\right)^{n-K} \|\boldsymbol{e}_n\|_2, \quad K \leq n \leq N - 1. \quad (27)$$

而当 $1 \leq n \leq K$ 时, 由式(12)可得 $\boldsymbol{U}_{M+2}^{*n} = (\Phi_\rho \Phi_\rho^T \boldsymbol{A}_\rho \boldsymbol{\varepsilon}_n, \Phi_w \Phi_w^T \boldsymbol{A}_w \boldsymbol{\varepsilon}_n)^T$, 因此有

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{e}_n\|_2 &= \|\boldsymbol{U}_{M+2}^n - \boldsymbol{U}_{M+2}^{*n}\|_2 = \|\boldsymbol{U}_{M+2}^n - (\Phi_\rho \Phi_\rho^T \boldsymbol{A}_\rho \boldsymbol{\varepsilon}_n, \Phi_w \Phi_w^T \boldsymbol{A}_w \boldsymbol{\varepsilon}_n)^T\|_2 \leq \\ &\sqrt{\lambda_{\rho(M\rho+1)}} + \sqrt{\lambda_{w(Mw+1)}}, \quad 1 \leq n \leq K, \end{aligned}$$

$$\|\boldsymbol{e}_n\|_2 \leq \left(1 + M_1 \frac{\Delta t}{\Delta x} + M_2 \Delta t\right)^{n-K} [\sqrt{\lambda_{\rho(M\rho+1)}} + \sqrt{\lambda_{w(Mw+1)}}],$$

$$K + 1 \leq n \leq N - 1.$$

当稳定条件 $\Delta t < \Delta x/V_f$ 成立时, $M_1(\Delta t/\Delta x) < M_1/V_f < 1, M_2\Delta t < M_2\Delta x/V_f < 1$.

由此得到下面的结论.

定理 1 若 $\mathbf{U}_{M+2}^n (n = 1, 2, \dots, N)$ 是经典有限差分格式(3) 的解组成的向量, $\mathbf{U}_{M+2}^{*n} (n = 1, 2, \dots, N)$ 是式(3) 对应的外推降维差分格式(20) 和(21) 的解, 则当稳定条件 $\Delta t < \Delta x/V_f$ 成立时, 有

$$\|\mathbf{U}_{M+2}^n - \mathbf{U}_{M+2}^{*n}\|_2 \leq C(n) [\sqrt{\lambda_{\rho(M_p+1)}} + \sqrt{\lambda_{w(M_w+1)}}], \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

其中 $C(n) = 1 (1 \leq n \leq K), C(n) = (1 + M_1\Delta t/\Delta x + M_2\Delta t)^{n-K} (K + 1 \leq n \leq N)$.

更进一步, 结合定理 1 和式(7) 可以得到如下定理.

定理 2 在定理 1 的条件下, 各向异性交通流模型的精确解和外推降阶差分格式的解 $(\rho_i^{*n}, w_i^{*n}) (i = 1, 2, \dots, M + 1)$ 有如下的误差估计:

$$|\rho(x_i, t_n) - \rho_i^{*n}| + |w(x_i, t_n) - w_i^{*n}| = O(C(n) [\sqrt{\lambda_{\rho(M_p+1)}} + \sqrt{\lambda_{w(M_w+1)}}], \Delta x, \Delta t), \quad 1 \leq n \leq N. \quad (28)$$

注 2 POD 方法可以缩减计算时间和节省计算机内存的原因就是外推降阶方程只含有很少的 $(M_p + M_w)$ 个未知量(通常取 $M_p = M_w = 7$ 即可满足精度要求). 在定理 1 中可以注意到 $C(n) = (1 + M_1\Delta t/\Delta x + M_2\Delta t)^{n-K} (K + 1 \leq n \leq N)$ 是由于计算 $n > K$ 的时间节点 t_n 的降阶解累计的误差, 这样可以根据定理 1 和定理 2 给出的误差估计选取 POD 基的数目 M_p 和 M_w 使得 $[\sqrt{\lambda_{\rho(M_p+1)}} + \sqrt{\lambda_{w(M_w+1)}}] = O(\Delta x, \Delta t)$, 并且在精度不满足要求, 即可在 $[\sqrt{\lambda_{\rho(M_p+1)}} + \sqrt{\lambda_{w(M_w+1)}}] > \min\{\Delta x, \Delta t\}$ 时, 逐渐调整 POD 基以达到精度要求.

3.2 外推降维有限差分格式的算法实现

在用外推降维差分格式求解各向异性交通流模型数值解时, 可以按照如下的步骤进行算法实现.

步 1 对于给定道路的最大速度 V_f , 速度-密度关系函数 V, v_e , 最大车流量密度 ρ_{jam} , 弛豫时间 τ , 时间步长 Δt , 空间步长 Δx , 初值函数 $\rho^0(x)$, 应用 Godunov 流和周期边界条件求解经典差分格式:

$$\begin{cases} \rho_i^0 = \rho_i^0(x_i), w_i^0 = V^{-1}(v_e(\rho_i^0(x(i))))), & i = 0, 1, 2, \dots, M + 1; \\ \rho_0^n = \rho_M^n, \rho_{M+1}^n = \rho_1^n; w_0^n = w_M^n, w_{M+1}^n = w_1^n, & n = 1, 2, \dots, K; \\ \mathbf{u}_i^{n+1} = \mathbf{u}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\hat{f}(\mathbf{u}_i^n, \mathbf{u}_{i+1}^n) - \hat{f}(\mathbf{u}_{i-1}^n, \mathbf{u}_i^n)) + \Delta t s(\mathbf{u}_i^n), & i = 1, 2, \dots, M + 2; n = 1, 2, \dots, K. \end{cases}$$

用 $\{\rho_i^n, w_i^n\}_{n=1}^K (i = 1, 2, \dots, M + 2)$ 构成瞬像(对于实际道路交通模拟, 可以通过实测记录数据抽取样本点构成瞬像), 其中 $M + 2$ 是由空间步长 Δx 确定的步数.

步 2 组成瞬像矩阵 $\mathbf{A}_\rho = (\rho_i^\ell)_{(M+2) \times K}$ 和 $\mathbf{A}_w = (w_i^\ell)_{(M+2) \times K}$. 解线性方程组 $(\mathbf{A}_\rho^T \mathbf{A}_\rho - \lambda_\rho \mathbf{I}_K) \boldsymbol{\varphi}_\rho = 0, (\mathbf{A}_w^T \mathbf{A}_w - \lambda_w \mathbf{I}_K) \boldsymbol{\varphi}_w = 0$, 求出正特征值并按照从大到小排列 $\lambda_{\rho_1} \geq \lambda_{\rho_2} \geq \dots \geq \lambda_{\rho_{r_\rho}} > 0 (\lambda_{\rho_{r_\rho}} = \text{rank } \mathbf{A}_\rho)$ 和 $\lambda_{w_1} \geq \lambda_{w_2} \geq \dots \geq \lambda_{w_{r_w}} > 0 (\lambda_{w_{r_w}} = \text{rank } \mathbf{A}_w)$ 以及相应的特征向量 $\boldsymbol{\varphi}_{\rho_j} (j = 1, 2, \dots, r_\rho)$ 和 $\boldsymbol{\varphi}_{w_j} (j = 1, 2, \dots, r_w)$.

步 3 对于所要求的精度 $\gamma = O(\Delta t, \Delta x)$, 确定 $M_p (\leq r_\rho)$ 和 $M_w (\leq r_w)$ 使得 $[\sqrt{\lambda_{\rho(M_p+1)}} + \sqrt{\lambda_{w(M_w+1)}}] \leq \gamma$, 构造 POD 基 $\boldsymbol{\Phi}_\rho = (\boldsymbol{\phi}_{\rho_1}, \boldsymbol{\phi}_{\rho_2}, \dots, \boldsymbol{\phi}_{\rho_{M_p}})$ ($\boldsymbol{\phi}_{\rho_j} = \mathbf{A}_\rho \boldsymbol{\varphi}_{\rho_j} / \sqrt{\lambda_{\rho_j}}, j = 1, 2, \dots, M_p$) 和 $\boldsymbol{\Phi}_w = (\boldsymbol{\phi}_{w_1}, \boldsymbol{\phi}_{w_2}, \dots, \boldsymbol{\phi}_{w_{M_w}})$ ($\boldsymbol{\phi}_{w_j} = \mathbf{A}_w \boldsymbol{\varphi}_{w_j} / \sqrt{\lambda_{w_j}}, j = 1, 2, \dots, M_w$).

步 4 构建 Godunov 流:

$$\hat{F}_1^G(u_1, u_2) = \frac{\beta_{\rho_1}}{\beta_{w_1}} \hat{F}_2^G(u_1, u_2), \quad \hat{F}_2^G(u_1, u_2) = \begin{cases} \min_{\beta_{w_1} \leq \beta_w \leq \beta_{w_2}} \hat{F}_2(\beta_w), & \beta_{w_1} \leq \beta_{w_2}; \\ \max_{\beta_{w_1} \geq \beta_w \geq \beta_{w_2}} \hat{F}_2(\beta_w), & \beta_{w_1} > \beta_{w_2}. \end{cases}$$

步 5 设置周期边界条件:

$$\beta_{\rho_0}^n = \beta_{\rho_M}^n, \beta_{\rho_{M+1}}^n = \beta_{\rho_1}^n; \beta_{w_0}^n = \beta_{w_M}^n, \beta_{w_{M+1}}^n = \beta_{w_1}^n, \quad n = K, K+1, \dots, N.$$

步 6 令 $\rho_{M+2}^n = (\rho_1^n, \rho_2^n, \dots, \rho_{M+2}^n)^T$ 和 $w_{M+2}^n = (w_1^n, w_2^n, \dots, w_{M+2}^n)^T (0 \leq n \leq K)$, 解降阶差分格式

$$\begin{cases} \beta_{\rho}^n = \Phi_{\rho}^T \rho_{M+2}^n, \beta_w^n = \Phi_w^T w_{M+2}^n, & 0 \leq n \leq K, \\ \beta_{\rho}^{n+1} = \beta_{\rho}^n - \Phi_{\rho}^T \hat{F}_1(\Phi_{\rho} \beta_{\rho}^n, \Phi_w \beta_w^n), & n = K, K+1, \dots, N-1, \\ \beta_w^{n+1} = \beta_w^n - \Phi_w^T \hat{F}_2(\Phi_{\rho} \beta_{\rho}^n, \Phi_w \beta_w^n), & n = K, K+1, \dots, N-1, \\ \rho_{M+2}^{*n} = \Phi_{\rho} \beta_{\rho}^n, w_{M+2}^{*n} = \Phi_w \beta_w^n, & n = 1, 2, \dots, N, \end{cases}$$

得到各向异性交通流模型降阶差分格式的解 $\rho_{M+2}^{*n} = (\rho_1^{*n}, \rho_2^{*n}, \dots, \rho_{M+2}^{*n})$ 和 $w_{M+2}^{*n} = (w_1^{*n}, w_2^{*n}, \dots, w_{M+2}^{*n})$.

步 7 如果 $C(n) [\sqrt{\lambda_{\rho(M_{\rho}+1)}} + \sqrt{\lambda_{w(M_w+1)}}] \leq \gamma$, 那么 $\rho_{M+2}^{*n} = (\rho_1^{*n}, \rho_2^{*n}, \dots, \rho_{M+2}^{*n})$ 和 $w_{M+2}^{*n} = (w_1^{*n}, w_2^{*n}, \dots, w_{M+2}^{*n})$ 就是所要求精度的解. 否则, 若 $C(n) [\sqrt{\lambda_{\rho(M_{\rho}+1)}} + \sqrt{\lambda_{w(M_w+1)}}] > \gamma$, 令 $(\rho_1^i, \rho_2^i, \dots, \rho_{M+2}^i) = (\rho_1^{*i}, \rho_2^{*i}, \dots, \rho_{M+2}^{*i})$ 和 $(w_1^i, w_2^i, \dots, w_{M+2}^i) = (w_1^{*i}, w_2^{*i}, \dots, w_{M+2}^{*i}) (i = n - (K - 1), n - (K - 2), \dots, n)$, 并重复步 2 至步 6 直到解出满足精度要求的所有时间节点的解 $\rho_{M+2}^{*n} = (\rho_1^{*n}, \rho_2^{*n}, \dots, \rho_{M+2}^{*n})$ 和 $w_{M+2}^{*n} = (w_1^{*n}, w_2^{*n}, \dots, w_{M+2}^{*n}) (n = 1, 2, \dots, K, K+1, \dots, N)$.

注 3 步 7 可以改为“如果 $\|\rho_{M+2}^{n+1} - \rho_{M+2}^{*n+1}\|_2 \leq \|\rho_{M+2}^n - \rho_{M+2}^{*n}\|_2$ 且 $\|w_{M+2}^{n+1} - w_{M+2}^{*n+1}\|_2 \leq \|w_{M+2}^n - w_{M+2}^{*n}\|_2 (n = K, K+1, \dots, N-1)$, 那么 $\rho_m^{*n} = (\rho_1^{*n}, \rho_2^{*n}, \dots, \rho_{M+2}^{*n})$ 和 $w_m^{*n} = (w_1^{*n}, w_2^{*n}, \dots, w_{M+2}^{*n}) (n = 1, 2, \dots, N)$ 就是所要求精度的解. 否则, 即若 $\|\rho_{M+2}^{n+1} - \rho_{M+2}^{*n+1}\|_2 > \|\rho_{M+2}^n - \rho_{M+2}^{*n}\|_2$ 或 $\|w_{M+2}^{n+1} - w_{M+2}^{*n+1}\|_2 > \|w_{M+2}^n - w_{M+2}^{*n}\|_2 (n = K, K+1, \dots, N-1)$, 令 $(\rho_1^i, \rho_2^i, \dots, \rho_{M+2}^i) = (\rho_1^{*i}, \rho_2^{*i}, \dots, \rho_{M+2}^{*i})$ 和 $(w_1^i, w_2^i, \dots, w_{M+2}^i) = (w_1^{*i}, w_2^{*i}, \dots, w_{M+2}^{*i}) (i = n - (K - 1), n - (K - 2), \dots, n)$, 并重复步 2 至步 6 直到解出满足精度要求的所有时间节点的解 $\rho_{M+2}^{*n} = (\rho_1^{*n}, \rho_2^{*n}, \dots, \rho_{M+2}^{*n})$ 和 $w_{M+2}^{*n} = (w_1^{*n}, w_2^{*n}, \dots, w_{M+2}^{*n}) (n = 1, 2, \dots, K, K+1, \dots, N)$.

注 4 按照上面的 7 步即可依次求解出所有时间节点上的解. 如果按照经典的算法, 由于计算过程中截断误差的累计, 在未知量过大时计算到一定程度就可能出现浮点溢出而无法继续计算. 而在外推降阶差分格式中未知量的个数得到了极大的缩减, 因此在计算时可以节省大量计算时间. 并且在外推过程中, 可以通过适当的更新瞬像和 POD 基使计算一直进行下去直至得到所有的数值解, 这是经典差分格式所不能的.

4 数值算例

下面给出一个数值例子说明外推降阶差分格式的优越性.

为了模拟两个临界密度的非平衡流, 即为了模拟交通堵塞情况, 参考文献[6]的经典数值方法, 取道路长度 $L = 16\ 000$ m, 时间长度 $T = 750$ s, 空间步长 $\Delta x = 10$ m, 最大速度 $V_f = v_f = 25$ m/s, 弛豫时间 $\tau = 30$ s, 最大密度 $\rho_{jam} = 0.16$ veh/m, 速度-密度关系函数

$$V(\rho) = 1 - \rho/\rho_{jam},$$

$$v_e(\rho) = v_f \left\{ \left[1 + \exp\left(\frac{\rho/\rho_{jam} - 0.25}{0.06}\right) \right]^{-1} - 3.72 \times 10^{-6} \right\},$$

$$\rho^0(x) = 0.22 + 0.2 \left\{ \left[\cosh \left[\frac{160}{L} \left(x - \frac{3L}{8} \right) \right] \right]^{-2} - \frac{1}{4} \left[\cosh \left[\frac{40}{L} \left(x - \frac{13L}{32} \right) \right] \right]^{-2} \right\}.$$

首先,用 Godunov 流求解经典差分格式(3)得到时间 $T = 750$ s 时的车辆密度解,并画在图 1 中.图 1 中的激波是一个临界密度(交通堵塞)的非平衡流的变化情况,正好反映了真实的车辆密度变化(由于伪密度是所需密度,是一种理想情况,没有将其解画出来).图 1 模拟的是交通流中的时走时停波(这是一种由驾驶员本身的行为造成的交通现象,如由车辆的减速、加速而改变交通情况).在初始处(图中为 $t = 0$ 时刻,6 000 m 附近)道路交通达到其临界密度(即此时交通流量达到最大,车辆密度和车辆速度处于一种平衡状态,若此时车辆速度降低,则车辆密度会增大,出现交通阻塞),接下来(图中为 $t = 0$ 时刻,8 000 m 附近)出现一较大的扰动,影响交通情况,导致车辆密度瞬间增大并随即减小.由于扰动的出现,原本处于临界密度时的车辆速度变小,而扰动随之发展并在道路下游形成多个扰动,与此同时,上游的车辆在前面的车辆出现减速的情况下大量聚集并形成向后发展的交通阻塞.从图中可以看出,在 0~6 000 m 处,随着时间的增加交通阻塞逐渐向后移动;在 8 000~16 000 m 处,由于波动的发展与传播,逐渐形成了几个车辆密度较大的激波,也就是形成了暂时的交通堵塞.

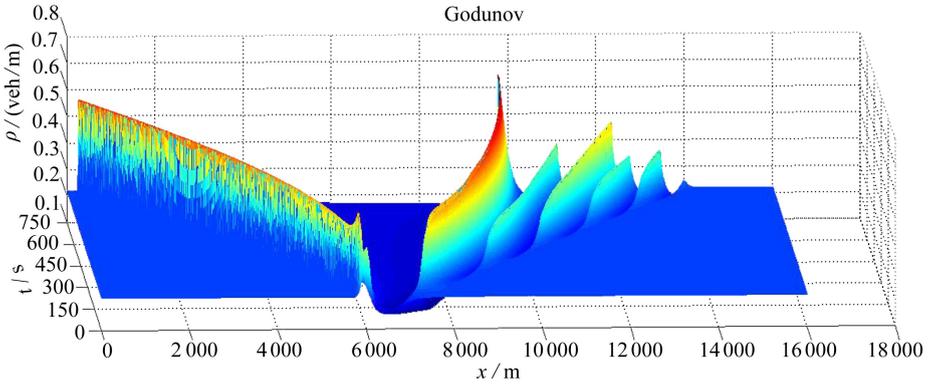


图 1 经典差分格式的车辆密度解

Fig. 1 The vehicle density solution of the classic difference scheme

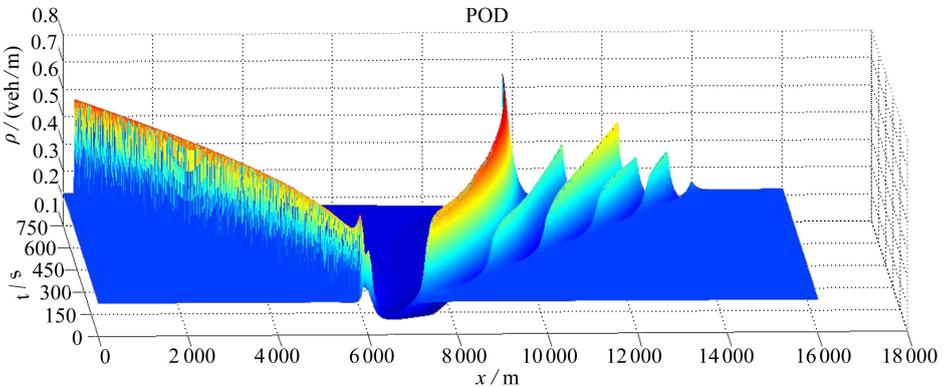


图 2 降阶外推差分格式的车辆密度解

Fig. 2 The vehicle density solution of the reduced-order extrapolating difference scheme

其次,用 Godunov 流求解经典差分格式(3)得到最初 20 步(即 $K = 20$) 的解作为初始瞬像,经过计算得到 $\sqrt{\lambda_{\rho 8}} + \sqrt{\lambda_{u 8}} \leq 5 \times 10^{-4}$, 因此,在计算时需取 7 个 POD 基以满足精度要求.然后

利用降阶差分格式(20)和(21)按求解外推降阶差分方程的6个步骤计算求出 $T = 750$ s 即迭代至 1 875 步时的车辆密度数值解,并画在图 2 中。

对比图 1 和图 2 可以看出,虽然降阶外推差分格式只有 7 个自由度(未知量),但是所得到的车辆密度数值解很接近于含有 16 000 个自由度的经典差分格式的车辆密度数值解.因此,降阶外推差分格式在求解过程中所需要的时间和占用的内存要比经典差分格式少,而且计算过程中截断误差的积累也会极大地减少,从而能提高实际计算的精确度和效率。

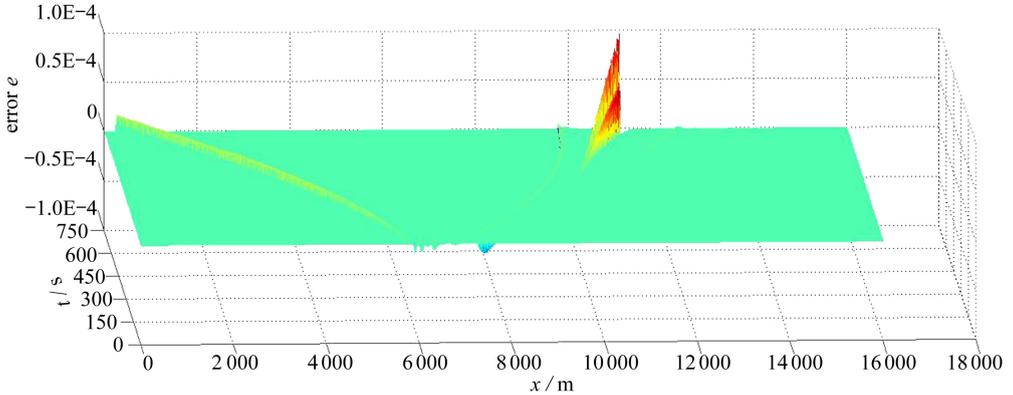


图 3 经典差分格式与降阶外推差分格式的车辆密度解的误差

Fig. 3 The errors between the solution of the classic difference scheme and the solution of the reduced-order extrapolating difference scheme

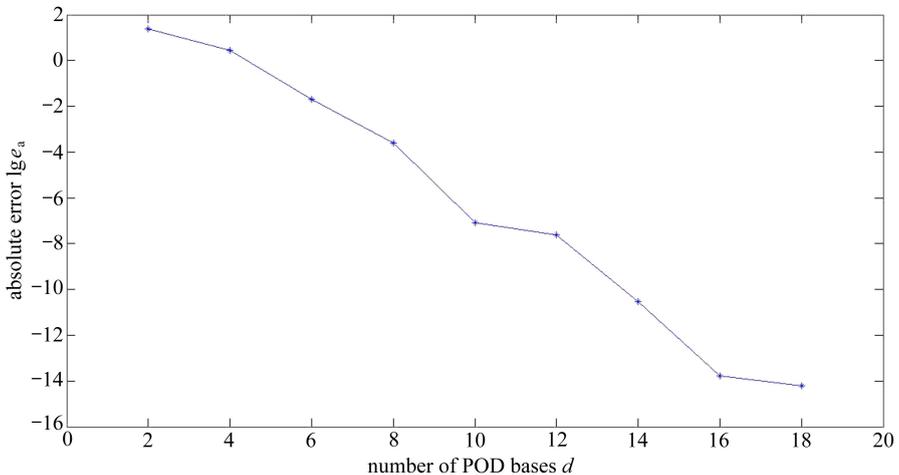


图 4 不同 POD 基降阶差分格式车辆密度解与经典差分格式车辆密度解的误差

Fig. 4 The errors between the solutions of the reduced-order extrapolating difference schemes with different numbers of POD bases and the solution of the classic difference scheme

图 3 为 $T = 750$ s 时降阶外推差分格式与经典有限差分格式的解的误差.从图中可以看到,在绝大多数的点处,两个解的误差非常小,在道路为 10 000~12 000 m 处,时间达到 750 s 时两者的误差达到了最大,但是依旧在允许的误差范围内($\leq 5 \times 10^{-4}$).图 4 是取不同数目的 POD 基的降阶解与经典差分解的误差比较.从图中可以看出,取得 7 个 POD 基时,所得到的降阶数值解就能满足精度要求(误差不超过 5×10^{-4}).因此,降阶外推差分格式能极大地减少自由度、简化计算、节省计算量和存储要求,减少计算过程中截断误差的积累和计算时间的耗费,是

求解各向异性交通流模型很有效和可行的方法。

5 结 论

本文利用流体计算中的 Godunov 流方法和 POD 方法建立了各向异性交通流模型的一种具有足够高精度、维数较低的降阶外推差分格式,并给出这种降阶外推差分格式解的误差估计和算法实现.最后用数值例子验证了数值结果与理论结果相吻合.各向异性交通流模型基于 POD 方法的降阶外推差分格式的优点是:只用少量的几个 POD 基建立的降阶外推差分格式求得的解与经典差分格式的解很接近.而在此过程中,降阶外推差分格式的计算时间和内存占用要比经典差分格式的少很多.体现了基于 POD 方法的降阶外推差分格式的优越性.

参考文献(References):

- [1] Payne H J. Models of freeway traffic and control[C]//*Part of the Simulation Councils Proceeding Series. Mathematical Models of Public Systems*, 1971: 51-60.
- [2] Daganzo C F. Requiem for second-order fluid approximations of traffic flow[J]. *Transportation Research, Part B: Methodological*, 1995, **29**(4): 277-286.
- [3] Aw A, Rascle M. Resurrection of “second order” models of traffic flow[J]. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 2000, **60**(3): 916-938.
- [4] Fukunaga K. *Introduction to Statistical Recognition*[M]. New York: Academic Press, 1990.
- [5] Zhang H M. A non-equilibrium traffic model devoid of gas-like behavior[J]. *Transportation Research, Part B: Methodological*, 2002, **36**(3): 275-290.
- [6] ZHANG Peng, Wong S C, Dai S Q. A conserved higher-order anisotropic traffic flow model: description of equilibrium and nonequilibrium flows[J]. *Transportation Research, Part B: Methodological*, 2009, **43**(5): 562-574.
- [7] Holmes P, Lumley J L, Berkooz G. *Turbulence, Coherent Structures, Dynamical Systems and Symmetry*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.
- [8] Fukunaga K. *Introduction to Statistical Recognition*[M]. New York: Academic Press, 1990.
- [9] Jolliffe I T. *Principal Component Analysis*[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2002.
- [10] LUO Zhen-dong, ZHOU Yan-jie, YANG Xiao-zhong. A reduced finite element formulation based on proper orthogonal decomposition for Burgers equation [J]. *Applied Numerical Mathematics*, 2009, **59**(8): 1933-1946.
- [11] LI Huan-rong, LUO Zhen-dong, CHEN Jing. Numerical simulation based on proper orthogonal decomposition for two-dimensional solute transport problem[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2011, **35**(5): 2489-2498.
- [12] LUO Zhen-dong, XIE Zheng-hui, CHEN Jing. A reduced MFE formulation based on POD for the non-stationary conduction-convection problems[J]. *Acta Mathematica Scientia*, 2011, **31**(5): 1765-1785.
- [13] LUO Zhen-dong, LI Hong, ZHOU Yan-jie, HUANG Xiao-ming. A reduced FVE formulation based on POD method and error analysis for two-dimensional viscoelastic problem[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2012, **385**(1): 310-321.
- [14] LUO Zhen-dong, CHEN Jing, Navon I M, YANG Xiao-zhong. Mixed finite element formulation and error estimates based on proper orthogonal decomposition for the non-stationary Navier-Stokes equations[J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2008, **47**(1): 1-19.
- [15] LUO Zhen-dong, WANG Rui-wen, ZHU Jiang. Finite difference scheme based on proper or-

- thogonal decomposition for the non-stationary Navier-Stokes equations[J]. *Science in China Series A: Mathematics*, 2007, **50**(8): 1186-1196.
- [16] 孙萍, 罗振东, 周艳杰. 热传导对流方程基于 POD 的差分格式[J]. 计算数学, 2009, **31**(3): 323-334. (SUN Ping, LUO Zhen-dong, ZHOU Yan-jie. A FDS based on POD method for convection heat conduction equation[J]. *Mathematica Numerica Sinica*, 2009, **31**(3): 323-334. (in Chinese))
- [17] LUO Zhen-dong, LI Hong, ZHOU Yan-jie, XIE Zhen-hui. A reduced finite difference scheme and error estimates based on POD method for two-dimensional solute transport problems[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2012, **385**(1): 371-383.
- [18] LUO Zhen-dong, DU Juan, XIE Zheng-hui, GUO Yan. A reduced stabilized mixed finite element formulation based on proper orthogonal decomposition for the no-stationary Navier-Stokes equations[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2011, **88**(1): 31-46.
- [19] 罗振东, 陈静, 谢正辉, 安静, 孙萍. 抛物型方程基于 POD 方法的时间二阶精度 CN 有限元降维格式[J]. 中国科学: 数学, 2011, **41**(5): 447-460. (LUO Zhen-dong, CHEN Jing, XIE Zheng-hui, AN Jing, SUN Ping. A reduced second-order time accurate finite element formulation based on POD for parabolic equations[J]. *Scientia Sinica: Mathematica*, 2011, **41**(5): 447-460. (in Chinese))
- [20] 罗振东, 欧秋兰, 谢亚辉. 非正常 Stokes 方程一种基于 POD 方法的简化有限差分格式[J]. 应用数学和力学, 2011, **32**(7): 795-806. (LUO Zhen-dong, OU Qiu-lan, XIE Zheng-hui. A reduced finite difference scheme and error estimates based on POD method for the non-stationary Stokes equation[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2011, **32**(7): 795-806. (in Chinese))
- [21] LUO Zhen-dong, CHEN Jing, ZHU Jiang, WANG Rui-wen, Navon I M. An optimizing reduced order FDS for the tropical Pacific Ocean reduced gravity model[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2007, **55**(2): 143-161.
- [22] LUO Zhen-dong, CHEN Jing, Navon I M, ZHU Jiang. An optimizing reduced PLSMFE formulation for non-stationary conduction-convection problems[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluid*, 2009, **60**(4): 409-436.
- [23] 罗振东, 高俊强, 孙萍, 安静. 交通流模型基于特征投影分解技术的外推降维有限差分格式[J]. 计算数学, 2013, **35**(2): 159-170. (LUO Zhen-dong, GAO Jun-qiang, SUN Ping, AN Jing. A extrapolation reduced-order FDS based on POD technique for traffic flow model[J]. *Mathematica Numerica Sinica*, 2013, **35**(2): 159-170. (in Chinese))
- [24] LUO Zhen-dong, XIE Di, TENG Fei. A POD-based reduced-order FD extrapolating algorithm for traffic flow[J]. *Advances in Difference Equations*, 2014, **2014**(269): 1-13.
- [25] 张文生. 科学计算中的偏微分方程有限差分方法[M]. 高等教育出版社, 2006. (ZHANG Wen-sheng. *Finite Difference Methods for Partial Differential Equations in Science Computation* [M]. Higher Education Press, 2006. (in Chinese))
- [26] 刘儒勋, 舒其旺. 计算流体力学的若干新方法[M]. 北京: 科学出版社, 2003. (LIU Ru-xun, SHU Qi-wang. *Several New Methods of Computational Fluid Dynamics* [M]. Beijing: Science Press, 2003. (in Chinese))

A Reduced-Order Extrapolating FDM for Conserved High-Order Anisotropic Traffic Flow Models

LUO Zhen-dong, XU Yuan

(*School of Mathematics and Physics, North China Electric Power University,
Beijing 102206, P.R.China*)

Abstract: A reduced-order extrapolating finite difference method (FDM) with sufficiently high accuracy and very few degrees of freedom for conserved high-order anisotropic traffic flow models was established by means of the Godunov fluid method and the POD technique. The error estimate of the reduced-order approximate solutions and the algorithm implementation of the reduced-order extrapolating difference scheme were presented. Finally, a numerical example was used to illustrate that the results of the proposed method were consistent with those of the classic difference scheme. Moreover, the high efficiency and sufficient accuracy of the reduced-order extrapolating simulation method are shown.

Key words: Godunov fluid; conserved high-order anisotropic traffic flow model; reduced-order extrapolating finite difference scheme; POD; error estimate

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11271127)