

基于子网格边界近似 Riemann 解的 人为粘性方法*

翟传磊, 勇 珩

(北京应用物理与计算数学研究所, 北京 100094)

摘要: 在交错网格型 Lagrange(拉格朗日)流体力学算法中,通常采用人为粘性捕捉激波,人为粘性的好坏对于计算结果至关重要.研究了一种基于子网格边界处近似 Riemann 解的新型人为粘性.新人为粘性能够满足动量守恒和熵不等式,利用子网格边界速度差中引入的限制器,新人为粘性能够区分激波和等熵压缩,并能满足球对称问题中的波面不变性.新人为粘性在典型模型数值模拟及惯性约束聚变黑腔整体数值模拟中取得了较好的结果.

关键词: Lagrange 流体力学; 人为粘性; 近似 Riemann 解; 大长宽比网格; 惯性约束聚变

中图分类号: O341.82 **文献标志码:** A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2015.10.004

引言

Lagrange 方法^[1]中计算网格随流体运动,能够自然地追踪各种物质界面,在多介质问题和自由边界问题中得到了广泛的应用.在使用交错网格型 Lagrange 方法求解无粘 Euler(欧拉)方程组时,通常采用激波捕捉方法,这时需要引入人为粘性方法捕捉激波间断,人为粘性对于激波捕捉的效果至关重要.

人为粘性只是数值模拟中人为增加的粘性,其实质是引入人为耗散,将动能不可逆地转化为内能,使得人为耗散产生的熵增等于激波引起的物理熵增,这样就能正确地模拟出激波波前和波后状态的关系.半个世纪以来的数值模拟实践表明,人为粘性是一种实用且合理的激波捕捉方法.

人为粘性方法首先由 von Neumann 和 Richtmyer 在一维激波计算中提出^[2],该方法中人为粘性形式为速度差 Δu 的二次项,在激波后产生非物理振荡.后来 Landshoff^[3] 和 Kuropatenko^[4] 分别增加了速度差 Δu 的一次项,给出了一种人为粘性,抑制了激波的波后振荡.上述人为粘性在一维情况下发挥了重要作用,但推广到二维情况会存在以下两个难点:① 很难定义网格内

* 收稿日期: 2014-12-25; 修订日期: 2015-09-07

基金项目: 国家高技术研究发展计划(863计划)(2012A01303);国家自然科学基金(91130002; 11371065);中国工程物理研究院科学技术发展基金(2012A0202010)

作者简介: 翟传磊(1978—),男,河南人,副研究员,硕士(通讯作者. Tel: +86-10-59872402; E-mail: zhai_chuanlei@iapcm.ac.cn).

的速度差,尤其对于扭曲网格;② 标量人为粘性不能区分激波传播的方向,会在其它方向同样引入人为粘性的影响。

近年来二维 Lagrange 计算方法取得了较大进展,Caramana 等利用散度算子和梯度算子的相容离散,得到了保持总能量守恒的相容拉氏计算方法^[5]。基于交错网格上的相容 Lagrange 格式,开展了多种人为粘性的研究.Caramana 等^[6]提出了人为粘性需要满足以下 5 个条件:

- 1) 耗散性:即人为粘性将动能不可逆地转化为内能。
- 2) Galileo(伽利略)不变性:即人为粘性对于均匀速度场不起作用,速度场区域均匀时人为粘性应该光滑消失。
- 3) 自相似运动不变性:即人为粘性在刚体旋转和均匀压缩时自动消失。
- 4) 波面不变性:即只在激波法向施加人为粘性,而对激波切向无人为粘性,如对球面汇聚激波,只在径向施加粘性,周向无人为粘性。
- 5) 人为粘性力连续性:即人为粘性应该随压缩消失自动趋于 0。

他们在每条边界处采用 Kuropatenko 形式人为粘性,并使用了区分激波压缩和等熵压缩的限制因子,得到了边人为粘性^[6],边人为粘性可以区分激波压缩和等熵压缩,解决了数值模拟耗散过大的问题,但对计算网格有较强的依赖性,当激波传播方向与网格边界方向不匹配时会出现非物理的网格扭曲.Campbell 和 Shashkov 提出了张量人为粘性方法^[7],减小了激波传播方向对于计算网格边界方向的依赖,但对大长宽比网格的适应性较差.Loubère 和 Maire 等基于网格中心的近似 Riemann 解,给出了一种人为粘性,并推广到二阶精度^[8],取得了较好的结果。但该人为粘性中并不能区分等熵压缩和激波压缩,并且不满足波面不变性,在使用射线型网格计算一维球对称问题时,数值结果随不同分片角度差别很大。虽然二阶精度算法^[9]会减弱此问题,但需要采用特别的保持球对称重构方法,否则很难保持对称性。另外,由于激波传播的一维性,在模拟激波时常常增加激波传播方向的网格数以保证激波的分辨率,但另外一个方向使用的网格往往较少,会使得激波附近网格两个方向的尺度之比较大,即出现大长宽比网格。为了更好地模拟激波,需要人为粘性适用于大长宽比网格。

本文将改进网格中心 Riemann 解人为粘性^[8]中的一阶方法,将网格内人为粘性对节点的作用力分解为沿子网格各个边界处的力,并采用限制子来区分等熵压缩和激波压缩,给出了一种人为粘性。本文提出的人为粘性能够满足自相似运动不变性和波面不变性,同时对计算网格适应性较强,在典型问题数值模拟中取得了较好的结果。

1 相容拉氏流体力学算法

交错网格型 Lagrange 方法一般求解下述形式的流体力学方程组:

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) = \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad (1)$$

$$\rho \frac{d}{dt} \mathbf{u} = -\nabla p, \quad (2)$$

$$\rho \frac{d}{dt} e = -p \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad (3)$$

其中 ρ 为密度, \mathbf{u} 为速度向量, p 为压强, e 为比内能。上述方程组还需要状态方程才能封闭。一般情况下状态方程可以表示为密度和比内能的形式 $p = P(\rho, e)$, 特别地,对于多方气体,一般取

为 $p = (\gamma - 1)\rho e$, 其中 γ 为多方指数.

在本文中, 与网格相关的物理量使用下标 c , 与节点相关的物理量使用下标 n , 网格 c 内与节点 n 相关的子网格的物理量用下标 cn . $C(n)$ 表示包含节点 n 的所有网格的集合, $N(c)$ 表示网格 c 的所有节点的集合.

我们采用如图 1 所示的交错网格, 位置和速度定义在网格节点上, 力学量 (如密度、比内能、压强) 定义在网格中心. 每个网格 Ω_c 由 N_c 个节点围成, 可以分为 N_c 个子网格 Ω_{cn} , 其质量为 m_{cn} . 对于某个节点 n , 其周围有 C_n 个子网格, 形成节点处动量方程离散的控制体, 控制体的质量为 $m_n = \sum_{n \in C(n)} m_{cn}$. 子网格边界的长度分别为 L_{cn}^{\pm} , 子网格边界的法向分别记为 N_{cn}^{\pm} .

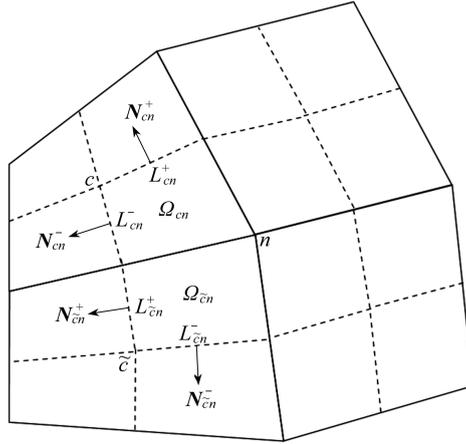


图 1 交错网格及子网格示意图

Fig. 1 Schematic of the staggered grid and the submesh

下面我们首先给出不考虑人为粘性情况下流体力学方程的相容离散格式. 动量方程的离散格式为

$$m_n \frac{\mathbf{u}_n^{t+\Delta t} - \mathbf{u}_n^t}{\Delta t} = \sum_{c \in C(n)} \mathbf{F}_{cn}^{\text{pressure}}, \tag{4}$$

其中 $\mathbf{F}_{cn}^{\text{pressure}}$ 为网格 c 内的压强对节点 n 的作用力, 具体表达形式为

$$\mathbf{F}_{cn}^{\text{pressure}} = -p_c (L_{cn}^+ \mathbf{N}_{cn}^+ + L_{cn}^- \mathbf{N}_{cn}^-). \tag{5}$$

为了保持总能量守恒^[4], 可以得到内能方程相容的离散形式为

$$m_c \frac{e_c^{t+\Delta t} - e_c^t}{\Delta t} = - \sum_{n \in N(c)} \mathbf{F}_{cn}^{\text{pressure}} \cdot \mathbf{u}_n. \tag{6}$$

从动量方程的离散中可以得到, 当网格对节点的作用力满足

$$\sum_{n \in N(c)} \mathbf{F}_{cn}^{\text{pressure}} = \mathbf{0} \tag{7}$$

时, 离散格式能够保持系统的动量守恒.

将格式推广到二维柱坐标系 (z, r) 情形时, 为了保持球对称性质, 动量方程通常采用面积分形式^[10], 内能方程在单位弧度旋转体上求解. 具体离散格式可以写成如下形式:

$$\mu_n \frac{\mathbf{u}_n^{t+\Delta t} - \mathbf{u}_n^t}{\Delta t} = \sum_{c \in C(n)} \mathbf{F}_{cn}^{\text{pressure}}, \tag{8}$$

$$m_c \frac{e_c^{t+\Delta t} - e_c^t}{\Delta t} = - \sum_{n \in N(c)} r_n \mathbf{F}_{cn}^{\text{pressure}} \cdot \mathbf{u}_n, \quad (9)$$

其中 μ_n 为面质量, r_n 为节点 n 的坐标 r .

2 基于子网格边界 Riemann 解的人为粘性

2.1 人为粘性构造

从相容 Lagrange 方法的构造过程可以看出, 网格对于节点的作用力可以看作压强通过子网格边界对节点施加的作用力. 当考虑人为粘性时, 我们将网格对于节点的全部作用力仍然写成通过网格边界的形式如下:

$$\mathbf{F}_{cn}^{\text{total}} = \mathbf{F}_{cn}^{\text{pressure}} + \mathbf{F}_{cn}^{\text{viscous}} = - \Pi_{cn}^+ L_{cn}^+ \mathbf{N}_{cn}^+ - \Pi_{cn}^- L_{cn}^- \mathbf{N}_{cn}^-, \quad (10)$$

其中 Π_{cn}^\pm 为子网格边界处的压强, 采用近似 Riemann 解得到.

$$\Pi_{cn}^\pm = p_c - Z_{cn}^\pm \Delta \mathbf{u}_{cn}^\pm \cdot \mathbf{N}_{cn}^\pm, \quad (11)$$

上式中 Z_{cn}^\pm 为子网格边界处的质量流^[11], 具体表达式为

$$Z_{cn}^\pm = \rho_c (\sigma_c + C_Q \Gamma_{cn}^\pm |\Delta \mathbf{u}_{cn}^\pm \cdot \mathbf{N}_{cn}^\pm|), \quad (12)$$

其中 ρ_c 为网格内的密度, σ_c 为网格内的声速, C_Q 为常数(在本文的数值模拟中取为 1), $\Delta \mathbf{u}_{cn}^\pm$ 为子网格边界处的速度差, Γ_{cn}^\pm 为物质参数, 对于多方气体, 可以定义为

$$\Gamma_{cn}^\pm = \begin{cases} \frac{\gamma + 1}{2}, & \Delta \mathbf{u}_{cn}^\pm \cdot \mathbf{N}_{cn}^\pm < 0, \\ 0, & \Delta \mathbf{u}_{cn}^\pm \cdot \mathbf{N}_{cn}^\pm \geq 0. \end{cases} \quad (13)$$

从而网格对节点的作用力可以表示为

$$\mathbf{F}_{cn}^{\text{total}} = -p_c (L_{cn}^+ \mathbf{N}_{cn}^+ + L_{cn}^- \mathbf{N}_{cn}^-) + Z_{cn}^+ L_{cn}^+ (\mathbf{N}_{cn}^+ \otimes \mathbf{N}_{cn}^+) \cdot \Delta \mathbf{u}_{cn}^+ + Z_{cn}^- L_{cn}^- (\mathbf{N}_{cn}^- \otimes \mathbf{N}_{cn}^-) \cdot \Delta \mathbf{u}_{cn}^-, \quad (14)$$

其中, 等号右侧第 1 项为网格内压强对于节点的作用力, 其它两项为人为粘性通过子网格边界的作用力. 现在剩下的问题就是如何定义子网格边界处的速度差 $\Delta \mathbf{u}_{cn}^\pm$.

我们定义子网格边界处的速度差为如下形式:

$$\Delta \mathbf{u}_{cn}^+ = (1 - \varphi_{cn}^+) (\mathbf{u}_c - \mathbf{u}_n), \quad \Delta \mathbf{u}_{cn}^- = (1 - \varphi_{cn}^-) (\mathbf{u}_c - \mathbf{u}_n), \quad (15)$$

其中, φ_{cn}^\pm 是用于区分等熵压缩和激波压缩的限制器^[6]. 此限制器为一维 TVD 限制器的二维推广, 使用限制器后的边人为粘性^[6] 能够满足自相似运动和波面不变性. 对于速度二阶导数为 0 的情况(如等熵压缩或自相似运动), 限制器为 1.

子网格边界速度采用式(15)中的定义后, 人为粘性的作用力可以表示为

$$\mathbf{F}_{cn}^{\text{viscous}} = \mathbf{M}_{cn} (\mathbf{u}_c - \mathbf{u}_n), \quad (16)$$

其中

$$\mathbf{M}_{cn} = (1 - \varphi_{cn}^+) Z_{cn}^+ L_{cn}^+ (\mathbf{N}_{cn}^+ \otimes \mathbf{N}_{cn}^+) + (1 - \varphi_{cn}^-) Z_{cn}^- L_{cn}^- (\mathbf{N}_{cn}^- \otimes \mathbf{N}_{cn}^-). \quad (17)$$

网格中心速度 \mathbf{u}_c 通过满足动量守恒的关系式

$$\sum_{n \in N(c)} \mathbf{F}_{cn}^{\text{viscous}} = \mathbf{0} \quad (18)$$

求出. 写成矩阵的形式为

$$\sum_n \mathbf{M}_{cn} \mathbf{u}_c = \sum_n (\mathbf{M}_{cn} \mathbf{u}_n). \quad (19)$$

当网格内子网格边界处的限制器不全为 1 时,左侧矩阵 $\sum_n \mathbf{M}_{cn}$ 为对称正定矩阵,可以保证网格中心速度求解的唯一性.如果网格内子网格边界处的限制器全为 1,则表明网格内速度二阶导数为 0,此时网格中心速度可以由网格节点速度插值得到.

得到网格中心的速度后,利用式(16)可以得到网格对每个节点的作用力.与相容拉氏格式中压强的作用力累加,就可以进行动量方程和内能方程的离散.

2.2 人为粘性满足的性质

2.2.1 满足熵不等式

利用 Gibbs 关系式,网格内熵的变化可以写成

$$m_c T_c \frac{dS_c}{dt} = m_c \left[\frac{de_c}{dt} + p_c \frac{d\left(\frac{1}{\rho_c}\right)}{dt} \right] = - \sum_{n \in N(c)} \mathbf{F}_{cn}^{\text{viscous}} \cdot \mathbf{u}_n \quad (20)$$

利用等式(18)和矩阵 \mathbf{M}_{cn} 为对称正定矩阵,可以得到

$$m_c T_c \frac{dS_c}{dt} = \sum_{n \in N(c)} \mathbf{F}_{cn}^{\text{viscous}} \cdot (\mathbf{u}_c - \mathbf{u}_n) = \sum_{n \in N(c)} (\mathbf{u}_c - \mathbf{u}_n)^T \mathbf{M}_{cn} (\mathbf{u}_c - \mathbf{u}_n) \geq 0. \quad (21)$$

这表明新人为粘性能够满足熵不等式.

2.2.2 保持等熵运动特性

对于等熵运动情况,限制器值为 1,所以 $\mathbf{M}_{cn} = \mathbf{0}$,从而得到

$$m_c T_c \frac{dS_c}{dt} = \sum_{n \in N(c)} (\mathbf{u}_c - \mathbf{u}_n)^T \mathbf{0} (\mathbf{u}_c - \mathbf{u}_n) = 0. \quad (22)$$

说明新人为粘性对于等熵运动不起作用,能够保持等熵流动中的熵不变.

2.2.3 在等角度射线型网格上,满足波面不变性

对于一维对称问题,在角度均匀射线型网格上计算时,为了满足波面不变性要求节点的加速度与角度方向分片数无关.

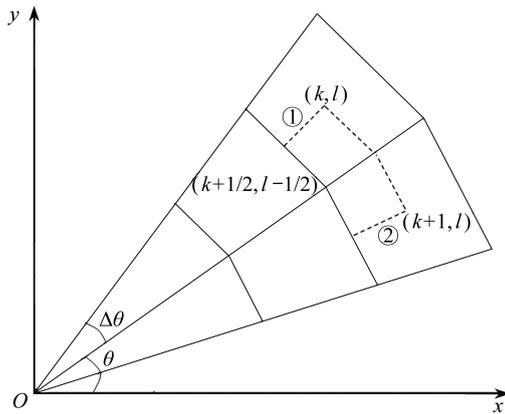


图 2 角度均匀射线型网格示意图

Fig. 2 Schematic of the equal angular polar grid

对于角度均匀射线型网格,如图 2 所示,我们首先说明一阶中心 Riemann 解人为粘性计算得到的节点速度与不同角度划分相关. k 和 l 分别为角度方向和半径方向的网格索引, $\Delta\theta$ 为相邻射线方向之间的夹角, θ 为节点 $(k+1/2, l-1/2)$ 对应的角度.为了简单起见,此处将证明网格 (k, l) 和 $(k+1, l)$ 分别通过子网格边界 ① 和 ② 对于节点 $(k+1/2, l-1/2)$ 的人为粘性作

用力得到的节点加速度与角度 $\Delta\theta$ 相关.

经过几何运算可以得到,节点 $(k + 1/2, l - 1/2)$ 的控制体中与网格 (k, l) 和 $(k + 1, l)$ 相关的子网格的面积为

$$A_{k+1/2, l-1/2}^{k, l} = \frac{3R_{l-1/2} + R_{l+1/2}}{4}(R_{l+1/2} - R_{l-1/2}) \frac{\sin(\Delta\theta)}{2}, \quad (23)$$

其中 $R_{l+1/2}, R_{l-1/2}$ 分别为对应网格节点与原点的距离.

根据几何关系,同样容易得到网格 (k, l) 中子网格边界①的长度和法向量分别为

$$L_1 = \frac{R_{l+1/2} - R_{l-1/2}}{2} \cos\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right), N_1 = \begin{pmatrix} \sin\left(\theta - \frac{\Delta\theta}{2}\right) \\ -\cos\left(\theta - \frac{\Delta\theta}{2}\right) \end{pmatrix}. \quad (24)$$

对于网格中心 Riemann 解人为粘性,根据其人为粘性作用力的表达式,可以得到网格 (k, l) 通过子网格边界①对节点 $(k + 1/2, l - 1/2)$ 的作用力为

$$Z_1 L_1 (N_1 \otimes N_1) \left(U_l \begin{pmatrix} \cos\left(\theta - \frac{\Delta\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\theta - \frac{\Delta\theta}{2}\right) \end{pmatrix} - U_{l-1/2} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \right), \quad (25)$$

其中 Z_1 为边界①处近似 Riemann 解中的质量流, U_l 和 $U_{l-1/2}$ 分别为对应网格中心与网格节点的速度值,速度方向均假设为与原点连线方向.对式(25)进行化简可以得到作用力为

$$-Z_1 L_1 U_{l-1/2} \begin{pmatrix} -\sin\left(\theta - \frac{\Delta\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) \\ \cos\left(\theta - \frac{\Delta\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) \end{pmatrix}. \quad (26)$$

同样可以得到网格 $(k + 1, l)$ 通过子网格边界②对节点 $(k + 1/2, l - 1/2)$ 的作用力为

$$-Z_1 L_1 U_{l-1/2} \begin{pmatrix} \sin\left(\theta + \frac{\Delta\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) \\ -\cos\left(\theta + \frac{\Delta\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) \end{pmatrix}. \quad (27)$$

两者相加可以得到两个网格的作用力之和为

$$-2Z_1 L_1 U_{l-1/2} \sin^2\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}. \quad (28)$$

可以看出两条子网格边界对于节点的作用力之和方向为该节点与圆心连接方向,能够保证对称性.

从作用力与节点控制体体积的表达式可以看出,两者相除得到的节点加速度与 $\tan(\Delta\theta/2)$ 相关,这说明对于不同角度划分,计算结果存在差异.一阶精度网格中心 Riemann 解人为粘性并不能满足波面不变性.

为了使得人为粘性能够满足波面不变性, Maire 等^[9]提出了二阶精度方法.但对于二阶精度人为粘性方法,类似上述分析方法,为了满足波面不变性,需要使得重构后的速度分布在节点处的插值与节点处的速度方向一致.保持球对称的重构方法一般采用局部球坐标系进行,计算量较大.

根据限制器的如下表达形式^[6]：

$$\psi_k = \max[0, \min(0.5(r_{l,k} + r_{r,k}), r_{l,k}, r_{r,k}, 1)],$$

$$r_{l,k} = \frac{\Delta \mathbf{u}_{k+1} \cdot \Delta \hat{\mathbf{u}}_k}{|\Delta \mathbf{x}_{k+1} \cdot \Delta \hat{\mathbf{x}}_k|} \frac{|\Delta \mathbf{x}_k|}{|\Delta \mathbf{u}_k|}, r_{r,k} = \frac{\Delta \mathbf{u}_{k-1} \cdot \Delta \hat{\mathbf{u}}_k}{|\Delta \mathbf{x}_{k-1} \cdot \Delta \hat{\mathbf{x}}_k|} \frac{|\Delta \mathbf{x}_k|}{|\Delta \mathbf{u}_k|}.$$

可以证明在等角度射线型网格上,如果节点的速度是球对称的,角度方向上各角度的速度差相等,从而 $r_{l,k} = r_{r,k} = 1$, 进而子网格边界①和②处的限制器为 1.根据人为粘性作用力的表达式(14),可以得到通过子网格边界①和②的作用力为 0.

类似前面的计算方法,可以证明通过另外两条子网格边界的作用力之和与质量的比值与角度 $\Delta\theta$ 无关.

综合各子网格边界处的作用力,可以证明最终得到的人为粘性对于节点加速度的贡献值与角度 $\Delta\theta$ 无关.从而证明了新人为粘性在等角度射线型网格上满足波面不变性.

3 数值结果

3.1 Noh 问题

Noh 问题^[12]是流体力学 Lagrange 模拟的经典算例.球对称 Noh 问题的计算参数如下:单位密度的 $\gamma = 5/3$ 的理想气体单位半径球沿半径方向以单位速度向球心运动.其精确解用激波后的密度表示,其值为 64,在 $t = 0.6$ 时刻激波运动到半径 0.2 处.波后密度与激波位置是检验数值方法的主要标准.

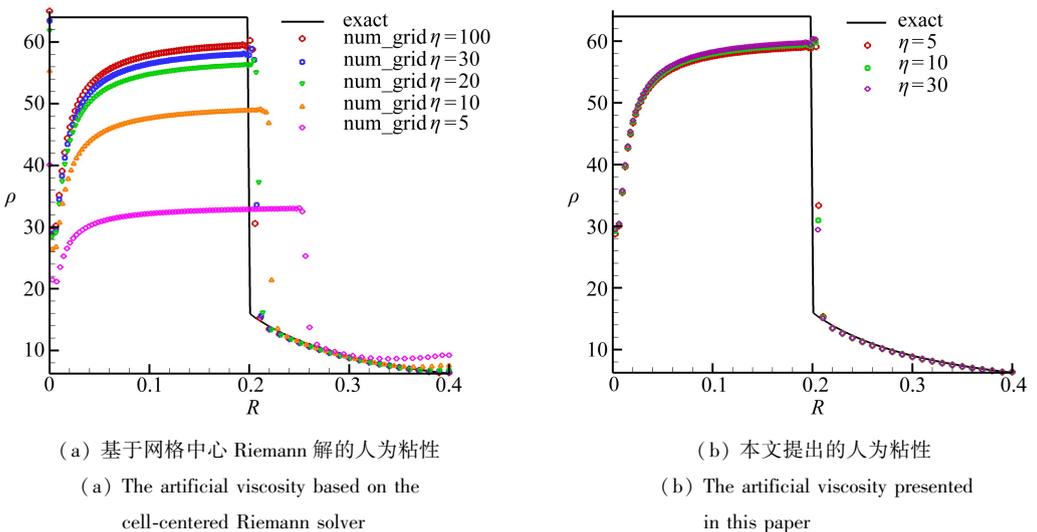


图 3 球对称 Noh 问题不同角度分片数计算结果对比 ($t = 0.6$)

Fig. 3 Comparison of densities on the polar mesh with different zone numbers at $t = 0.6$

图 3 给出了采用等角度射线型时网格中心 Riemann 解人为粘性与本文中的人为粘性的计算结果.其中实线为精确解,不同符号表示角度方向使用图例中对应网格数的计算结果.可以看出网格中心 Riemann 解人为粘性不满足波面不变性,在角度方向上人为粘性仍然起了较大作用,不同角度分片数时结果差别很大;而本文中的人为粘性采用了限制器,能够限制角度方向人为粘性的作用从而满足波面不变性,不同角度分片数计算结果基本一致,计算结果与精确解符合较好.边人为粘性的计算结果也同样表明需要采用限制器来消除角度方向人为粘性

的作用^[6].

图 4 给出了初始网格采用直角四边形的计算结果,可以看出边人为粘性对于网格的依赖性很强,当激波方向与网格边界方向不一致时网格形变严重,尤其在对称轴和固壁边界附近;其它 3 个人为粘性保持了较好的网格形状.

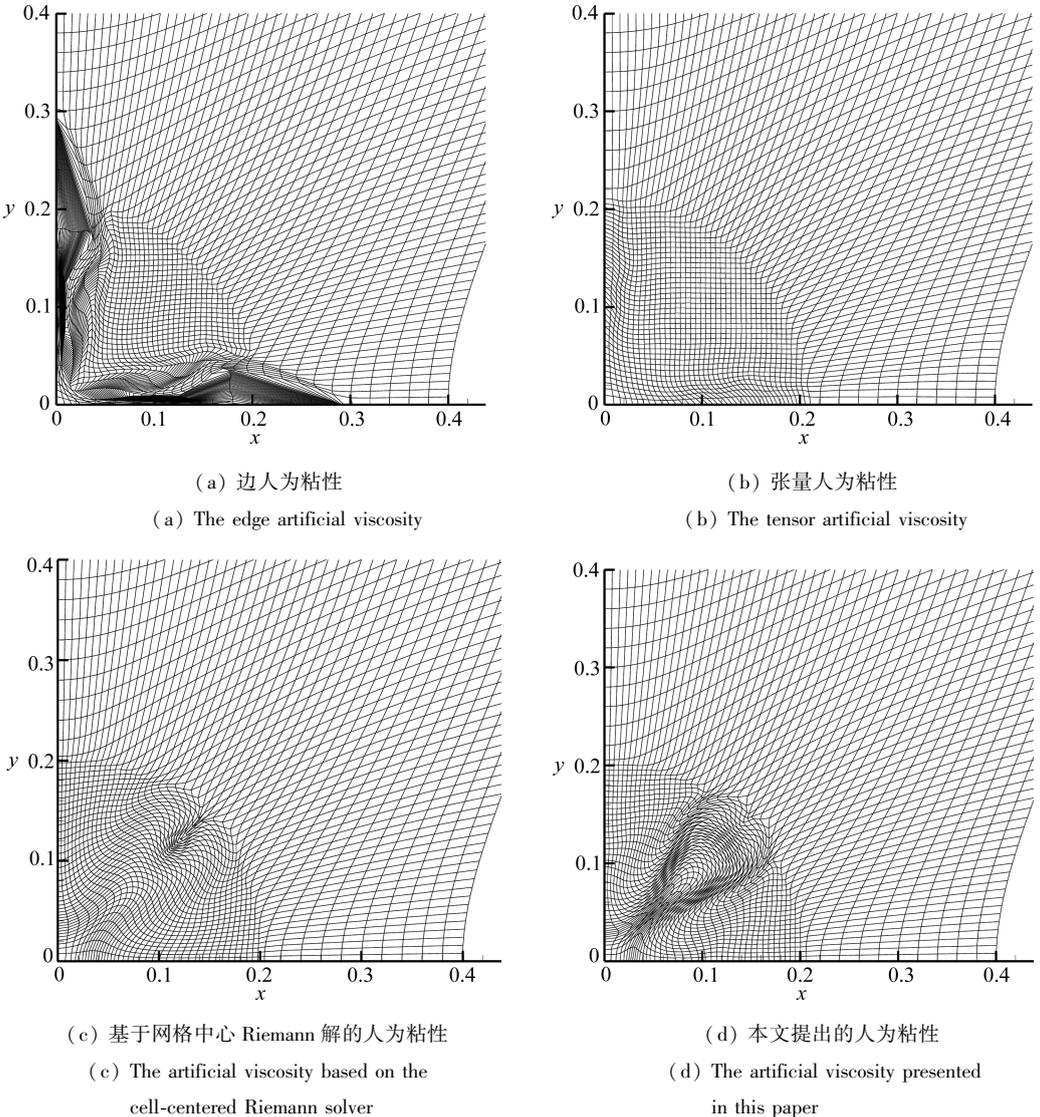


图 4 Noh 问题直角网格不同人为粘性计算网格对比 ($t = 0.6$)

Fig. 4 Comparison of meshes computed with different artificial viscosities on the initial square grid for the Noh problem at $t = 0.6$

图 5 给出了不同人为粘性计算得到的密度填充图,其中进行了坐标变换,横轴为网格中心与原点的距离,纵轴为网格中心与原点的连线与 x 轴的夹角.可以看出边人为粘性由于坐标轴附近的网格严重扭曲,在坐标轴附近捕捉的激波位置效果较差.其它 3 种人为粘性捕捉的激波位置均位于 0.2 附近,与精确解符合较好.网格中心 Riemann 解在 45° 角方向附近的扭曲更严重,新人为粘性在 45° 角附近的物理量分布能够更好地保持一维性,说明新人为粘性仅在激波传播方向上施加人为粘性的影响,能够较好地避免人为粘性对沿激波面方向的影响,从而说明

采取限制器来控制人为粘性在不同方向上的作用力是非常有效的。

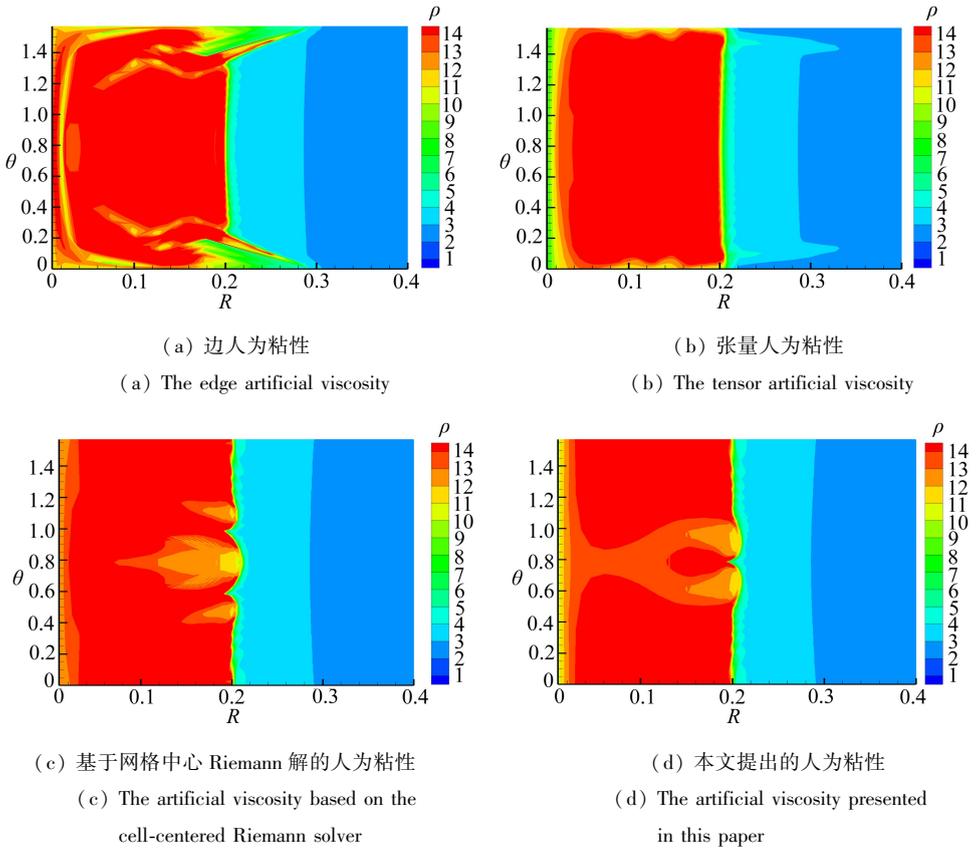


图 5 Noh 问题直角网格不同人为粘性计算密度填充图 ($t = 0.6$)

Fig. 5 Comparison of density contours computed with different artificial viscosities on the initial square grid for the Noh problem at $t = 0.6$

3.2 Saltzman 问题

Saltzman 问题^[13]要求在二维网格上计算一维问题,对于格式的健壮性提出了很高的要求。初始时刻单位密度的 $\gamma = 5/3$ 的理想气体位于 $[0, 1]$ 之间的区域,初始压强取为 10^{-6} ,上下两侧和右侧为固壁边界条件。左边界为一个速度为 1 向右运动的活塞,在活塞的推动下产生向右运动的激波,其速度为 $4/3$,在 $t = 0.6$ 时刻激波运动到 0.8 处。

通常的初始网格是将计算区域 $[0, 1] \times [0, 0.1]$ 划分为 100×10 个扭曲网格,网格节点坐标为

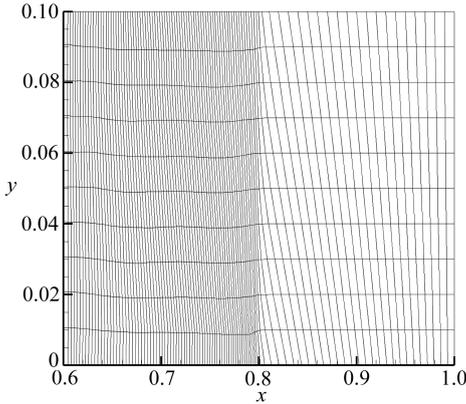
$$\begin{cases} x_{i,j} = (i - 1)\Delta x + (11 - j)\Delta y \sin\left(\frac{(i - 1)\pi}{100}\right), \\ y_{i,j} = (j - 1)\Delta y, \end{cases}$$

其中 $\Delta x = \Delta y = 0.01; i = 1, 2, \dots, 101; j = 1, 2, \dots, 11$ 。

为了考查人为粘性对于大长宽比网格的适用性,我们测试了当 $\Delta x = 0.01, \Delta y = 1$ 的情形,网格数保持不变,计算区域变为 $[0, 1] \times [0, 10]$,网格的长宽比近似变为原来的 100 倍。

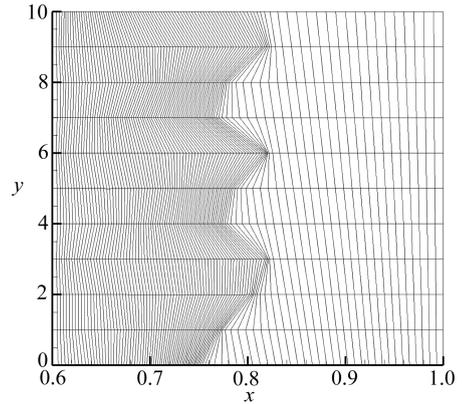
图 6 给出了张量人为粘性和本文中人为粘性的计算结果。可以看出,当网格长宽比较小时,张量人为粘性能够较好地保持激波的一维性,但对于大长宽比网格情况,张量人为粘性计

算过程中出现了严重的网格沙漏变形.本文中的人为粘性能够很好地适应各种网格长宽比情况,激波位置与准确解符合较好.



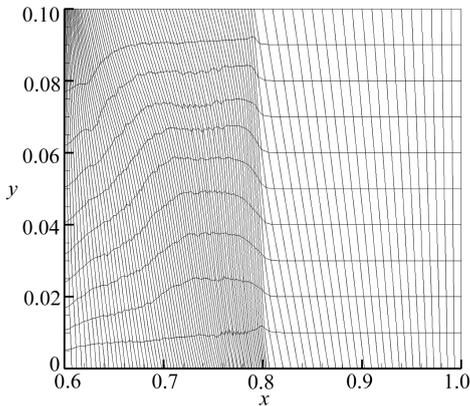
(a) 张量人为粘性, $\Delta y = 0.01$

(a) The tensor artificial viscosity, $\Delta y = 0.01$



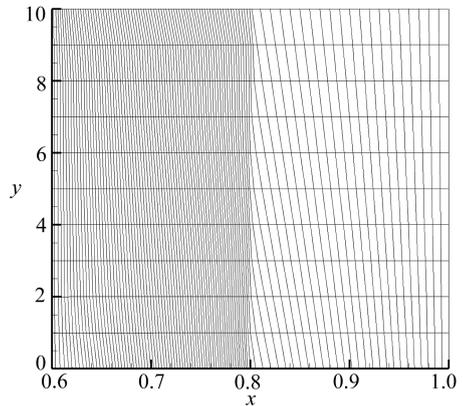
(b) 张量人为粘性, $\Delta y = 1$

(b) The tensor artificial viscosity, $\Delta y = 1$



(c) 本文提出的人为粘性, $\Delta y = 0.01$

(c) The artificial viscosity presented in this paper,
 $\Delta y = 0.01$



(d) 本文提出的人为粘性, $\Delta y = 1$

(d) The artificial viscosity presented in this paper,
 $\Delta y = 1$

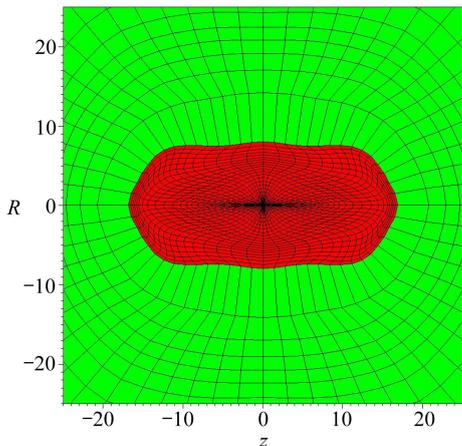
图 6 Saltzman 问题,不同长宽比网格,不同人为粘性计算结果对比 ($t = 0.6$)

Fig. 6 Comparison of meshes with different aspect ratios for the Saltzman problem at $t = 0.6$

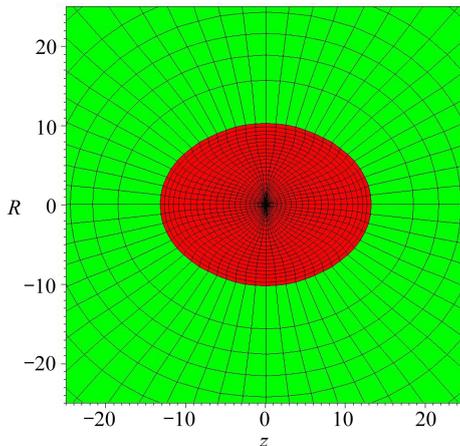
3.3 靶丸压缩变形实验

在间接驱动惯性约束聚变中,靶丸压缩形状至关重要.几年前我国开展了通过改变黑腔长度研究非球对称内爆变形形状的实验^[14].我们基于新研制的二维总体程序,在辐射多群扩散建模下完成了激光间接驱动聚变黑腔的整体数值模拟,得到了与实验定性符合的靶丸压缩图像^[15].当时采用边人为粘性的数值模拟结果发现后期在对称轴附近产生了非物理的网格扭曲.图 7 分别给出了长度为 $1\ 200\ \mu\text{m}$ 的黑腔采用不同人为粘性计算靶丸压缩最紧时刻结果与实验结果.模拟结果中不同颜色表示不同的物质,其中红色为燃料区.实验结果表明靶丸燃料被压缩成香肠状,变形因子(赤道方向与两极方向尺寸之比)约为 0.6 ^[14].网格中心 Riemann 解人为粘性网格品质很好,但可能抑制了网格的变形导致靶丸压缩形状较圆,变形因子约为 0.75 .边人为粘性计算结果中已经出现了较严重的网格扭曲,变形因子约为 0.5 .本文的新人为粘性计算网格品质保持较好,变形因子约为 0.57 .而张量人为粘性由于不适应大长宽比网格(腔壁

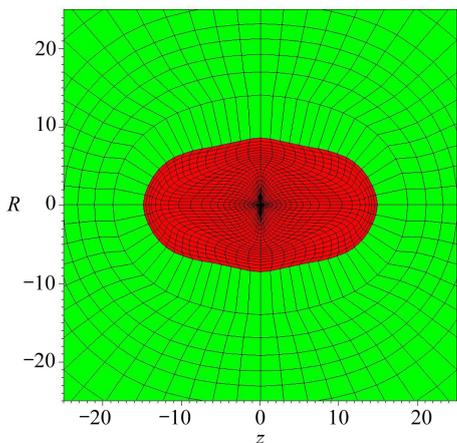
内激光辐照和辐射烧蚀区及靶球烧蚀层的初始网格长宽比大于 1 000 : 1), 不能计算到靶球压缩最大时刻。数值模拟结果表明本文中的人为粘性能够适用于间接驱动惯性约束聚变的数值模拟, 靶丸燃料变形情况与实验观测到的燃料区变形情况符合更好。



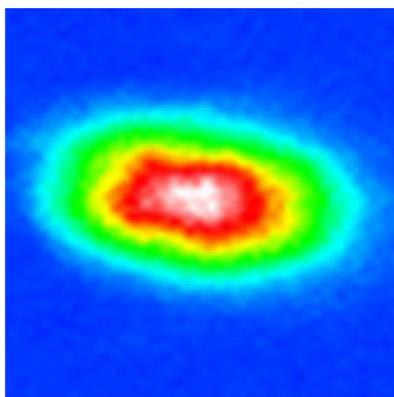
(a) 边人为粘性
(a) The edge artificial viscosity



(b) 基于网格中心近似 Riemann 解的人为粘性
(b) The artificial viscosity based on the cell-centered Riemann solver



(c) 本文提出的人为粘性
(c) The artificial viscosity presented in this paper



(d) 实验结果
(d) The experimental results

图 7 不同人为粘性计算的靶丸燃料压缩形状(压缩最大时刻)与实验图像

Fig. 7 Comparison of DT fuel shapes (at the most compressed time) computed with different artificial viscosities and the experimental results

4 结 论

本文在子网格边界处构造近似 Riemann 解, 将网格内人为粘性对节点的作用力表示为沿子网格边界的形式, 同时对速度差采用限制子区分激波压缩和等熵压缩, 得到了一种新的人为粘性。数值结果表明, 新人为粘性能够较好地捕捉激波且抑制网格的非物理形变, 对于大长宽比网格适用性更强。在应用于黑腔靶丸耦合模型的整体数值模拟时, 与其它人为粘性相比, 新

人为粘性得到的靶丸燃料压缩图像与实验符合更好。

参考文献(References):

- [1] 葛全文. Lagrange 非结构网格高阶交错型守恒气体动力学格式[J]. 应用数学和力学, 2014, **35**(1): 92-101. (GE Quan-wen. Lagrangian high-order staggered conservative gasdynamics scheme on unstructured meshes[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, **35**(1): 92-101. (in Chinese))
- [2] von Neumann J, Richtmyer R D. A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks[J]. *Journal of Applied Physics*, 1950, **21**(3): 232-237.
- [3] Landshoff R. A numerical method for treating fluid flow in the presence of shocks[R]. Los Alamos, New Mexico; Los Alamos National Laboratory, LA-1930, 1955.
- [4] Kuropatenko V F. *Difference Methods for Solutions of Problems of Mathematical Physics I* [M]. Janenko N N, ed. USA: Amer Mathematical Society, 1967; 116.
- [5] Caramana E J, Burton D E, Shashkov M J, Whalen P P. The construction of compatible hydrodynamics algorithms utilizing conservation of total energy[J]. *Journal of Computational Physics*, 1998, **146**(1): 227-262.
- [6] Caramana E J, Shashkov M J, Whalen P P. Formulations of artificial viscosity for multi-dimensional shock wave computations[J]. *Journal of Computational Physics*, 1998, **144**(1): 70-97.
- [7] Campbell J C, Shashkov M J. A tensor artificial viscosity using a mimetic finite difference algorithm[J]. *Journal of Computational Physics*, 2011, **172**(2): 739-765.
- [8] Loubère R, Maire P H, Váchal P. A second-order compatible staggered Lagrangian hydrodynamics scheme using a cell-centered multidimensional approximate Riemann solver[J]. *Procedia Computer Science*, 2010, **1**(1): 1931-1933.
- [9] Maire P H, Loubère R, Váchal P. Staggered Lagrangian discretization based on cell-centered Riemann solver and associated hydro-dynamics scheme[J]. *Communications in Computational Physics*, 2011, **10**(4): 940-978.
- [10] Barlow A, Burton D, Shashkov M. Compatible, energy and symmetry preserving 2D Lagrangian hydrodynamics in rz -cylindrical coordinates[J]. *Procedia Computer Science*, 2010, **1**(1): 1893-1901.
- [11] Dukowicz J K. A general, non-iterative Riemann solver for Godunov's method[J]. *Journal of Computational Physics*, 1985, **61**(1): 119-137.
- [12] Noh W F. Errors for calculations of strong shocks using an artificial viscosity and an artificial heat flux[J]. *Journal of Computational Physics*, 1987, **72**(1): 78-120.
- [13] Dukowicz J K, Meltz B J A. Vorticity errors in multidimensional Lagrangian codes[J]. *Journal of Computational Physics*, 1992, **99**(1): 115-134.
- [14] 江少恩, 丁永坤, 缪文勇, 刘慎业, 郑志坚, 张保汉, 张继彦, 黄天暄, 李三伟, 陈家斌, 蒋小华, 易荣清, 杨国洪, 杨家敏, 胡昕, 曹柱荣, 黄翼翔. 我国激光惯性约束聚变实验研究进展[J]. 中国科学, G 辑: 物理学, 力学, 天文学, 2009, **39**(11): 1571-1583. (JIANG Shao-en, DING Yong-kun, MIAO Wen-yong, LIU Shen-ye, ZHENG Zhi-jian, ZHANG Bao-han, ZHANG Ji-yan, HUANG Tian-xuan, LI San-wei, CHEN Jia-bin, JIANG Xiao-hua, YI Rong-qing, YANG Guo-hong, YANG Jia-min, HU Xin, CAO Zhu-rong, HUANG Yi-xiang. Recent progress

- of inertial confinement fusion experiments in China[J]. *Science in China, Series G: Physics, Mechanics & Astronomy*, 2009, **39**(11): 1571-1583. (in Chinese))
- [15] 翟传磊, 李双贵, 勇珩, 古培俊. 靶丸变形实验的多群扩散整体数值模拟[J]. 强激光与粒子束, 2013, **25**(5): 1157-1160. (ZHAI Chuan-lei, LI Shuang-gui, YONG Heng, GU Pei-jun. Integrated simulation of capsule compression distortion experiments in radiation multi-group diffusion approximation[J]. *High Power Laser and Particle Beams*, 2013, **25**(5): 1157-1160. (in Chinese))

An Artificial Viscosity Based on the Subcell-Edged Approximate Riemann Solver

ZHAI Chuan-lei, YONG Heng

(*Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing 100094, P.R.China*)

Abstract: The artificial viscosity method is generally used to capture shock waves in the Lagrangian hydrodynamics algorithms, and the properties of the artificial viscosity influence the simulation results essentially. A new artificial viscosity based on the subcell-edged approximate Riemann solver was presented. This new method was prove to have the merits of momentum conservation and satisfaction of entropy inequality. With the introduced limiters for the differences of velocities on the subcell edges, the presented artificial viscosity is able to distinguish the shock wave from the isentropic compression and satisfy the wave front invariance in the spherical symmetric problems. Various numerical examples demonstrate the robustness and effectiveness of the new artificial viscosity.

Key words: Lagrangian hydrodynamics; artificial viscosity method; approximate Riemann solver; large aspect ratio grid; inertial confinement fusion

Foundation item: The National High-tech R&D Program of China (863 Program) (2012A01303); The National Natural Science Foundation of China (91130002;11371065)