文章编号:1000-0887(2015)10-1067-09

基于 Riccati-Bernoulli 辅助常微分方程的 Davey-Stewartson 方程的行波解*

杨小锋[1], 邓子辰[2], 魏 乙[1]

(1. 西北工业大学 应用数学系, 西安 710072;
2. 西北工业大学 工程力学系, 西安 710072)

(我刊编委邓子辰来稿)

摘要: Riccati-Bernoulli 辅助常微分方程方法可以用来构造非线性偏微分方程的行波解.利用行波变换,将非线性偏微分方程化为非线性常微分方程, 再利用 Riccati-Bernoulli 方程将非线性常微分方程化为非线性代数方程组, 求解非线性代数方程组就能直接得到非线性偏微分方程的行波解.对 Davey-Stewartson 方程应用这种方法, 得到了该方程的精确行波解.同时也得到了该方程的一个 Bäcklund 变换.所得结果与首次积分法的结果作了比较.Riccati-Bernoulli 辅助常微分方程方法是一种简单、有效地求解非线性偏微分方程精确解的方法.

关 键 词: Riccati-Bernoulli 辅助常微分方程方法; Davey-Stewartson 方程; 行波解; Bäcklund 变换

中图分类号: O175.2 **文献标志码:** A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2015.10.006

引 言

物理、力学、化学、生物学等领域中大量的现象可以用非线性偏微分方程来描述.研究这些非线性偏微分方程的精确解,特别是行波解,有助于更好地理解这些现象的物理本质.人们可以利用这些解来研究解的稳定性和波的运动规律,而且新的精确解还可以帮助人们发现新的非线性现象及其规律.因此,寻求非线性偏微分方程的精确行波解,并研究其解的特性(如孤立子性质等),自然成为广大数学、力学、物理工作者的重要课题.近些年来非线性数学物理领域内的成就之一就是创造了求解非线性偏微分方程精确解的方法,如反散射方法[1-2]、Bäcklund 变换法[3-4]、双线性法[5-7]、齐次平衡法[8-10]、首次积分法[11-12]、(G'/G) 展开法[13-14]、双曲函数法[15]、Jacobi 椭圆函数法[16]等.但是至今为止,还没有一种统一的求非线性偏微分方程精确解

* **收稿日期:** 2015-06-24; **修订日期:** 2015-07-23
基金项目: 高校博士点基金(20126102110023);中央高校基本科研业务费专项资金(3102014JCQ01035)
作者简介: 杨小锋(1978—), 男, 陕西人, 博士生(E-mail: yangxiaofeng@nwsuaf.edu.cn);
邓子辰(1964—), 男, 辽宁人, 教授, 博士生导师(通讯作者. E-mail: dweifan@nwpu.edu.cn);
魏乙(1980—), 男, 山东人, 博士生(E-mail: weiyiwy@126.com).

的方法.

本文给出了一种 Riccati-Bernoulli 辅助常微分方程方法,并用该方法得到了 Davey-Stewartson 方程的精确行波解.考虑 Davey-Stewartson 方程:

$$\mathrm{i}q_t + \frac{1}{2}s(q_{xx} + sq_{yy}) + \lambda|q|^2 q - \phi_x q = 0, \tag{1a}$$

$$\phi_{xx} - s\phi_{yy} - 2\lambda(|q|^2)_x = 0, \tag{1b}$$

其中 $q=q(x,y,t)$, $\phi=\phi(x,y,t)$ 分别为复、实函数, s,λ 为实常数, $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$.当 $s=1$, $s=-1$ 时,方程(1)分别称为 DS-Ⅰ方程、DS-Ⅱ方程[17].Davey-Stewartson 方程首次由 Davey 和 Stewartson 得到,并用来描述浅水表面上的拟单频波包[18].在考虑到表面张力影响时,Djordjevic 等也推导出了类似的方程[19].Davey-Stewartson 方程在研究长短波相互作用和等离子物理等领域也有很多应用[20-21].因此,该系统已被许多学者所关注,并且已取得了许多优秀成果.Zedan 和 Tantawy 利用同伦微扰法得到了方程(1)的数值解[22];Ghidaglia 和 Saut 得到了方程(1)的初值问题的解[23];Jafari 等用首次积分法给出了方程(1)的一些行波解[24];张金良等用 F 展开法给出了 DS-Ⅰ方程的周期波解[25];Yan 用 Jacobi 椭圆函数法给出了方程(1)的周期波解[16].

本文利用 Riccati-Bernoulli 辅助常微分方程方法,给出 Davey-Stewartson 方程的精确行波解和一个 Bäcklund 变换.

1 Riccati-Bernoulli 辅助常微分方程方法

考虑如下形式的偏微分方程:

$$P(u, u_t, u_x, u_{xx}, u_{xt}, \cdots) = 0, \tag{2}$$

其中下标代表偏导数, P 是 u 及其偏导数的多项式.Riccati-Bernoulli 辅助常微分方程方法分为 3 步.

首先, 利用行波变换

$$u(x,t) = u(\xi),\ \xi = k(x + Vt) \tag{3}$$

将方程(2)转换为常微分方程

$$P(u, u', u'', u''', \cdots) = 0, \tag{4}$$

其中 k, V 为待定常数, $u' = \mathrm{d}u/\mathrm{d}\xi$.

其次,设 u 是 Riccati-Bernoulli 方程

$$u' = au^{2-m} + bu + cu^m \tag{5}$$

的解,其中 a,b,c,m 是待定常数.

由方程(5)直接计算, 得

$$u'' = ab(3-m)u^{2-m} + a^2(2-m)u^{3-2m} + mc^2u^{2m-1} + bc(m+1)u^m + (2ac+b^2)u. \tag{6}$$

方程(5)有如下 6 种解:

当 $m=1$, 方程(5)的解为

$$u(\xi) = C\mathrm{e}^{(a+b+c)\xi}; \tag{7}$$

当 $m \neq 1, a=b=0$, 方程(5)的解为

$$u(\xi) = ((1-m)(c\xi + C))^{1/(1-m)}; \tag{8}$$

当 $m \neq 1, a=0, b \neq 0$, 方程(5)的解为

$$u(\xi)=\left(-\frac{c}{b}+C\mathrm{e}^{-b(m-1)\xi}\right)^{1/(1-m)}; \tag{9}$$

当 $m\neq 1, a\neq 0, b^2-4ac<0$, 方程(5)的解为

$$u(\xi)=\left(\frac{-b+\sqrt{4ac-b^2}\tan(0.5(1-m)\sqrt{4ac-b^2}\xi+C)}{2a}\right)^{1/(1-m)}; \tag{10}$$

当 $m\neq 1, a\neq 0, b^2-4ac>0$, 方程(5)的解为

$$u(\xi)=\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a(1-C\mathrm{e}^{\xi(1-m)\sqrt{b^2-4ac}})}-\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^{1/(1-m)}; \tag{11}$$

当 $m\neq 1, a\neq 0, b^2-4ac=0$, 方程(5)的解为

$$u(\xi)=\left(\frac{1}{a(m-1)\xi+C}-\frac{b}{2a}\right)^{1/(1-m)}, \tag{12}$$

其中 C 是任意实常数.

最后,将 u 及其偏导数代入方程(4),比较 $u^j(j=0,1,2,\cdots)$ 的系数,得到一个关于 m,a,b,c,k,V 的代数方程组.求解此代数方程组,并将 m,a,b,c,k,V 和 $\xi=k(x+Vt)$ 代入式(7)~(12),就得到了偏微分方程(2)的精确行波解.

2 Davey-Stewartson 方程的精确行波解

利用行波变换

$$q(x,y,t)=h(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta},\ \phi(x,y,t)=\phi(\xi), \tag{13}$$

$$\xi=\alpha x+\beta y+\gamma t,\ \eta=k(x+ly+dt+g), \tag{14}$$

将方程(1)化简为

$$(-s^2\beta^2-s\alpha^2)h''+(2kd+sk^2+s^2l^2k^2+2\alpha\phi')h-2\lambda h^3-$$
$$2\mathrm{i}(\gamma+k\alpha s+kl\beta s^2)h'=0, \tag{15}$$

$$\alpha^2\phi''-s\beta^2\phi''-2\lambda\alpha(h^2)'=0, \tag{16}$$

其中 $\alpha,\beta,\gamma,k,l,d$ 为待定实常数,g 是任意实常数;h,h',h'',ϕ'' 分别代表 $h(\xi)$, $\mathrm{d}h(\xi)/\mathrm{d}\xi$, $\mathrm{d}^2h(\xi)/\mathrm{d}\xi^2$, $\mathrm{d}^2\phi(\xi)/\mathrm{d}\xi^2$.

令 $\gamma=-ks(\alpha+l\beta s)$, 方程(15)化为

$$(-s^2\beta^2-s\alpha^2)h''+(2kd+sk^2+s^2l^2k^2+2\alpha\phi')h-2\lambda h^3=0. \tag{17}$$

对方程(16)两边关于 ξ 积分一次,得

$$\phi'=\frac{2\lambda\alpha h^2+A}{\alpha^2-s\beta^2}, \tag{18}$$

其中 A 为积分常数.

把式(18)代入式(17),得

$$(s\alpha^2+s^2\beta^2)h''-\left(2kd+sk^2+s^2k^2l^2+\frac{2A\alpha}{\alpha^2-s\beta^2}\right)h+\frac{2\lambda(\alpha^2+s\beta^2)}{-\alpha^2+s\beta^2}h^3=0. \tag{19}$$

(I) 当 $s\alpha^2+s^2\beta^2=0$,令式(19) 中 h 的系数为0,有

$$A=-k\alpha(2d+sk+s^2kl^2). \tag{20}$$

此时,方程(1)的解为

$$q(x,y,t)=h(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x+ly+dt+g)},\qquad s<0, \tag{21a}$$

$$\phi(x,y,t)=\phi(\xi)=\frac{\lambda}{\alpha}\int h^2(\xi)\,\mathrm{d}\xi-\frac{k(2d+sk+s^2kl^2)\xi}{2\alpha}+B, \tag{21b}$$

其中

$$\xi=\alpha x\pm\frac{\alpha}{\sqrt{-s}}y-ks\left(\alpha\pm\frac{\alpha}{\sqrt{-s}}ls\right)t,$$

α,k,l,d,g,B 为任意实常数;$h(\xi)$ 为任意实函数.

(Ⅱ) 当 $s\alpha^2+s^2\beta^2\neq 0$, 设方程(19)的解是方程(5)的解,然后将式(5)和式(6)代入方程(19),得

$$\begin{aligned}&(ab(3-m)h^{2-m}+a^2(2-m)h^{3-2m}+mc^2h^{2m-1}+bc(m+1)h^m+(2ac+b^2)h)+\\&\left(\frac{2kd\alpha^2-2kds\beta^2+sk^2\alpha^2-s^2k^2\beta^2+s^2k^2l^2\alpha^2-s^3k^2l^2\beta^2+2A\alpha}{s(s^2\beta^4-\alpha^4)}\right)h+\\&\frac{2\lambda}{s(s\beta^2-\alpha^2)}h^3=0.\end{aligned} \tag{22}$$

令 $m=0$, 则方程(22)化为

$$\begin{aligned}&(3abh^2+2a^2h^3+bc+(2ac+b^2)h)+\frac{2\lambda}{s(s\beta^2-\alpha^2)}h^3+\\&\left(\frac{2kd\alpha^2-2kds\beta^2+sk^2\alpha^2-s^2k^2\beta^2+s^2k^2l^2\alpha^2-s^3k^2l^2\beta^2+2A\alpha}{s(s^2\beta^4-\alpha^4)}\right)h=0.\end{aligned} \tag{23}$$

令方程(23)中 $h^j(j=0,1,2,3)$ 的系数为 0,得代数方程组

$$bc=0, \tag{24a}$$

$$2ac+b^2+\frac{2kd\alpha^2-2kds\beta^2+sk^2\alpha^2-s^2k^2\beta^2+s^2k^2l^2\alpha^2-s^3k^2l^2\beta^2+2A\alpha}{s(s^2\beta^4-\alpha^4)}=0, \tag{24b}$$

$$3ab=0, \tag{24c}$$

$$2a^2+\frac{2\lambda}{s(-\alpha^2+s\beta^2)}=0. \tag{24d}$$

求解方程组(24),得

$$b=0, \tag{25a}$$

$$ac=\frac{2kd\alpha^2-2kds\beta^2+sk^2\alpha^2-s^2k^2\beta^2+s^2k^2l^2\alpha^2-s^3k^2l^2\beta^2+2A\alpha}{2s(\alpha^4-s^2\beta^4)}, \tag{25b}$$

$$a=\pm\sqrt{\frac{\lambda}{s(\alpha^2-s\beta^2)}}. \tag{25c}$$

当 $ac>0$, 将式(25)代入式(10),此时方程(19)的解为

$$h(\xi)=\pm\sqrt{\frac{\rho}{2\lambda(\alpha^2+s\beta^2)}}\tan\left(\sqrt{\frac{\rho}{2s(\alpha^4-s^2\beta^4)}}(\xi+B)\right), \tag{26a}$$

其中

$$\xi=\alpha x+\beta y-ks(\alpha+l\beta s)t, \tag{26b}$$

$$\rho=2kd\alpha^2-2kds\beta^2+sk^2\alpha^2-s^2k^2\beta^2+s^2k^2l^2\alpha^2-s^3k^2l^2\beta^2+2A\alpha, \tag{26c}$$

α,β,k,l,d,A,B 是任意实常数.

注意到方程(18), 则方程(1)的一组精确解为

$$q(x,y,t)=q(\xi)=$$

$$\pm\sqrt{\frac{\rho}{2\lambda(\alpha^2+s\beta^2)}}\tan\left(\sqrt{\frac{\rho}{2s(\alpha^4-s^2\beta^4)}}(\xi+B)\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x+ly+dt+g)}, \tag{27a}$$

$$\phi(x,y,t)=\phi(\xi)=\alpha s\sqrt{\frac{2\rho}{s(\alpha^4-s^2\beta^4)}}\tan\left(\sqrt{\frac{\rho}{2s(\alpha^4-s^2\beta^4)}}(\xi+B)\right)+ \\ \frac{(\alpha^4-s^2\beta^4)C-B\rho\alpha}{\alpha^4-s^2\beta^4}-\left(\frac{\alpha k^2l^2s^2+\alpha k^2s+2\alpha kd+A}{s\beta^2+\alpha^2}\right)(\xi+B), \tag{27b}$$

其中 ξ,ρ 由式(26b)和(26c)给出; α,β,k,l,d,A,B,C 是任意实常数.

如果 $ac>0$, 将式(25)代入式(11),此时方程(19)的解为

$$h(\xi)=\pm\sqrt{\frac{-\rho}{2\lambda(\alpha^2+s\beta^2)}}\frac{1+C\mathrm{e}^{\pm2\sqrt{\frac{-\rho}{2s(\alpha^4-s^2\beta^4)}}\xi}}{1-C\mathrm{e}^{\pm2\sqrt{\frac{-\rho}{2s(\alpha^4-s^2\beta^4)}}\xi}}, \tag{28}$$

即

$$h(\xi)=\pm\sqrt{\frac{-\rho}{2\lambda(\alpha^2+s\beta^2)}}\tanh\left(\sqrt{\frac{-\rho}{2s(\alpha^4-s^2\beta^4)}}(\xi+B)\right),\qquad C<0, \tag{29a}$$

$$h(\xi)=\pm\sqrt{\frac{-\rho}{2\lambda(\alpha^2+s\beta^2)}}\coth\left(\sqrt{\frac{-\rho}{2s(\alpha^4-s^2\beta^4)}}(\xi+B)\right),\qquad C<0, \tag{29b}$$

其中 ξ,ρ 由式(26b)和(26c)给出; α,β,k,l,d,A,B,C 是任意实常数.

此时,方程(1)的解为

$$q(x,y,t)=q(\xi)= \\ \pm\sqrt{\frac{-\rho}{2\lambda(\alpha^2+s\beta^2)}}\tanh\left(\sqrt{\frac{-\rho}{2s(\alpha^4-s^2\beta^4)}}(\xi+B)\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x+ly+dt+g)}, \tag{30a}$$

$$\phi(x,y,t)=\phi(\xi)=\alpha s\sqrt{\frac{-2\rho}{s(\alpha^4-s^2\beta^4)}}\tanh\left(\sqrt{\frac{-\rho}{2s(\alpha^4-s^2\beta^4)}}(\xi+B)\right)+ \\ \frac{(\alpha^4-s^2\beta^4)C-B\rho\alpha}{\alpha^4-s^2\beta^4}-\left(\frac{\alpha k^2l^2s^2+\alpha k^2s+2\alpha kd+A}{s\beta^2+\alpha^2}\right)(\xi+B), \tag{30b}$$

和

$$q(x,y,t)=q(\xi)= \\ \pm\sqrt{\frac{-\rho}{2\lambda(\alpha^2+s\beta^2)}}\coth\left(\sqrt{\frac{-\rho}{2s(\alpha^4-s^2\beta^4)}}(\xi+B)\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x+ly+dt+g)}, \tag{31a}$$

$$\phi(x,y,t)=\phi(\xi)=\alpha s\sqrt{\frac{-2\rho}{s(\alpha^4-s^2\beta^4)}}\coth\left(\sqrt{\frac{-\rho}{2s(\alpha^4-s^2\beta^4)}}(\xi+B)\right)+ \\ \frac{(\alpha^4-s^2\beta^4)C-B\rho\alpha}{\alpha^4-s^2\beta^4}-\left(\frac{\alpha k^2l^2s^2+\alpha k^2s+2\alpha kd+A}{s\beta^2+\alpha^2}\right)(\xi+B), \tag{31b}$$

其中 ξ,ρ 由式(26b)和(26c)给出; α,β,k,l,d,A,B,C 是任意实常数.

如果 $ac=0$, 由方程组(25),有

$$a=\pm\sqrt{\frac{\lambda}{s(\alpha^2-s\beta^2)}},\ A=\frac{k(-\alpha^2+s\beta^2)(kl^2s^2+sk+2d)}{2\alpha}. \tag{32}$$

将式(32)代入式(12),则方程(19)的解为

$$h(\xi) = \pm \sqrt{\frac{s(\alpha^2 - s\beta^2)}{\lambda}} \frac{1}{\xi + B}, \tag{33}$$

其中 ξ 由式(26b)给出; α,β,k,l,d,B 是任意实常数.

此时,方程(1)的解为

$$q(x,y,t) = q(\xi) = \pm \sqrt{\frac{s(\alpha^2 - s\beta^2)}{\lambda}} \frac{e^{ik(x+ly+dt+g)}}{\xi + B}, \tag{34a}$$

$$\phi(x,y,t) = C - \frac{\alpha s}{\xi + B} - \frac{k(kl^2s^2 + sk + 2d)}{2\alpha}(\xi + B), \tag{34b}$$

其中 ξ 由式(26b)给出; α,β,k,l,d,B,C 是任意实常数.

3 Davey-Stewartson 方程的 Bäcklund 变换

当 $m = 0$, 方程(5)退化为 Riccati 方程:

$$h' = ah^2 + bh + c. \tag{35}$$

令方程(35)有如下形式的解:

$$h_2 = h_1 + h_0, \tag{36}$$

其中 $h_0 = h_0(\xi)$ 是已知方程(35)的解, $h_1 = h_1(\xi)$ 是待定函数.

将方程(36)代入方程(35),得

$$h_1' = ah_1^2 + (b + 2ah_0)h_1. \tag{37}$$

注意到方程(37)是 Bernoulli 方程.直接求解方程(37),于是得到 h_1,h_2.因此,我们得到方程(35)的一个 Bäcklund 变换:

$$h_2 = h_1 + h_0,\ h_1' = ah_1^2 + (b + 2ah_0)h_1.$$

利用 Bäcklund 变换,我们就能得到方程(1)的无穷多个新解.例如选择

$$h_0 = h_0(\xi) = \sqrt{\frac{\rho}{2\lambda(\alpha^2 + s\beta^2)}}\tan\left(\sqrt{\frac{\rho}{2s(\alpha^4 - s^2\beta^4)}}\,\xi\right), \tag{38}$$

在(Ⅱ)中利用方程(36)和(37),得

$$h_1 = h_1(\xi) = \frac{\sec^2(E\xi)}{C - (a/E)\tan(E\xi)}, \tag{39}$$

其中 ξ,ρ 由式(26b)和(26c)给出; α,β,k,l,d,C 是任意实常数,

$$a = \sqrt{\frac{\lambda}{s(\alpha^2 - s\beta^2)}},\ E = \sqrt{\frac{\rho}{2s(\alpha^4 - s^2\beta^4)}}.$$

于是,我们得到方程(35)的一个新解:

$$h_2 = h_2(\xi) = \frac{\sec^2(E\xi)}{C - (a/E)\tan(E\xi)} + \frac{E}{a}\tan(E\xi). \tag{40}$$

由方程(18),得

$$\phi(\xi) = D + \left(\frac{A}{\alpha^2 - s\beta^2} - \frac{\alpha\rho}{\alpha^4 - s^2\beta^4}\right)\xi + \frac{2s\alpha E(a^2 + C^2E^2)}{a(CE - a\tan(E\xi))}, \tag{41}$$

其中 D 是任意实常数.

于是,我们得到方程(1)的一个新解,即

$$q(x,y,t) = h_2(\xi)e^{ik(x+ly+dt+g)}, \tag{42a}$$

$$\phi(x,y,t)=\phi(\xi), \tag{42b}$$

其中 $h_2(\xi)$,$\phi(\xi)$ 由式(40)、(41)给出.

类似于上面的讨论, 得到方程(1)的一个 Bäcklund 变换:

$$h'_{n+1}=ch_{n+1}^2+(b+2ch_n)h_{n+1},\ h_{n+2}=h_{n+1}+h_n,$$

$$q(x,y,t)=h_2(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x+ly+dt+g)},\ \phi(x,y,t)=\phi(\xi)=\int\frac{2\lambda\alpha(h_2(\xi))^2+A}{\alpha^2-s\beta^2}\mathrm{d}\xi,$$

其中 $h_n=h_n(\xi)$ 是方程(35)的一个已知解.

注 一般地,我们得到方程(5)的一个 Bäcklund 变换:

$$v_n=h_n^{1-m},\ v'_{n+1}=(1-m)(av_{n+1}^2+(b+2av_n)v_{n+1}),\ v_{n+2}=v_{n+1}+v_n,\ h_{n+1}=v_{n+2}^{1/(1-m)},$$

其中 $v_n,v_{n+1},v_{n+2},h_n,h_{n+1}$ 是 ξ 的函数,$h_n=h_n(\xi)$ 是方程(5)的一个已知解.

4 结 论

因为 $s<0$, 显然式(21)是 DS-Ⅱ方程的解,但不是 DS-Ⅰ方程的解.如果在上述结果中令 $A=0$, 则用 Riccati-Bernoulli 辅助常微分方程方法得到的方程(1)的行波解都可以退化到利用首次积分法得到的结果[24].然而利用首次积分法不能得到式(21).而且利用首次积分法求解方程(1)时要分为 DS-Ⅰ方程和 DS-Ⅱ方程分别求解[18],而用 Riccati-Bernoulli 辅助常微分方程方法可以统一得到方程(1)的精确行波解.值得一提的是,首次积分法没有所谓的 Bäcklund 变换,而 Riccati-Bernoulli 辅助常微分方程方法有一个自然的 Bäcklund 变换,如果得到了方程(1)的一个解,就可以得到方程(1)的无穷多个解.

许多非线性偏微分方程可以用 Riccati-Bernoulli 辅助常微分方程方法求得精确解,而且在 Maple 等数学软件的帮助下,使得 Riccati-Bernoulli 辅助常微分方程方法可以高效和便捷地求得非线性偏微分方程的行波解.

参考文献(References):

[1] Ablowitz M J, Clarkson P A. *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.

[2] Ablowitz M J, Segur H. *Solitons and Scattering Transformation*[M]. Philadelphia: SIAM Press, 1981.

[3] Rogers C, Schief W K. *Bäcklund and Darboux Transformation Geometry and Modern Applications in Solitons Theory*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.

[4] Gu C H, Hu H S. A unified explicit form of Bäcklund transformations for generalized hierarchies of KdV equations[J]. *Letters in Mathematical Physics*, 1986, **11**(4): 325-335.

[5] Hirota R. Exact solution of the Korteweg-de Vries equation for multiple collisions of solitons[J]. *Phys Rev Lett*, 1971, **27**(18): 1192-1194.

[6] Hirota R, Ito M. Exact solution of the modified Korteweg-de Vries equation for multiple collisions of solitons[J]. *Journal of the Physical Society of Japan*, 1972, **33**(5): 1456-1458.

[7] Hirota R. *The Direct Method in Soliton Theory*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.

[8] WANG Ming-liang. Solitary wave solutions for variant Boussinesq equations[J]. *Physics Letters A*, 1995, **199**(3/4): 169-172.

[9] Wang M L, Zhou Y B. Application of a homogeneous balance method to exact solutions of

nonlinear equations in mathematical physics[J]. *Physics Letters A*, 1996, **216**(1): 67-75.
[10] BAI Cheng-lin. Extended homogeneous balance method and Lax pairs, Bäcklund transformation[J]. *Communications in Theoretical Physics*, 2002, **37**(6): 645-648.
[11] Taghizadeh N, Mirzazadeh M, Filiz T. The first-integral method applied to the Eckhaus equation[J]. *Applied Mathematics Letters*, 2012, **25**(5): 798-802.
[12] Lu B. The first integral method for some time fractional differential equations[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2012, **395**(2): 684-693.
[13] WANG Ming-liang, LI Xiang-zheng, ZHANG Jin-liang. The (G'/G) -expansion method and travelling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics[J]. *Physics Letters A*, 2008, **372**(4): 417-423.
[14] ZHANG Hui-qun. New application of the (G'/G) -expansion method[J].*Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2009, **14**(8): 3220-3225.
[15] Wazwaz A M. The tanh method: exact solutions of the sine-Gordon and the sinh-Gordon equations[J]. *Applied Mathematics & Computation*, 2005, **167**(2): 1196-1210.
[16] YAN Zhen-ya. Abundant families of Jacobi elliptic function solutions of the (2+1)-dimensional integrable Davey-Stewartson-type equation via a new method[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2003, **18**(2): 299-309.
[17] McConnell M, Fokas A S, Pelloni B. Localised coherent solutions of the DSI and DSII equations—a numerical study[J]. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2005, **69**(5/6): 424-438.
[18] Davey A, Stewartson K. On three-dimensional packets of surfaces waves[J]. *Proceedings of the Royal Society of London, Series A*, 1974, **338**: 101-110.
[19] Djordjevic V D, Redekopp L G. On two-dimensional packets of capillary-gravity wave[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1977, **79**(4): 703-714.
[20] Novikov S, Manakov S V, Pitaevskii L P, Zakharov V E. *Theory of Solitons, the Inverse Scattering Method*[M]. New York: Consultants Bureau Press, 1984.
[21] Zakharov V E. *The Inverse Scattering Method, in Soliton*[M]. Heidelberg: Springer Press, 1980.
[22] Zedan H A, Tantawy S S. Solutions of Davey-Stewartson equations by homotopy perturbation method[J]. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2009, **49**(8): 1382-1388.
[23] Ghidaglia J M, Saut J C. On the initial value problem for the Davey-Stewartson systems[J]. *Nonlinearity*, 1990, **3**(2): 475-506.
[24] Jafari H, Sooraki A, Talebi Y, Biswas A. The first integral method and traveling wave solutions to Davey-Stewartson equation[J]. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, 2012, **17**(2): 182-193.
[25] 张金良, 任东锋, 王明亮, 方宗德. Davey-Stewartson Ⅰ的周期波解[J]. 数学物理学报, 2005, **25**(2): 213-219.(ZHANG Jin-liang, REN Dong-feng, WANG Min-liang, FANG Zhong-de. The periodic wave solutions for the Davey-Stewartson Ⅰ[J]. *Acta Mathematica Scientia*, 2005, **25**(2): 213-219.(in Chinese))

Traveling Wave Solutions to the Davey-Stewartson Equation With the Riccati-Bernoulli Sub-ODE Method

YANG Xiao-feng[1], DENG Zi-chen[2], WEI Yi[1]

(1. *Department of Applied Mathematics*, *Northwestern Polytechnical University*, *Xi'an* 710072, *P.R.China*;

2. *Department of Engineering Mechanics*, *Northwestern Polytechnical University*, *Xi'an* 710072, *P.R.China*)

(Contributed by DENG Zi-chen, M. AMM Editorial Board)

Abstract: The Riccati-Bernoulli subsidiary ordinary differential equation (sub-ODE) method was proposed to construct the exact traveling wave solutions to the nonlinear partial differential equations (NLPDEs). Through traveling wave transformation, the NLPDE was reduced to a nonlinear ODE. With the aid of the Riccati-Bernoulli sub-ODE, the nonlinear ODE was converted into a set of nonlinear algebraic equations. The exact traveling wave solutions to the NLPDE were obtained as soon as this set of nonlinear algebraic equations were solved. Application of this method to the Davey-Stewartson equation directly gave the exact traveling wave solutions. The Bäcklund transformation of the Davey-Stewartson equation was also given. The results were compared with those of the first-integral method. The proposed method is effective and easy to be generalized to deal with other types of nonlinear partial differential equations.

Key words: Riccati-Bernoulli sub-ODE method; Davey-Stewartson equation; traveling wave solution; Bäcklund transformation