文章编号:1000-0887(2015)10-1085-10

海气耦合随机-动力气候模式的周期解问题*

陈丽娟, 鲁世平, 徐 晶

(南京信息工程大学 数学与统计学院, 南京 210044)

摘要: 目前大多数对随机-动力气候模式的研究都是在随机强迫项为白噪声的假定下进行的,而实际上许多天气快变量往往表现为非线性的其它随机过程.该文运用 Mawhin 重合度理论,探讨了一类随机强迫项是其它随机过程,而非白噪声时的海气耦合随机-动力气候模式的周期解问题,得到了一定条件下该模型存在周期解的结果.

关 键 词: 海气耦合; 随机-动力气候系统; 周期解

中图分类号: O193 **文献标志码**: A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2015.10.008

引 言

气候系统是一个强迫耗散系统,受到天文因子、地球物理因子的强迫作用.完整的气候系统可被看作是一个物理系统,它的活动受控于系统外一组地球物理条件.随机-动力气候模式是将气候系统视为一个随机-动力系统,构造描述其运动的方程,从而研究气候成因和变化以及气候系统的现状.1976 年,Hasselmann[1]将气候系统分解为两部分,快速变化的“天气”系统和缓慢变化的“气候”系统.在气候变化中,气候变量除了自身缓慢演变以外,还要对快速变化的短期天气扰动的随机激发作出总的响应.为了描述气候概率分布的变化,他引入了 Fokker-Planck 方程,用方程中的扩散项来表示天气的随机激发效应,将天气过程对气候系统的作用作为一个随机函数出现在气候模式中,从而开创了一个崭新的气候模式——随机气候模式,但是他对 F-P 方程没有从气候研究角度作任何求解.由于模式不再具有确定性的解,模式方程也将成为随机微分方程,这大大增加了求解模式的难度.

在长期天气过程和气候形成的理论中,海洋起着重要的作用.但海洋是一种缓慢流动的介质,比热比也远比大气的比热比大,从大范围运动角度来看,大气运动特别大尺度天气过程,相对来说比较活跃且变化速度较快,这种较快的天气起伏,将影响海水的潜热和感热输送,使海温发生变化.然而海温的气候变化是一个缓慢过程,而且是一个大范围现象.因此可以将天气过程的起伏看成一种随机强迫,从这一观点出发,Hasselman 和 Frankignoul 等采用简单的随机模型,探讨了海温异常的成因与变化[1-3].在此基础上,李麦村进一步考虑海气相互作用,建立了海气耦合全球平均的随机模型,并进行了更为精确地模拟[4].此后,海气相互作用随机模型

* **收稿日期**: 2015-05-06; **修订日期**: 2015-07-13
基金项目: 国家自然科学基金(11271197);江苏省普通高校研究生科研创新计划(CXLX13_502)
作者简介: 陈丽娟(1973—),女,江苏靖江人,副教授,博士(通讯作者. E-mail: cljung@ sohu.com).

引起了广泛的关注,并产生了一些令人注目的结果[5-8].本文通过重合度拓展理论,讨论了一类随机项为非白噪声时的海气耦合随机-动力气候模式的周期性问题.

1 海气耦合随机-动力气候模式

文献[4]在研究天气气候异常时将海温与大气气温联合起来,形成了一个海气相互作用的耦合系统,首次提出了海气耦合的随机-动力模型:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}T'}{\mathrm{d}t} = -\lambda_1 T' + \lambda_2 T'_s + W_1(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}T'_s}{\mathrm{d}t} = -\lambda_3 T'_s + \lambda_4 T' + W_2(t). \end{cases} \tag{1}$$

模型(1)中两个方程分别描述了海洋和大气温度变化,随机项为 $W_1(t)$,$W_2(t)$.文献[9]在视随机项为白噪声时,云对气候的影响是强负反馈作用的条件下,利用模式(1)分析得到了海温准 3 年或准半年的振动周期.

文献[10]建立了一个扰动的海气耦合动力模型:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = CT + Dh + f(T), \\ \dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -ET - Rh + g(h), \end{cases} \tag{2}$$

其中 T 为赤道东太平洋中的 SST 异常,h 为温跃层深度异常,模型参数 $C,D,E,R > 0$ 分别是联系到海表温度异常和温跃层深度与变化率间的无量纲比例系数;$f(T)$,$g(h)$ 是扰动项.由实际资料分析表明,海温和气温都存在周期变化,在理论上能否用随机-气候模式来揭示这种模型的周期振荡呢?考虑到目前对随机-动力气候模式的讨论都是在随机强迫项为白噪声的假定下进行的,白噪声是自相关函数,不同时刻无相关性的特殊随机过程.对于一个连续过程,这是不真实的,在物理上也是不能实现的.事实上,许多天气快变量往往表现为非线性的其它随机过程.从理论上探讨随机气候模式中随机强迫项是其它随机过程,而非白噪声时的解的问题是有意义的.

因此本文在模型(2)的基础上,考虑大气作为随机外力所产生的结果,同时又考虑海洋的随机外力的影响,讨论如下的一类海气相互作用随机强迫项是其它随机过程的动力气候系统模式:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = CT + Dh + f(T) + p(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -ET - Rh + g(h) + q(t), \end{cases} \tag{3}$$

其中扰动项 $f,g \in C(\mathbf{R},\mathbf{R})$,随机强迫项 $p(t)$,$q(t)$ 连续.

显然,式(3)是非线性的随机模式,借助于 Mawhin 重合度理论及泛函分析探讨了一定条件下式(3)的周期解存在性问题.笔者等一些学者也曾用这种方法在大气物理、海洋气候、动力系统等方面成功地解决了一些非线性模型的周期解问题[11-15].

2 周期解的研究

现考虑系统(3)的 ω- 周期解存在性问题, ω 为一正常数.

令 $C_\omega = \{x \mid x \in C(\mathbf{R}, R^2), x(t+\omega) \equiv x(t)\}$，显然，$C_\omega$ 为 Banach 空间.

$\forall x \in C_\omega$，定义

$$\begin{cases} \|x\|_\infty = \max\limits_{t \in [0,\omega]} |x(t)|, \\ \|x\|_r = \left(\int_0^\omega |x(t)|^r \mathrm{d}t\right)^{1/r}, \end{cases} \qquad r \in (1, +\infty).$$

引理 1[16] 设 X, Y 是两个 Banach 空间，$L: D(L) \subset X \to Y$ 是指标为 0 的 Fredholm 算子，$\Omega \subset X$ 为有界开集，$N: X \to Y$ 为 $\bar{\Omega}$ 上 L- 紧的，如果下列条件满足：

1）对任意的 $\lambda \in (0,1)$，$x \in \partial\Omega \cap D(L)$，均有 $Lx \neq \lambda Nx$；

2）对任意的 $x \in \ker L \cap \partial\Omega$，均有 $QNx \neq 0$；

3）$\deg\{JQN, \Omega \cap \ker L, 0\} \neq 0$，其中 $J: \mathrm{im}\, Q \to \ker L$ 同构，

则方程 $Lx = Nx$ 在 $\bar{\Omega} \cap D(L)$ 上至少存在一个解.（其中 $\bar{\Omega} = \partial\Omega \cup \Omega$，$\partial\Omega$ 为 Ω 的边界.）

定理 1 设 $p(t), q(t) \in C_\omega$，且满足条件：

$[\mathrm{H}_1]$ $\exists \sigma_0, a_0 > 0$，且 $xf(x) \geqslant \sigma_0 |x|^m$，$|f(x)| \leqslant a_0 |x|^{m-1}$，其中 $m > 1$；

$[\mathrm{H}_2]$ $\exists \sigma_1, a_1 > 0$，且 $xg(x) \leqslant -\sigma_1 |x|^n$，$|g(x)| \leqslant a_1 |x|^{n-1}$，其中 $n \geqslant 2$；

$[\mathrm{H}_3]$ $\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n} = 1$，$\dfrac{D}{\sigma_0}\left(\dfrac{E}{\sigma_1}\right)^{m-1} < 1$；

则方程(3)至少存在一个 ω- 周期解.

证明 分别定义算子

$$L: D(L) \subset X = C_\omega \to Y = C_\omega,\ L\begin{pmatrix} T \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T \\ h \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} T' \\ h' \end{pmatrix}$$

和

$$N: X \to Y,\ N\begin{pmatrix} T \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} CT + Dh + f(T) + p(t) \\ -ET - Rh + g(h) + q(t) \end{pmatrix}, \tag{4}$$

其中

$$D(L) = C_\omega^1 = \{x \mid x \in C^1(\mathbf{R}, R^2), x(t+\omega) \equiv x(t)\}.$$

易见，方程(2)可转换成算子方程：

$$L\begin{pmatrix} T \\ h \end{pmatrix} = N\begin{pmatrix} T \\ h \end{pmatrix}.$$

此外，根据算子的定义，不难得出 L 的核空间和像空间分别为

$$\ker L = R^2,\ \mathrm{im}\, L = \left\{u \in X, \int_0^\omega u(s)\mathrm{d}s = 0\right\}.$$

因此，L 是指标为 0 的 Fredholm 算子[17].

令投影算子 P, Q 分别为

$$P: X \to \ker L,\ Pv = v(0),$$

$$Q: X \to \mathrm{im}\, Q,\ Qv = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega v(s)\mathrm{d}s,$$

则 $\ker L = \mathrm{im}\, P$，$\ker Q = \mathrm{im}\, L$.

令 $K: \mathrm{im}\, L \to D(L) \cap \ker P$ 表示 $L|_{D(L) \cap \ker P}: D(L) \cap \ker P \to \mathrm{im}\, L$ 的唯一逆，

$$[Ky](t)=\int_0^t y(s)\mathrm{d}s \in D(L). \tag{5}$$

由式(4)、(5)易证 N 在 $\bar{\Omega}$ 上是 L- 紧的，其中 Ω 为 X 中的任意有界开集.

令

$$\Omega_1=\left\{u \,\middle|\, u=\begin{pmatrix}T\\h\end{pmatrix}\in D(L)\subset C_\omega,\ Lu=\lambda Nu,\ \lambda\in(0,1)\right\},$$

则 $\forall u\in\Omega_1$，有

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=\lambda CT+\lambda Dh+\lambda f(T)+\lambda p(t), & (6)\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=-\lambda ET-\lambda Rh+\lambda g(h)+\lambda q(t). & (7)\end{cases}$$

式(6)两边同乘 T，并在 $[0,\omega]$ 上积分得

$$\lambda C\int_0^\omega T^2\mathrm{d}t+\lambda D\int_0^\omega hT\mathrm{d}t+\lambda\int_0^\omega f(T)T\mathrm{d}t+\lambda\int_0^\omega p(t)T\mathrm{d}t=0.$$

由条件 $[\mathrm{H}_1]$ 有

$$\begin{aligned}\sigma_0\int_0^\omega |T|^m\mathrm{d}t\leqslant\int_0^\omega f(T)T\mathrm{d}t=&\\ -C\int_0^\omega T^2\mathrm{d}t-D\int_0^\omega hT\mathrm{d}t-\int_0^\omega p(t)T\mathrm{d}t\leqslant&\\ -D\int_0^\omega hT\mathrm{d}t-\int_0^\omega p(t)T\mathrm{d}t.&\end{aligned}$$

再由 Hölder 不等式得

$$\begin{aligned}\sigma_0\int_0^\omega|T|^m\mathrm{d}t\leqslant D\int_0^\omega|h|\cdot|T|\mathrm{d}t+\int_0^\omega|p(t)|\cdot|T|\mathrm{d}t\leqslant&\\ D\left(\int_0^\omega|h|^{m/(m-1)}\mathrm{d}t\right)^{1-1/m}\left(\int_0^\omega|T|^m\mathrm{d}t\right)^{1/m}+&\\ \left(\int_0^\omega|T|^m\mathrm{d}t\right)^{1/m}\left(\int_0^\omega|p(t)|^{m/(m-1)}\mathrm{d}t\right)^{1-1/m}.&\end{aligned}$$

又条件 $[\mathrm{H}_3]$ 中 $1/m+1/n=1$，从而整理得到

$$\|T\|_m^{m-1}\leqslant\frac{D}{\sigma_0}\|h\|_n+\frac{1}{\sigma_0}\|p\|_n. \tag{8}$$

对式(7)两边同乘 h，在 $[0,\omega]$ 上积分得

$$-\lambda E\int_0^\omega Th\mathrm{d}t-\lambda R\int_0^\omega h^2\mathrm{d}t+\lambda\int_0^\omega g(h)h\mathrm{d}t+\lambda\int_0^\omega q(t)h\mathrm{d}t=0.$$

由条件 $[\mathrm{H}_2]$ 有

$$\begin{aligned}\sigma_1\int_0^\omega|h|^n\mathrm{d}t\leqslant-\int_0^\omega g(h)h\mathrm{d}t=&\\ -E\int_0^\omega Th\mathrm{d}t-R\int_0^\omega h^2\mathrm{d}t+\int_0^\omega q(t)h\mathrm{d}t\leqslant&\\ -E\int_0^\omega hT\mathrm{d}t+\int_0^\omega q(t)h\mathrm{d}t.&\end{aligned}$$

再由 Hölder 不等式得

$$
\begin{aligned}
\sigma_1 \int_0^{\omega} |h|^n \mathrm{d}t \leqslant E \int_0^{\omega} |h| \cdot |T| \mathrm{d}t + \int_0^{\omega} |q(t)| \cdot |h| \mathrm{d}t \leqslant \\
E\left(\int_0^{\omega} |h|^n \mathrm{d}t\right)^{1/n} \left(\int_0^{\omega} |T|^{n/(n-1)} \mathrm{d}t\right)^{1-1/n} + \\
\left(\int_0^{\omega} |h|^n \mathrm{d}t\right)^{1/n} \left(\int_0^{\omega} |q(t)|^{n/(n-1)} \mathrm{d}t\right)^{1-1/n}.
\end{aligned}
$$

又条件[H_3]中 $1/m + 1/n = 1$, 上式整理得到

$$
\| h \|_n^{n-1} \leqslant \frac{E}{\sigma_1} \| T \|_m + \frac{1}{\sigma_1} \| q \|_m. \tag{9}
$$

将式(9)代入式(8),并由 $1/m + 1/n = 1$, 得

$$
\begin{aligned}
\| T \|_m^{m-1} \leqslant \frac{D}{\sigma_0}\left(\frac{E}{\sigma_1} \| T \|_m + \frac{1}{\sigma_1} \| q \|_m\right)^{1/(n-1)} + \frac{1}{\sigma_0} \| p \|_n \leqslant \\
\frac{D}{\sigma_0}\left(\frac{E}{\sigma_1} \| T \|_m\right)^{1/(n-1)} + \frac{D}{\sigma_0}\left(\frac{1}{\sigma_1} \| q \|_m\right)^{1/(n-1)} + \frac{1}{\sigma_0} \| p \|_n = \\
\frac{D}{\sigma_0}\left(\frac{E}{\sigma_1}\right)^{1/(n-1)} \cdot \| T \|_m^{1/(n-1)} + \frac{D}{\sigma_0}\left(\frac{1}{\sigma_1}\right)^{1/(n-1)} \times \\
\| q \|_m^{1/(n-1)} + \frac{1}{\sigma_0} \| p \|_n = \\
\frac{D}{\sigma_0}\left(\frac{E}{\sigma_1}\right)^{m-1} \cdot \| T \|_m^{m-1} + \frac{D}{\sigma_0}\left(\frac{1}{\sigma_1}\right)^{m-1} \cdot \| q \|_m^{m-1} + \frac{1}{\sigma_0} \| p \|_n.
\end{aligned}
$$

再由条件[H_3],得到

$$
\begin{aligned}
\| T \|_m \leqslant \left[1 - \frac{D}{\sigma_0}\left(\frac{E}{\sigma_1}\right)^{m-1}\right]^{-1/(m-1)} \times \\
\left[\frac{D}{\sigma_0}\left(\frac{1}{\sigma_1}\right)^{m-1} \cdot \| q \|_m^{m-1} + \frac{1}{\sigma_0} \| p \|_n\right]^{1/(m-1)} \triangleq M_0,
\end{aligned} \tag{10}
$$

其中 M_0 为与 λ 无关的常数.

将式(10)代入式(9) 得

$$
\| h \|_n \leqslant \left(\frac{E}{\sigma_1} M_0 + \frac{1}{\sigma_1} \| q \|_m\right)^{1/(n-1)} \triangleq N_0, \tag{11}
$$

其中 N_0 为与 λ 无关的常数.

又由积分中值定理, $\exists \xi_1 \in (0,\omega)$, 使

$$
\left(\int_0^{\omega} |T(t)|^m \mathrm{d}t\right)^{1/m} = (|T(\xi_1)|^m \cdot \omega)^{1/m} \leqslant M_0,
$$

即

$$
|T(\xi_1)| \leqslant \frac{M_0}{\sqrt[m]{\omega}} \triangleq c_1,
$$

其中 c_1 为与 λ 无关的常数.

同理, $\exists \xi_2 \in (0,\omega)$, 使

$$
|h(\xi_2)| \leqslant \frac{N_0}{\sqrt[n]{\omega}} \triangleq c_2,
$$

其中 c_2 为与 λ 无关的常数.

由式(6)得

$$|T'|\leqslant C|T|+D|h|+|f(T)|+|p(t)|,$$

由式(7)得

$$|h'|\leqslant E|T|+R|h|+|g(h)|+|q(t)|.$$

对 $t\in(0,\omega)$, 有

$$T(t)=T(\xi_1)+\int_{\xi_1}^{t}T'(s)\mathrm{d}s,$$

则

$$|T(t)|\leqslant|T(\xi_1)|+\int_0^{\omega}|T'(s)|\mathrm{d}s\leqslant$$

$$c_1+C\int_0^{\omega}|T|\mathrm{d}t+D\int_0^{\omega}|h|\mathrm{d}t+\int_0^{\omega}|f(T)|\mathrm{d}t+\int_0^{\omega}|p(t)|\mathrm{d}t.$$

由条件[H_1],Hölder 不等式及式(9)、(10)得

$$\begin{aligned}|T(t)|\leqslant{}& c_1+C\|T\|_m\omega^{1/n}+D\|h\|_n\omega^{1/m}+\\ & a_0\int_0^{\omega}|T|^{m-1}\mathrm{d}t+\omega\cdot\max_{t\in[0,\omega]}|p(t)|\leqslant\\ & c_1+C\|T\|_m\omega^{1/n}+D\|h\|_n\omega^{1/m}+\\ & a_0\left(\int_0^{\omega}1^m\mathrm{d}t\right)^{1/m}\left(\int_0^{\omega}(|T|^{m-1})^{m/(m-1)}\mathrm{d}t\right)^{(m-1)/m}+\omega\cdot\max_{t\in[0,\omega]}|p(t)|\leqslant\\ & c_1+C\|T\|_m\omega^{1/n}+D\|h\|_n\omega^{1/m}+a_0\omega^{1/m}\|T\|_m^{m-1}+\omega\cdot\max_{t\in[0,\omega]}|p(t)|\leqslant\\ & c_1+C\omega^{1/n}M_0+D\omega^{1/m}N_0+a_0\omega^{1/m}M_0^{m-1}+\omega\cdot\max_{t\in[0,\omega]}|p(t)|\triangleq M_1,\end{aligned}$$

其中 M_1 为与 λ 无关的常数.从而有

$$\|T\|_{\infty}\leqslant M_1.$$

同理,对 $t\in(0,\omega)$, 有

$$h(t)=h(\xi_2)+\int_{\xi_2}^{t}h'(s)\mathrm{d}s,$$

则

$$|h(t)|\leqslant|h(\xi_2)|+\int_0^{\omega}|h'(s)|\mathrm{d}s\leqslant$$

$$c_2+E\int_0^{\omega}|T|\mathrm{d}t+R\int_0^{\omega}|h|\mathrm{d}t+\int_0^{\omega}|g(h)|\mathrm{d}t+\int_0^{\omega}|q(t)|\mathrm{d}t.$$

由条件[H_2],Hölder 不等式及式(10)、(11)得

$$\begin{aligned}|h(t)|\leqslant{}& c_2+E\|T\|_m\omega^{1/n}+R\|h\|_n\omega^{1/m}+a_1\int_0^{\omega}|h|^{n-1}\mathrm{d}t+\omega\cdot\max_{t\in[0,\omega]}|q(t)|\leqslant\\ & c_2+E\|T\|_m\omega^{1/n}+R\|h\|_n\omega^{1/m}+a_1\omega^{1/n}\|h\|_n^{n-1}+\omega\cdot\max_{t\in[0,\omega]}|q(t)|\leqslant\\ & c_2+E\omega^{1/n}M_0+R\omega^{1/m}N_0+a_1\omega^{1/n}N_0^{n-1}+\omega\cdot\max_{t\in[0,\omega]}|q(t)|\triangleq N_1,\end{aligned}$$

其中 N_1 为与 λ 无关的常数.从而有

$$\|h\|_{\infty}\leqslant N_1.$$

设 T_0,h_0 为方程组

$$\begin{cases} CT + Dh + f(T) + \bar{p} = 0, \\ -ET - Rh + g(h) + \bar{q} = 0 \end{cases} \tag{12}$$

的 0 点,其中

$$\bar{p} = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} p(t)\,\mathrm{d}t,\ \bar{q} = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} q(t)\,\mathrm{d}t,$$

则

$$CT_0^2 + Dh_0T_0 + T_0f(T_0) + \bar{p}T_0 = 0.$$

由条件[H_1]得

$$\sigma_0 |T_0|^m + CT_0^2 + Dh_0T_0 + \bar{p}T_0 \leqslant$$
$$T_0f(T_0) + CT_0^2 + Dh_0T_0 + \bar{p}T_0 = 0,$$

即

$$\sigma_0 |T_0|^{m-1} + CT_0 + Dh_0 + \bar{p} \leqslant 0,$$

从而 $\exists M_2 > 0$,使得$|T_0| \leqslant M_2$.

同理

$$ET_0h_0 + Rh_0^2 - h_0g(h_0) - \bar{q}h_0 = 0.$$

由条件[H_2]得

$$\sigma_1 |h_0|^n + ET_0h_0 + Rh_0^2 - \bar{q}h_0 \leqslant 0,$$

即

$$\sigma_1 |h_0|^{n-1} + ET_0 + Rh_0 - \bar{q} \leqslant 0,$$

从而 $\exists N_2 > 0$,使得$|h_0| \leqslant N_2$.

令

$$\Omega_0 = \left\{ (x,y) \,\middle|\, \begin{pmatrix} Cx + Dy + f(x) + \bar{p} \\ -Ex - Ry + g(y) + \bar{q} \end{pmatrix} = 0,\ |x| \leqslant M_2,\ |y| \leqslant N_2 \right\},$$

显然,式(12)的 0 点在闭区域 Ω_0 内.作

$$\Omega = \{ (T,h) \mid T \in X,\ h \in X,\ \|T\|_{\infty} < \max\{M_1 + 1, M_2 + 1\},$$
$$\|h\|_{\infty} < \max\{N_1 + 1, N_2 + 1\} \},$$

则

$$\forall \begin{pmatrix} T \\ h \end{pmatrix} \in \partial\Omega \cap \ker L,\ QN\begin{pmatrix} T \\ h \end{pmatrix} \neq 0.$$

再令

$$J\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix},$$

作同伦映射

$$H\left(\mu, \begin{pmatrix} T \\ h \end{pmatrix}\right) = \mu\begin{pmatrix} T \\ h \end{pmatrix} + (1-\mu)JQN\begin{pmatrix} T \\ h \end{pmatrix},$$

从而

$$H\left(\mu, \begin{pmatrix} T \\ h \end{pmatrix}\right) = \mu\begin{pmatrix} T \\ h \end{pmatrix} + (1-\mu)\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\omega}\displaystyle\int_0^{\omega}[CT + Dh + f(T) + p(t)]\,\mathrm{d}t \\ \dfrac{1}{\omega}\displaystyle\int_0^{\omega}[ET + Rh - g(h) - q(t)]\,\mathrm{d}t \end{pmatrix}.$$

且对

$$\forall \begin{pmatrix} T \\ h \end{pmatrix} \in \partial \Omega \cap \ker L,$$

有

$$(T,h)\, H\left(\mu, \begin{pmatrix} T \\ h \end{pmatrix}\right) = \mu (T^2 + h^2) + (1-\mu) \begin{pmatrix} CT^2 + DhT + Tf(T) + \bar{p}T \\ ETh + Rh^2 - hg(h) - \bar{q}h \end{pmatrix},$$

即

$$\forall \begin{pmatrix} T \\ h \end{pmatrix} \in \partial \Omega \cap \ker L,\ H\left(\mu, \begin{pmatrix} T \\ h \end{pmatrix}\right) \neq 0.$$

所以有

$$\begin{aligned} &\deg(JQN, \Omega \cap \ker L, 0) = \deg(H(0, \cdot), \Omega \cap \ker L, 0) = \\ &\quad \deg(H(1, \cdot), \Omega \cap \ker L, 0) = \deg(I, \Omega \cap \ker L, 0) \neq 0. \end{aligned}$$

从而引理 1 中的条件 3)成立.因此,由引理 1,系统(3)存在 ω- 周期解.

3 结　　论

1) 本文研究了一个简化的,在主要特征方面能代表气候系统的,而又方便于应用新的数学理论和方法的海气耦合随机-动力气候模式.显然模式(3)是非线性的随机过程.由于方程(3)难以求解,因此本文中所使用的重合度理论有别于一般的数学物理理论,其中的延拓定理是解决动力系统周期解存在性问题的非常有效和常用的方法,它直接从方程本身的特点来了解方程解的性态,而并不需要求出方程的解,在物理、力学、偏微分方程等学科中都有广泛的应用.在本文所得结果的基础上,还可以进一步探讨该模式的平衡态及其稳定性等其它动力学行为,我们将另文讨论.

2) 对于一个连续过程,随机-动力气候模式中随机强迫项为白噪声是不真实的,在物理上也是不能实现的.一般情况下,随机输入项为白噪声,模式很难进行周期振荡分析,而假定输入项为一般随机过程则具有更普遍更实际的意义,且有利于周期性的讨论.因此,本文讨论了一类随机项为非白噪声时的海气耦合随机-动力气候模式,得到了一定条件下模型存在周期解的结果.对海气耦合随机模式周期性的研究,有助于气候系统演变机制的研究,而且为它们的非线性特征以及气候系统的预测问题提供了重要的理论依据.

参考文献(References):

[1] Hasselman K. Stochastic climate models, part Ⅰ: theory[J]. *Tellus*, 1976, **28**(6): 473-486.

[2] Frankignoul C, Hasselman K. Stochastic climate models, part II: application to sea-surface temperature anomalies and thermocline variability[J]. *Tellus*, 1977, **29**(4): 289-305.

[3] Lemke P. Stochastic perturbation of deterministic systems, part 3: application to zonally averaged energy models[J]. *Tellus*, 1977, **29**(5): 385-392.

[4] 李麦村. 海气相互作用的随机-动力理论[J]. 海洋学报, 1981, **3**(3): 382-389.(LI Mai-cun. The stochastic theory of air-sea interaction[J]. *Acta Oceanologica Sinica*, 1981, **3**(3): 382-389. (in Chinese))

[5] Möller J D, Shapiro L J. Influences of asymmetric heating on hurricane evolution in the MM5

[J]. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 2005, **62**(11): 3974-3992.

[6] Luo J J, Masson S, Behera S, Yamagata T. Extended ENSO predictions using a fully coupled ocean-atmosphere model[J]. *Journal of Climate*, 2008, **21**(1): 84-93.

[7] FENG Guo-ling, CAO Yong-zhong, CAO Hong-xing. Air-sea stochastic climatic model and its application[J]. *Chinese Journal of Computational Physics*, 2001, **18**(1): 57-63.

[8] Zhang R H, Zebiak S E. An embedding method for improving interannual variability simulations in a hybrid coupled model of the tropical Pacific Ocean-atmosphere system[J]. *Journal of Climate*, 2004, **17**(14): 2794-2812.

[9] 李麦村, 黄嘉佑. 关于海温准三年及半年周期振荡的随机气候模式[J]. 气象学报, 1984, **42**(2): 168-176.(LI Mai-cun, HUANG Jia-you. A stochastic climate model on the quasithree-yearly and half-yearly oscillation of the sea surface temperature[J]. *Journal of Meteorology*, 1984, **42**(2): 168-176.(in Chinese))

[10] WANG Chun-zai. A unified oscillator model for the El Nino-southern oscillation[J]. *Journal of Climate*, 2001, **14**(1): 98-115.

[11] LI Xiao-jing. The periodic solution to the model for the El Nino-southern oscillation[J]. *Chinese Physics B*, 2010, **19**(3): 030201-1-030201-3.

[12] DU Zeng-ji, LIN Wan-tao, MO Jia-qi. Perturbation method of studying the El Nino oscillation with two parameters by using the delay sea-air oscillator model[J]. *Chinese Physics B*, 2012, **21**(9): 090201-1-090201-5.

[13] 陈丽娟, 鲁世平. 一类太空等离子体单粒子运动模型的同宿轨[J]. 应用数学和力学, 2013, **34**(12): 1258-1265.(CHEN Li-juan, LU Shi-ping. Homoclinic orbit of the motion model for a single space plasma particle[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2013, **34**(12): 1258-1265.(in Chinese))

[14] 陈丽娟, 鲁世平. 零维气候系统非线性模式的周期解问题[J]. 物理学报, 2013, **62**(20): 200201-1-200201-4.(CHEN Li-juan, LU Shi-ping. The problem of periodic solution of nonlinear model in zero-dimensional climate system[J]. *Acta Physica Sinica*, 2013, **62**(20): 200201-1-200201-4.(in Chinese))

[15] 陈丽娟, 鲁世平. 无晨昏电场下带电粒子在中性片磁场中运动的周期轨[J]. 应用数学和力学, 2014, **35**(11): 1280-1286.(CHEN Li-juan, LU Shi-ping. The periodic orbits of electric particles sporting in neutral sheet magnetic field without the dawn-dusk electric field[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, **35**(11): 1280-1286.(in Chinese))

[16] Gaines R E, Mawhin J L. *Coincidence Degree and Nonlinear Differential Equations*[M]. Berlin: Springer, 1977.

[17] LU Shi-ping, CHEN Li-juan. The problem of existence of periodic solutions for neutral functional differential system with nonlinear difference operator[J]. *J Math Anal Appl*, 2012, **387**(2): 1127-1136.

Periodic Solutions to the Stochastic-Dynamic Climate Model With Sea-Air Interaction

CHEN Li-juan, LU Shi-ping, XU Jing

(*School of Mathematics and Statistics*, *Nanjing University of Information Science and Technology*, *Nanjing* 210044, *P.R.China*)

Abstract: Usually, most of the stochastic-dynamic climate models were addressed under the assumption that the stochastic forcing terms were white noises. However, many fast climate variables are expressed as nonlinear stochastic processes other than white noises. The stochastic forcing terms in the sea-air interaction model were improved, and a reasonable model was built accordingly. The Mawhin's continuation theorem as a very effective and general method to study the existence of periodic solutions to dynamic systems, was applied to the problem of periodic solutions to the proposed stochastic-dynamic climate model with sea-air interaction, in which the stochastic forcing terms were some stochastic processes differring from white noises. The existence of periodic solutions to the model under certain conditions was proved, and the potential application value of the results was discussed.

Key words: sea-air interaction; stochastic-dynamic climate system; periodic solution

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11271197)