**文章编号:**1000-0887(2015)10-1107-10


# 一类具有非线性发生率的时滞传染病模型的全局稳定性*

谢英超, 程 燕, 贺天宇

(中国人民解放军陆军军官学院, 合肥 230031)

**摘要:** 充分考虑人口统计效应、疾病的潜伏期与传播规律的复杂性,研究了一类具有非线性发生率的时滞 SIRS 传染病模型的动力学行为.通过分析对应的线性化近似系统的特征方程,证明了无病平衡点的局部稳定性.利用 Lyapunov-LaSalle 不变集原理,当基本再生数 $R_0 < 1$ 时,证明了无病平衡点是全局渐近稳定的;当 $R_0 > 1$ 时,得到了地方病平衡点全局渐近稳定的充分条件.所得结论可为人们有效预防和控制传染病传播提供一定的理论依据.

**关 键 词:** SIRS 传染病模型; 非线性发生率; 时滞; 平衡点; 稳定性
**中图分类号:** O175.13 **文献标志码:** A
doi:10.3879/j.issn.1000-0887.2015.10.010

## 引 言

传染病因为其可传染性,严重地危及着人们的健康乃至生命,给人类生存和国民经济造成不可估量的损失[1].因此,传染病的研究一直是医学界和生态环境学界倍受关注的对象之一.传染病动力学的建模与研究是分析疾病传播规律的一种重要方法[2].许多学者利用动力学的研究方法建立了相应的数学模型[3-7].在传染病模型中,疾病发生率起着重要的作用,除了双线性发生率、标准发生率外,越来越多的学者研究非线性发生率[8-9],因为它能更为精确地揭示传染病的传播机理.另一方面,时滞在传染病的传播过程中发挥着不可忽视的重要作用[10-11],它可用来描述传染病的潜伏期、患者对疾病的感染期以及恢复者对疾病的免疫期等.因此,许多传染病模型用非线性时滞微分方程来描述更为符合实际,能很好地反映疾病的传播规律,从而能为预防和控制疾病传播提供有效的防御策略.关于具有时滞和非线性发生率的传染病模型的研究已经取得了丰富的成果[12-16].

目前,大多数针对传染病模型的研究没有考虑人口统计效应.由于实际情况下人口有增长,忽略它会使得模型的动力学行为便于分析,但结果往往不能客观反映疾病的传播机理.充分考虑非线性发生率、时滞因素和人口统计效应,本文研究如下一类 SIRS 传染病模型:

---

* **收稿日期:** 2015-01-27; **修订日期:** 2015-05-21
**基金项目:** 国家自然科学基金(11202106);安徽省自然科学基金(1408085MA06)
**作者简介:** 谢英超(1989—),男,湖南郴州人,硕士生(通讯作者. E-mail: xieyingchao104@163.com);
程燕(1969—),女,安徽淮南人,副教授,博士,硕士生导师(E-mail: chengyan@hfuu.edu.cn);
贺天宇(1984— ),男,辽宁盘锦人,讲师(E-mail: tianyu_he@126.com).

$$
\begin{cases}
S'(t)=A-dS(t)-\tilde{f}(S(t-\tau),I(t-\tau))+\delta R(t),\\
I'(t)=\tilde{f}(S(t-\tau),I(t-\tau))-(\gamma+d+\mu)I(t),\\
R'(t)=\gamma I(t)-(d+\delta)R(t),\\
N'(t)=A-dN(t)-\mu I(t),
\end{cases}
\tag{1}
$$

式中, $S(t)$,$I(t)$ 和 $R(t)$ 分别为 $t$ 时刻易感者、染病者和恢复者的人数;$N=S+I+R$ 表示人口的总数;$A$ 为单位时间内新增的人口数;$d$ 为各类人员的自然死亡率; $\tilde{f}$ 为疾病的非线性发生率;$\gamma$,$\mu$ 分别为染病者的康复率和因病死亡率;$\delta$ 为恢复者的免疫失去率;$\tau$ 为时滞,表示疾病的潜伏期.所有参数均为正常数.系统(1)是一个典型的具有人口统计结构的非线性时滞 SIRS 传染病模型.

令 $K=A/d$, 则由系统(1)可知 K 表示人口的环境容纳量.作变换

$$x(t)=S(t)/K,\ y(t)=I(t)/K,\ z(t)=R(t)/K,\ u(t)=N(t)/K,$$

并记

$$f(x,y)=\tilde{f}(Kx,Ky)/K,$$

则系统(1)可化为如下等价系统:

$$
\begin{cases}
x'(t)=d(1-x(t))-f(x(t-\tau),y(t-\tau))+\delta z(t),\\
y'(t)=f(x(t-\tau),y(t-\tau))-(\gamma+d+\mu)y(t),\\
z'(t)=\gamma y(t)-(d+\delta)z(t),\\
u'(t)=d-du(t)-\mu y(t).
\end{cases}
\tag{2}
$$

依据生物学意义,考虑系统(2)满足如下初始条件:

$$
\begin{cases}
x(t)=\phi_1(t)\geqslant 0,\\
y(t)=\phi_2(t)\geqslant 0,\\
z(t)=\phi_3(t)\geqslant 0,\\
u(t)=\phi_4(t),
\end{cases}
\quad -\tau\leqslant t\leqslant 0,
\tag{3}
$$

式中 $\phi_i(t)\,(i=1,2,3,4)$ 为连续可微的初始值函数,且

$$\phi_4(t)=\phi_1(t)+\phi_2(t)+\phi_3(t)\leqslant 1,\qquad \forall t\in[-\tau,0].$$

## 1 基本再生数和平衡点

为便于研究系统(2)的基本再生数和平衡点,先给出如下定义、假设与引理.

**定义 1** 对于定义在 $U=[0,+\infty)\times[0,+\infty)$ 上的 2 元连续实函数 $f(x,y)$, 如果它满足如下条件:

(i) $f(0,y)=f(x,0)=0$,且 $\forall(x,y)\in(0,+\infty)\times(0,+\infty)$, 有
$f(x,y)>0$;

(ii) $f(x,y)$ 在定义域内具有连续的 2 阶偏导数,且 $\forall(x,y)\in U$, 有
$f_{xx}(x,y)\leqslant 0,\ f_{xy}(x,y)\geqslant 0,\ f_{yy}(x,y)\leqslant 0,$

则称 $f$ 属于 $\mathscr{F}$ 函数类,记为 $f\in\mathscr{F}$.

由定义 1 易证, $\mathscr{F}$ 函数类具有如下 3 条重要性质:

① 若常数 $\alpha>0$, $f\in\mathscr{F}$,则 $\alpha f\in\mathscr{F}$;

② 若常数 $\beta>0$, $f_1\in\mathscr{F}$,且 $f_2(x,y)=f_1(\beta x,\beta y)$,则 $f_2\in\mathscr{F}$;

③ 若 $f \in \mathscr{F}$,则当 $(x,y) \in U$ 时,有

$$f_x(x,0)=f_y(0,y)=0,\ f_x(x,y) \geqslant 0,\ f_y(x,y) \geqslant 0.$$

在定义 1 的基础上,为研究方便,作如下假设:

**假设条件 H** 假设非线性时滞 SIRS 传染病模型(1)中的疾病发生率 $\tilde{f} \in \mathscr{F}$,即疾病发生率在没有易感者或染病者时为 0,同时存在易感者和染病者时大于 0,且随着易感者、染病者增加而增加的增长率非增.

假设条件 H 是符合生物学意义与实际情况的.事实上,有许多被广泛研究的疾病发生率都满足假设条件 H,如被广泛研究的双线性发生率 $\beta SI$; 文献[1]提到的如下疾病传染率:

$$\begin{cases} aS^bI, & a>0,\ 0<b<1, \\ aI(1-\mathrm{e}^{-bS}), & a>0,\ b>0, \\ \dfrac{bSI}{a+S}, & a>0,\ b>0; \end{cases}$$

文献[7]研究的非线性发生率 $\beta SI(1+\alpha I)^{-1}$, $\alpha>0$, $\beta>0$;文献[8]提到的形如 $\beta S^pI^q$ 的疾病发生率,当 $0<p,q\leqslant 1$ 时满足假设条件 H;文献[16]研究的非线性发生率 $SF(I)$,当满足文献[16]中的 3 个假设条件时也满足假设条件 H.

**引理 1** 对于具有如下形式的代数方程:

$$\begin{cases} x+ay=b, \\ h(x,y)-y=0. \end{cases} \tag{4}$$

如果满足如下条件:

(i) $a>0$, $b>0$ 为常数;

(ii) $h \in \mathscr{F}$;

令 $c=h_y(b,0)$,则当 $c\leqslant 1$ 时,方程(4)在区域 $D=\{(x,y): 0\leqslant x\leqslant b, 0\leqslant y\leqslant b/a\}$ 内仅存在解 $(b,0)$;当 $c>1$ 时,方程(4)在区域 $D$ 存在解 $(b,0)$,且存在唯一的正解 $(x^*,y^*)$ $(x^*>0,$ $y^*>0)$.

**证明** 仔细分析方程(4)及其满足的条件易得,方程(4)在区域 $D$ 内始终存在解 $(b,0)$.利用反证法易证,若方程(4)存在正解 $(x^*,y^*)$,则必有 $(x^*,y^*)\in D$ 且 $y^*<b/a$.

由方程(4)的第 1 式可解出 $x=b-ay$,代入方程(4)的第 2 式得

$$H(y) \triangleq h(b-ay,y)-y=0.$$

由 $h\in\mathscr{F}$,可得 $H(y)$ 在区间 $[0,b/a]$ 上是 2 阶可导的函数,且有

$$H(0)=h(b,0)-0=0,$$

$$H(b/a)=h(0,b/a)-b/a=-b/a<0,$$

$$H'(y)=-ah_x(b-ay,y)+h_y(b-ay,y)-1,$$

$$H'(0)=-ah_x(b,0)+h_y(b,0)-1=h_y(b,0)-1,$$

$$H''(y)=a^2h_{xx}(b-ay,y)-2ah_{xy}(b-ay,y)+h_{yy}(b-ay,y)\leqslant 0.$$

由 $H''(y)\leqslant 0$ 可得,$H(y)$ 在区间 $[0,b/a]$ 上是凹函数.利用反证法易证,不存在这样的区间使得当 $y\in[e,g]$ $(0\leqslant e<g\leqslant b/a)$ 时,有 $H(e)=0$ 且 $H'(y)\equiv 0$ 成立.

考虑到 $H(0)=0$, $H(b/a)<0$,则当 $H'(0)=h_y(b,0)-1\leqslant 0$,即 $c\leqslant 1$ 时,$H(y)=0$ 在区间 $[0,b/a]$ 上仅有解 $y=0$,从而方程(4)仅有解 $(b,0)$;当 $H'(0)>0$,即 $c>1$ 时,$H(y)=0$ 在区间 $y\in[0,b/a]$ 上有解 $y=0$,且存在唯一的正解 $y^*$,故方程(4)有解 $(b,0)$,且存在唯一的正

解$(x^*, y^*)$.证毕.

考虑到模型的生物学意义,有 $x(t) \geqslant 0, y(t) \geqslant 0, z(t) \geqslant 0$.由系统(2)的第4个方程可得

$$u'(t) = d - du(t) - \mu y(t) \leqslant d - du(t). \tag{5}$$

由式(5)、初始条件(3)和比较定理可得: $\forall t \geqslant 0$, 有

$$x(t) + y(t) + z(t) = u(t) \leqslant 1 + (u(0) - 1)\mathrm{e}^{-dt} \leqslant 1.$$

令

$$\mathbf{R}_+ = \{x \in \mathbf{R}: x \geqslant 0\},$$

$$R_+^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R^n: x_i \in \mathbf{R}_+,\ i = 1, 2, \cdots, n\} \qquad (\forall n \in \mathbf{N}^+),$$

则可定义等价系统(2)的可行域为

$$\Omega = \{(x, y, z, u) \in R_+^4: u = x + y + z \leqslant 1\}. \tag{6}$$

易知,区域 $\Omega$ 是系统(2)在满足初始条件(3)下的有意义的范围.因此,系统(2)的动力学行为将仅在区域 $\Omega$ 内进行讨论.

研究表明,传染病模型的全局动力学行为往往取决于基本再生数[17],通常记为 $R_0$.基本再生数是指一个染病者进入全是易感者的种群中,在其平均染病期内所引起的继发性染病者的人数.一般来说,当 $R_0 < 1$ 时,染病者人数会不断减少直至疾病绝灭;当 $R_0 > 1$ 时,染病者人数会不断增加使得疾病持续发展成地方病.定义系统(2)的基本再生数为

$$R_0 = \frac{f_y(1, 0)}{\gamma + d + \mu}. \tag{7}$$

分析计算可得,对应系统(1)的基本再生数为

$$\tilde{R}_0 = \frac{\tilde{f}_I(K, 0)}{\gamma + d + \mu} = R_0.$$

**定理1** 在假设条件H下,系统(2)始终存在无病平衡点 $E^0 = (1, 0, 0, 1)$,且当 $R_0 \leqslant 1$ 时,系统(2)仅存在无病平衡点 $E^0$;当 $R_0 > 1$ 时,系统(2)还存在唯一的地方病平衡点 $E^* = (x^*, y^*, z^*, u^*)$, 且满足如下关系式:

$$\begin{cases} x^* = 1 - By^*, \\ f(1 - By^*, y^*)/(\gamma + d + \mu) - y^* = 0, \\ z^* = \gamma y^*/(d + \delta), \\ u^* = (d - \mu y^*)/d, \end{cases} \tag{8}$$

式中

$$B = \frac{d^2 + d\gamma + d\delta + d\mu + \delta\mu}{d(d + \delta)} > 1.$$

**证明** 令系统(2)的右端为0,有

$$\begin{cases} d(1 - x) - f(x, y) + \delta z = 0, \\ f(x, y) - (\gamma + d + \mu)y = 0, \\ \gamma y - (d + \delta)z = 0, \\ d - du - \mu y = 0. \end{cases} \tag{9}$$

从而,在假设条件H下, $E^0 = (1, 0, 0, 1)$ 总是式(9)的解,即系统(2)始终存在无病平衡点.对式(9)进行计算可得

$$\begin{cases} x + By = 1, \\ f(x,y)/(\gamma + d + \mu) - y = 0, \\ z = \gamma y/(d + \delta), \\ u = (d - \mu y)/d. \end{cases} \tag{10}$$

易证,若方程(10)存在正解 $E^*$,则必有 $y^* \in (0,1/B)$,且当存在唯一的 $y^* \in (0,1/B)$ 使得方程(10) 成立时,则方程(10) 存在唯一的正解 $E^*$ 且 $E^* \in \Omega$.事实上,当 $y^* \in (0,1/B)$ 时,由式(10) 易得,$x^* > 0$,$z^* > 0$ 且 $0 < u^* < 1$,即 $E^* \in \Omega$.从而,要证地方病平衡点的存在唯一性,转化为证明如下方程:

$$\begin{cases} x + By = 1, \\ f(x,y)/(\gamma + d + \mu) - y = 0 \end{cases} \tag{11}$$

在区域 $\{(x,y): 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1/B\}$ 内存在唯一的正解.由假设条件 H 及 $\mathscr{F}$ 函数类的性质,并利用引理 1 易得,若 $R_0 \leqslant 1$,方程(11)仅有解(1,0),从而系统(2)仅存在无病平衡点;若 $R_0 > 1$,方程(11) 存在唯一的正解$(x^*,y^*)$,从而系统(2) 还存在唯一的地方病平衡点 $E^*$,且满足关系式(8).证毕.

## 2 无病平衡点的局部稳定性

在本节中,利用线性化近似系统的特征方程和时滞系统的稳定性切换原理,研究系统(2)的无病平衡点的局部稳定性.

**定理 2** 在假设条件 H 下,当 $R_0 < 1$ 时,系统(2) 的无病平衡点 $E^0 = (1,0,0,1)$ 是全时滞局部渐近稳定的;当 $R_0 > 1$ 时,系统(2) 的无病平衡点 $E^0$ 是不稳定的.

**证明** 因为系统(2)只有 3 个独立方程,可得系统(2)平衡点的稳定性与如下系统等价:

$$\begin{cases} x'(t) = d(1 - x(t)) - f(x(t-\tau), y(t-\tau)) + \delta z(t), \\ y'(t) = f(x(t-\tau), y(t-\tau)) - (\gamma + d + \mu) y(t), \\ z'(t) = \gamma y(t) - (d + \delta) z(t). \end{cases} \tag{12}$$

作变换 $\hat{x}(t) = x(t) - 1$,$\hat{y}(t) = y(t)$,$\hat{z}(t) = z(t)$ 代入系统(12),并在平衡点处(0,0,0)线性化得

$$\begin{cases} \hat{x}'(t) = -d\hat{x}(t) + \delta\hat{z}(t) - f_x(1,0)\hat{x}(t-\tau) - f_y(1,0)\hat{y}(t-\tau), \\ \hat{y}'(t) = -(\gamma + d + \mu)\hat{y}(t) + f_x(1,0)\hat{x}(t-\tau) - f_y(1,0)\hat{y}(t-\tau), \\ z'(t) = \gamma\hat{y}(t) - (d+\delta)\hat{z}(t). \end{cases} \tag{13}$$

考虑到 $f_x(1,0) = 0$,则线性化近似系统(13)对应的特征方程为

$$\Delta(\lambda,\tau) \triangleq (\lambda + d)(\lambda + d + \delta)(\lambda + \gamma + d + \mu - f_y(1,0)e^{-\lambda\tau}) = 0. \tag{14}$$

显然,方程(14)有 2 个负实根 $\lambda_1 = -d$,$\lambda_2 = -(d+\delta)$,其余的根由以下方程决定:

$$\tilde{\Delta}(\lambda,\tau) \triangleq \lambda + \gamma + d + \mu - f_y(1,0)e^{-\lambda\tau} \triangleq P(\lambda) + Q(\lambda)e^{-\lambda\tau} = 0, \tag{15}$$

式中

$$P(\lambda) = \lambda + \gamma + d + \mu,\ Q(\lambda) = -f_y(1,0).$$

当 $\tau = 0$ 时,方程(15)仅有根 $\lambda_3 = -(\gamma + d + \mu)(1 - R_0)$,则当 $R_0 < 1$ 时,有 $\lambda_3 < 0$,即此时系统(13) 的无病平衡点稳定;当 $R_0 > 1$ 时,有 $\lambda_3 > 0$,即此时系统(13)的无病平衡点不稳定.为考察时滞对系统稳定性的影响,定义

$$F(w) \triangleq |P(iw)|^2 - |Q(iw)|^2 = \omega^2 + (\gamma + d + \mu)^2(1 - R_0^2) = 0, \quad \omega \in \mathbf{R}. \tag{16}$$

当 $R_0 < 1$ 时,方程(16)没有正实数根,由时滞系统的稳定性切换原理得[17],系统(13)此时不发生稳定性切换,即系统(13)的无病平衡点对任意的 $\tau \geq 0$ 都是局部渐近稳定的;当 $R_0 > 1$ 时,方程(16)仅有一个简单的正实数根,而对应的常微系统($\tau = 0$)是不稳定的,故系统(13)此时也不发生稳定性切换,即系统(13)的无病平衡点对任意的 $\tau \geq 0$ 都是不稳定的.证毕.

# 3 各类平衡点的全局稳定性

本节进一步研究系统(2)的无病平衡点和地方病平衡点的全局稳定性.利用 Lyapunov-LaSalle 不变集原理,通过构造适当的 Lyapunov 泛函,当 $R_0 < 1$ 时,证明了系统(2)的无病平衡点是全局渐近稳定的;当 $R_0 > 1$ 时,得到了系统(2)的地方病平衡点是全局渐进稳定的充分条件.

**定理 3** 在假设条件 H 下,当 $R_0 < 1$ 时,系统(2)的无病平衡点 $E^0 = (1,0,0,1)$ 在可行域 $\Omega$ 内是全局渐近稳定的,即疾病将最终消除,其中 $\Omega$ 由式(6)给定.

**证明** 令 $\phi_t = (x(t+\theta),\ y(t+\theta),\ z(t+\theta))$, $\theta \in [-\tau, 0]$, 构造如下形式的 Lyapunov 泛函:

$$V_0(\phi_t) = y(t) + \int_{t-\tau}^{t} f(x(s), y(s))\,\mathrm{d}s.$$

显然, $V(\phi_t)$ 在可行域 $\Omega$ 内是正定的.计算 $V(\phi_t)$ 沿着系统(12)对 $t$ 的导数得

$$\begin{aligned}
V_0'(\phi_t) &= y'(t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{t-\tau}^{t} f(x(s), y(s))\,\mathrm{d}s = \\
&f(x(t-\tau), y(t-\tau)) - (\gamma + d + \mu)y(t) + \\
&f(x(t), y(t)) - f(x(t-\tau), y(t-\tau)) = \\
&-(\gamma + d + \mu)y(t) + f(x(t), y(t)) \leq \\
&-(\gamma + d + \mu)y(t) + f(1, y(t)) \leq \\
&-(\gamma + d + \mu)y(t) + f_y(1,0)y(t) \leq \\
&-(\gamma + d + \mu)(1 - R_0)y(t).
\end{aligned}$$

因此,当 $R_0 < 1$ 时,有 $V_0'(\phi_t) \leq 0$ 在 $\Omega$ 内恒成立.令 $M_0$ 为集合 $\{(x(t), y(t), z(t)):\ V_0'(\phi_t) = 0\}$ 的最大不变集,则 $M_0 = \{(1,0,0)\}$ 是单点集.由 Lyapunov-LaSalle 不变集原理[18]得,系统(12)的平衡点(1,0,0)是全局渐近稳定的,从而系统(2)的无病平衡点 $E^0$ 是全局渐近稳定的.证毕.

**定理 4** 在假设条件 H 下,当 $R_0 > 1$ 时,若如下矩阵 $\boldsymbol{C}$ 是正定的,则系统(2)的地方病平衡点 $E^* = (x^*, y^*, z^*, u^*)$ 在 $\tilde{\Omega}$ 内是全局渐近稳定的,即疾病将持续存在,$(x^*, y^*, z^*, u^*)$ 由式(8)决定,且

$$\tilde{\Omega} = \Omega - \{(x, y, z, u):\ y = 0\},$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 2d - 3f_x^* - f_y^* & 0 & -\delta \\ 0 & 2d_2 - f_x^* - 3f_y^* & -\gamma \\ -\delta & -\gamma & 2d_1 \end{bmatrix},$$

式中

$$f_x^* = f_x(x^*, y^*),\ f_y^* = f_y(x^*, y^*).$$

**证明** 令 $\omega_1(t) = x(t) - x^*$, $\omega_2(t) = y(t) - y^*$, $\omega_3(t) = z(t) - z^*$, 代入系统(12)并在(0,0,0)处线性化得

$$\begin{cases}\omega_1'(t)=-d\omega_1(t)+\delta\omega_3(t)-f_x^*\omega_1(t-\tau)-f_y^*\omega_2(t-\tau),\\ \omega_2'(t)=-d_2\omega_2(t)+f_x^*\omega_1(t-\tau)+f_y^*\omega_2(t-\tau),\\ \omega_3'(t)=\gamma\omega_2(t)-d_1\omega_3(t).\end{cases}\tag{17}$$

显然,系统(2)的地方病平衡点 $E^*=(x^*,y^*,z^*,u^*)$ 的稳定性等价于系统(17)的零点稳定性.令 $\omega_t=(\omega_1(t+\theta),\omega_2(t+\theta),\omega_3(t+\theta))$,$\theta\in[-\tau,0]$,定义 $V_{1i}(\omega_t)=\omega_i^2(t)$,$i=1,2,3$,计算 $V_{1i}(\omega_t)$ 沿着系统(17)对 $t$ 的导数得

$$\begin{aligned}V_{11}'(\omega_t)=&-2d\omega_1^2(t)+2\delta\omega_1(t)\omega_3(t)-\\&2f_x^*\omega_1(t)\omega_1(t-\tau)-2f_y^*\omega_1(t)\omega_2(t-\tau)\leqslant\\&-2d\omega_1^2(t)+2\delta\omega_1(t)\omega_3(t)+f_x^*(\omega_1^2(t)+\omega_1^2(t-\tau))+\\&f_y^*(\omega_1^2(t)+\omega_2^2(t-\tau)),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V_{12}'(\omega_t)=&-2d_2\omega_2^2(t)+2f_x^*\omega_2(t)\omega_1(t-\tau)+2f_y^*\omega_2(t)\omega_2(t-\tau)\leqslant\\&-2d_2\omega_2^2(t)+f_x^*(\omega_2^2(t)+\omega_1^2(t-\tau))+f_y^*(\omega_2^2(t)+\omega_2^2(t-\tau)),\end{aligned}$$

$$V_{13}'(\omega_t)=2\gamma\omega_2(t)\omega_3(t)-2d_1\omega_3^2(t).$$

定义

$$V_{14}(\omega_t)=2f_x^*\int_{t-\tau}^{t}\omega_1^2(s)\,\mathrm{d}s+2f_y^*\int_{t-\tau}^{t}\omega_2^2(s)\,\mathrm{d}s,$$

计算 $V_{1i}(\omega_t)(i=1,2,3)$ 沿着系统(17)对 $t$ 的导数得

$$V_{14}'(\omega_t)=2f_x^*(\omega_1^2(t)-\omega_1^2(t-\tau))+2f_y^*(\omega_2^2(t)-\omega_2^2(t-\tau)).$$

综上,构造如下形式的 Lyapunov 泛函:

$$V_1(\omega_t)=V_{11}(\omega_t)+V_{12}(\omega_t)+V_{13}(\omega_t)+V_{14}(\omega_t).$$

显然, $V_1(\omega_t)$ 是正定的,计算 $V_1(\omega_t)$ 沿着系统(17)对 $t$ 的导数得

$$\begin{aligned}V_1'(\omega_t)\leqslant&-(2d-3f_x^*-f_y^*)\omega_1^2(t)-(2d_2-f_x^*-3f_y^*)\omega_2^2(t)-\\&2d_1\omega_3^2(t)+2\delta\omega_1(t)\omega_3(t)+2\gamma\omega_2(t)\omega_3(t)=\\&-(\omega_1(t),\omega_2(t),\omega_3(t))\boldsymbol{C}(\omega_1(t),\omega_2(t),\omega_3(t))^{\mathrm{T}}.\end{aligned}$$

由矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的正定性可得,$V_1'(\omega_t)$ 是负定的.令 $M_1$ 为集合 $\{(\omega_1(t),\omega_2(t),\omega_3(t)):V_1'(\omega_t)=0\}$ 的最大不变集,则 $M_1=\{(0,0,0)\}$ 是单点集.由 Lyapunov-LaSalle 不变集原理[18]得,系统(17)的平衡点(0,0,0)是全局渐近稳定的,从而系统(2)的地方病平衡点 $E^*$ 在 $\tilde{\Omega}$ 内是全局渐近稳定的.证毕.

**推论 1** 在假设条件 H 下,若 $R_0>1$,且常数 $C_1>0$,$C_2>0$,$2d_1C_1C_2-C_1\gamma^2-C_2\delta^2>0$,则系统(2) 的地方病平衡点 $E^*$ 在 $\tilde{\Omega}$ 内是全局渐近稳定的,其中

$$C_1=2d-3\hat{f}_x-\hat{f}_y,\ C_2=2d_2-\hat{f}_x-3\hat{f}_y,$$

式中

$$\hat{f}_x=f_x(0,1/B),\ \hat{f}_y=f_y(1,0).$$

**证明** 由于 $(x,y)\in U$ 时,有 $f_{xx}(x,y)\leqslant 0$, $f_{xy}(x,y)\geqslant 0$, $f_{yy}\leqslant 0$;又由于 $x^*\in(0,1)$,$y^*\in(0,1/B)$,从而 $f_x(x^*,y^*)\leqslant f_x(0,1/B)$, $f_y(x^*,y^*)\leqslant f_y(1,0)$,因此 $2d-3f_x^*-f_y^*\geqslant C_1$,$2d_2-f_x^*-3f_y^*\geqslant C_2$.不妨设 $2d-3f_x^*-f_y^*=C_1+\Delta C_1$,$2d_2-f_x^*-3f_y^*=C_2+\Delta C_2$,则 $\Delta C_1\geqslant 0$,$\Delta C_2\geqslant 0$.

由 $C_1>0$,$C_2>0$ 与 $2d_1C_1C_2-C_1\gamma^2-C_2\delta^2>0$,可得

$$2d_1C_1C_2 > C_1\gamma^2 + C_2\delta^2 \geqslant C_1\gamma^2,\ 2d_1C_1C_2 > C_1\gamma^2 + C_2\delta^2 \geqslant C_2\delta^2,$$
$$C_1 + \Delta C_1 > 0,\ C_2 + \Delta C_2 > 0.$$

从而 $2d_1C_2 > \gamma^2$，$2d_1C_1 > \delta^2$，故矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的 2 阶主子式为 $(C_1 + \Delta C_1)(C_2 + \Delta C_2) > 0$，其 3 阶主子式为

$$\begin{aligned}\det(\boldsymbol{C}) = {} & 2d_1(C_1 + \Delta C_1)(C_2 + \Delta C_2) - (C_1 + \Delta C_1)\gamma^2 - (C_2 + \Delta C_2)\delta^2 = \\ & (2d_1C_1C_2 - C_1\gamma^2 - C_2\delta^2) + \Delta C_1(2d_1C_2 - \gamma^2) + \\ & \Delta C_2(2d_1C_1 - \delta^2) + 2d_1\Delta C_1\Delta C_2 > 0.\end{aligned}$$

因此，矩阵 $\boldsymbol{C}$ 是正定的，满足定理 4 的条件，从而系统(2) 的地方病平衡点 $E^*$ 在 $\tilde{\Omega}$ 内是全局渐近稳定的.证毕.

# 4 结 束 语

传染病的传播是一个很复杂、涉及因素多的生物现象，需要将其简化并建立基本模型，然后利用微分方程理论研究模型的动力学行为.本文研究了一类非线性时滞 SIRS 传染病模型，该模型既考虑了具有常数输入率的人口统计效应，又考虑了不容忽略的时滞因素与更符合实际的非线性发生率，比一般的传染病模型考虑的因素更多，也更复杂.从而，该模型能更精准地描述也更加贴近实际，能更好地反映人口变化和疾病的传播机理，具有重要的生物学意义.通过理论分析，得到了模型的基本再生数 $R_0$、无病平衡点的始终存在性和地方病平衡点的存在唯一性.通过分析对应的线性化近似系统的特征方程，利用时滞系统的稳定性切换原理，证明了模型的无病平衡点的全时滞局部稳定性.利用 Lyapunov-LaSalle 不变集原理，若 $R_0 < 1$，证明了模型的无病平衡点是全局渐近稳定的，即疾病将最终消除；若 $R_0 > 1$，证明了在一定条件下，模型的地方病平衡点是全局渐近稳定的，即疾病将持续存在.通过增强人们的防病意识、切断传播途径及提高卫生条件、医疗水平等有力的措施以控制疾病的发生率和增加染病者的康复率.调控 $R_0$ 使之小于 1，能避免传染病持续发展成地方病，从而最大限度地减少疾病带来的损失.因此，本文的研究成果能为人们科学有效地预防和控制传染病的传播提供极具价值的理论依据，并且对其它类型传染病模型的研究具有一定的借鉴意义.

## 参考文献(References)：

[1] 温朝晖，莫嘉琪. 一类流行性传染病生态模型的摄动解[J]. 武汉大学学报(理学版)，2011，**57**(2)：105-108.(WEN Zhao-hui, MO Jia-qi. Perturbed solution of a class of epidemic contagion ecological model[J]. *Journal of Wuhan University*(*Natural Science Edition*), 2011, **57**(2): 105-108.(in Chinese))

[2] 陈兰荪，孟新柱，焦建军. 生物动力学[M]. 北京：科学出版社，2009：252-340.(CHEN Lan-sun, MENG Xin-zhu, JIAO Jian-jun. *Biological Dynamics*[M]. Beijing: Science Press, 2009: 252-340.(in Chinese))

[3] RUAN Shi-gui, WANG Wen-di. Dynamical behavior of an epidemic model with a nonlinear incidence rate[J]. *Journal of Differential Equations*, 2003, **188**(1): 135-163.

[4] Oliveira R D S, Rezende A C. Global phase portraits of a SIS model[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2013, **219**(9): 4924-4930.

[5] GUO Li-na, PEI Yong-zhen, LIU Yuan. An infectious disease model with a time delay in loss of vaccine immunity and vertical transmission[J]. *Journal of Biomathematics*, 2013, **28**(3): 385-389.

[6] 刘玉英，肖燕妮. 一类受媒体影响的传染病模型的研究[J]. 应用数学和力学，2013，**34**(4)：399-407.(LIU Yu-yan，XIAO Yan-ni. An epidemic model with saturated media/psychological impact[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*，2013，**34**(4)：399-407.(in Chinese))

[7] 宫兆刚，杨柳，李浏兰. 具有常数输入率的 SIRS 传染病模型的稳定性分析[J]. 应用数学，2013，**26**(3)：477-481.(GONG Zhao-gang，YANG Liu，LI Liu-lan. Global stability of an SIRS epidemic model with constant removal rate[J]. *Mathematica Applicata*，2013，**26**(3)：477-481.(in Chinese))

[8] 王拉娣，李建全. 一类带有非线性传染率的 SEIS 传染病模型的定性分析[J]. 应用数学和力学，2006，**27**(5)：591-596.(WANG La-di，LI Jian-quan. Qualitative analysis of an SEIS epidemic model with nonlinear incidence rate[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*，2006，**27**(5)：591-596.(in Chinese))

[9] 杨洪，魏俊杰. 一类带有非线性接触率的 SIR 传染病模型的稳定性[J]. 高校应用数学学报，2014，**29**(1)：11-16.(YANG Hong，WEI Jun-jie. Stability of SIR epidemical model with a class of nonlinear incidence rates[J]. *Applied Mathematics—A Journal of Chinese Universities*，2014，**29**(1)：11-16.(in Chinese))

[10] 杨亚莉，李建全，刘万萌，唐三一. 一类具有分布时滞和非线性发生率的媒介传染病模型的全局稳定性[J]. 应用数学和力学，2013，**34**(12)：1291-1299.(YANG Ya-li，LI Jian-quan，LIU Wan-meng，TANG San-yi. Global stability of a vector-borne epidemic model with distributed delay and nonlinear incidence[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*，2013，**34**(12)：1291-1299.(in Chinese))

[11] 周艳丽，张卫国. 一类具有非单调传染率的 SEIRS 时滞传染病模型的全局稳定性[J]. 上海理工大学学报，2014，**36**(2)：103-109.(ZHOU Yan-li，ZHANG Wei-guo. Global stability of a delayed SEIRS epidemic model with non-monotone incidence rate[J]. *Journal of University of Shanghai for Science and Technology*，2014，**36**(2)：103-109.(in Chinese))

[12] HUANG Gang，Takeuchi Y，MA Wan-biao，WEI Dai-jun. Global stability for delay SIR and SEIR epidemic models with nonlinear incidence rate[J]. *Bulletin of Mathematical Biology*，2010，**72**(5)：1192-1207.

[13] Enatsu Y，Nakata Y，Muroya Y. Lyapunov functional techniques for the global stability analysis of a delayed SIRS epidemic model[J]. *Nonlinear Analysis*：*Real World Applications*，2012，**13**(5)：2120-2133.

[14] XU Rui，MA Zhi-en. Global stability of a delayed SEIRS epidemic model with saturation incidence rate[J]. *Nonlinear Dynamics*，2010，**61**(1)：229-239.

[15] SONG Mei，LIU Guang-chen，GUO Hong-xia. The local asymptotic stability of an SIR epidemic model with nonlinear incidence rate and time delay[J]. *Journal of Biomathematics*，2011，**26**(2)：255-262.

[16] 李鸣明，刘贤宁，吴凡. 一个具有非线性发生率的时滞 SIR 传染病模型的稳定性[J]. 西南大学学报(自然科学版)，2014，**36**(5)：61-66.(LI Ming-ming，LIU Xian-ning，WU Fan. The stability of a delayed SIR epidemic model with nonlinear incidence rate[J]. *Journal of Southwest University*(*Natural Science Edition*)，2014，**36**(5)：61-66.(in Chinese))

[17] MA Zhi-en，ZHOU Yi-cang，WU Jian-hong. *Modeling and Dynamics of Infectious Diseases*[M]. Beijing：Higher Education Press，2009：1-35，289-314.

[18] YANG Kuang. *Delay Differential Equations With Applications in Population Dynamics*[M]. San Diego：Academic Press，1993.

# Global Stability of a Class of Delayed Epidemic Models With Nonlinear Incidence Rates

XIE Ying-chao, CHENG Yan, HE Tian-yu
(*Army Officer Academy of PLA*, *Hefei* 230031, *P.R.China*)

**Abstract**: In view of the demographic effects, the latent period and the complexity of disease spread, the dynamic behavior of a class of delayed SIRS epidemic models with nonlinear incidence rates was investigated. The characteristic equation of the corresponding linearized approximation system was analyzed to prove the local stability of the disease-free equilibrium. By means of the Lyapunov-LaSalle invariant set principle, it was proved that the disease-free equilibrium was globally asymptotically stable when the basic reproduction number was less than 1; and the sufficient conditions were obtained for the global asymptotic stability of the endemic equilibrium when the basic reproduction number was greater than 1. Consequently, the conclusions provide a theoretical reference for the effective prevention and control of the spread of communicable diseases.

**Key words**: SIRS epidemic model; nonlinear incidence rate; time delay; equilibrium; stability
**Foundation item**: The National Natural Science Foundation of China(11202106)