

# 复杂介质中扩散和耗散行为的 分数阶导数唯象建模\*

庞国飞<sup>1,2</sup>, 陈文<sup>1,2</sup>, 张晓棣<sup>3</sup>, 孙洪广<sup>1,2</sup>

- (1. 水文水资源与水利工程科学国家重点实验室(河海大学), 南京 210098;
2. 河海大学 力学与材料学院, 南京 211100;
3. 西门子工业软件(上海)有限公司, 上海 200050)

(本刊编委陈文来稿)

**摘要:** 复杂介质一般是多相混合物,与普通固体、液体和气体相比,其力学行为具有明显的记忆、路径依赖性特征,难以用一般的经典力学模型来描述,因而显得反常.从数学力学建模上看,整数阶导数的局部极限定义不适合描述这样的非局部力学行为.分数阶导数实质上是微分-积分算子,能精确地刻画力学行为的全局相关特征.而且分数阶模型具有明确的统计物理解释.20世纪末至今,复杂介质反常力学行为的分数阶导数模型由于具有参数少,且参数的物理意义明确等突出优点,开始引起广泛关注.该文从唯象建模的角度,综述了分数阶导数和分形导数在复杂介质的反常扩散和频率依赖能量耗散建模中的应用与发展.

**关键词:** 复杂介质; 分数阶导数; 分形导数; 扩散; 耗散; 数学力学建模

**中图分类号:** O39; O352; O371; O175.2 **文献标志码:** A

**doi:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2015.11.001

## 引言

土壤、水下沉积物、裂隙岩体、生物组织、聚合物、颗粒物质、泥石流、结构安全工程吸能材料等复杂介质是水利水电、地球物理勘探、生物医学、土木、环境工程等领域的基本研究对象,是介于理想固体和液体之间的复杂状态物质,大多由大分子或基团组成,经常是多相介质、复杂粘弹性材料和非 Newton(牛顿)流体.大量的实验表明,这些复杂介质的应力松弛是非指数型的、有记忆性的,传统的粘弹性本构模型不能够精确地描述它们的应力应变关系;其振动和声波传播的耗散、热传导、渗流行为复杂反常,不服从理想固体和流体的各种标准的力学和物理“梯度”律(例如 Darcy 律、Newton 粘性、Fourier 热传导、Fick 扩散等);相应试验测量数据拟

\* 收稿日期: 2015-08-26; 修订日期: 2015-09-07

**基金项目:** 国家自然科学基金(面上项目)(11372097);国家杰出青年科学基金(11125208);111 引智计划(B12032)

**作者简介:** 庞国飞(1987—),男,四川南充人,博士生(E-mail: guofei\_pang\_1987@hhu.edu.cn);  
陈文(1967—),男,福州人,教授,博士,博士生导师(通讯作者. E-mail: chenwen@hhu.edu.cn);

张晓棣(1985—),男,山东青岛人,工程师,博士;

孙洪广(1982—),男,山东聊城人,教授,博士,博士生导师.

合得到的经验公式经常表现为幂律(power law)函数形式。

复杂介质的力学行为比普通固体、液体和气体要复杂得多,难以用一般的经典力学模型来描述。从数学、力学建模上看,整数阶导数的局部极限定义不适合描述复杂介质的力学和物理现象所表现的记忆和遗传、路径依赖性。基于绝对空间和时间以及 Euclid(欧几里得)几何的假设,经典 Newton 力学认为空间和时间没有起点和终点,且处处连续可微,所导出的物理量,如速度、动量、加速度和力,均可由整数阶导数来定。物理现象的演化过程因而可以用标准的整数阶微分方程来描述,例如经典力学中的 Euler-Lagrange 方程、Hamilton 方程。虽然整数阶导数物理学模型在经典力学、声学、热传导、扩散、电磁学、甚至是量子力学中取得了巨大成功,物理学家和力学家也发现了越来越多的不能用整数阶导数模型很好解释的反常现象。例如,湍流的速度场不可微,非均匀介质中的粒子扩散不服从 Fick 扩散定律,复杂粘弹性材料的应力松弛函数是非指数的,生物组织中超声波的衰减系数并不总是声源频率的整数次幂。上述反常现象涉及物理和力学过程的记忆和遗传、路径依赖性和全局相关性。

大量试验表明,传统整数阶导数模型中的梯度律和指数函数关系(例如 Debye 松弛)一般不足以精确地描述复杂介质的力学行为。例如,在地下水溶质运移中,由于裂隙多孔岩层中存在优先流路径<sup>[1]</sup>,溶质的运移速度可能要高于 Fick 扩散定律的预测结果,呈现“快扩散”现象;同时,地下含水层也可能因存在低渗-高渗区域间的质量交换<sup>[1]</sup>而表现“慢扩散”。另一个典型例子是利用磁共振扩散加权成像技术检测人脑中水分的扩散<sup>[2-3]</sup>。试验表明,在高  $b$  值时,组织信号强度的衰减并不满足经典的指数关系  $S(b) = S_0 \exp(-Db)$ ,而是符合扩展指数关系  $S(b) = S_0 \exp(-bD)^\alpha$ ,其中  $b$  为某方向上施加的扩散敏感梯度磁场参数, $D$  为表观扩散系数, $\alpha$  表征大脑组织的各向异性程度或者微组织结构。此外,大量试验也表明,无序电介质(如聚合物、胶体、多孔材料等)的介电松弛函数  $\phi(t)$  并不满足 Debye 定律  $\phi(t) = \exp(-t/\tau)$ ,其中  $\tau$  为松弛时间<sup>[4-5]</sup>。事实上,许多无序电介质遵从扩展指数型的松弛函数<sup>[4]</sup>  $\phi(t) = \exp(-t/\tau)^\beta$ ,其中  $\beta$  依赖于温度和介质的化学组分。

复杂介质中反常扩散和能量耗散行为多反映出幂律特征<sup>[6]</sup>,其试验数据的拟合公式具有幂函数的形式。例如,粒子扩散的均方位移数据可以用时间的幂函数来拟合,湍流的粒子加速度分布可以用 Levy 稳定分布、扩展 Gauss(高斯)分布、Tsallis 分布等幂律分布来刻画<sup>[6]</sup>,复杂粘弹性材料的松弛和蠕变函数更适宜用时间的幂函数来拟合,生物组织中超声波的衰减系数对声源频率的依赖关系可以用幂函数精确拟合。分数阶导数模型可以较好地描述上述幂律特征。下面通过分析反常扩散方程解的渐近性质,说明分数阶导数力学模型的幂律特征。方程(1)是典型的分数阶导数扩散模型:

$$\frac{\partial^\beta u(x,t)}{\partial t^\beta} = D_{\alpha,\beta} \frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial |x|^\alpha}, \quad t > 0, x \in \mathbf{R}, \alpha \in (1,2), \beta \in (0,1). \quad (1)$$

当  $\alpha \rightarrow 2$  和  $\beta \rightarrow 1$  时,方程即为标准扩散方程; $u$  可以是场函数,如浓度、温度、密度,也可以是概率密度函数; $D$  为扩散系数。方程(1)基本解  $u^*$  的特征函数为

$$u(k,t) = F\{u^*(x,t)\} = E_\alpha(-D_{\alpha,\beta}|k|^\alpha t^\beta),$$

其中  $F\{\cdot\}$  为空间 Fourier 变换, $k$  为频率域变量, $E_\alpha(\cdot)$  为 Mittag-Leffler 函数。当  $t \rightarrow 0$  时,特征函数  $u(k,t)$  为扩展指数函数(对应扩展 Gauss 分布),即  $u(k,t) \sim \exp(-c_1 t^\beta)$ , $c_1$  为与  $t$  无关的非负数<sup>[6]</sup>;当  $t \rightarrow \infty$  时,特征函数为幂函数,即  $u(k,t) \sim c_2 t^{-\beta}$ , $c_2$  为与  $t$  无关的非负数<sup>[6-7]</sup>。此外,方程(1)的基本解  $u^*$  满足渐近关系<sup>[8]</sup>:

$$u^*(x, t) \sim \frac{c_3 t^\beta}{|x|^{\alpha+1}}, \quad |x|^2 \gg t^{2\beta/\alpha}, \quad (2)$$

其中  $c_3$  与  $x$  和  $t$  无关. 若将  $u^*(x, t)$  看成是某个粒子 (例如地下水中的污染物<sup>[1]</sup>、半导体或电介质中的载流子<sup>[5]</sup>) 在复杂介质中随机运动的概率密度函数, 即在时刻  $t$  发现粒子在位置  $x$  的概率, 则该概率分布服从幂律分布. 需指出, 标准扩散 ( $\alpha \rightarrow 2, \beta \rightarrow 1$ ) 的概率密度函数满足 Gauss 分布<sup>[9]</sup>:

$$u^*(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D_{2,1} t}} \exp\left(\frac{-|x|^2}{4D_{2,1} t}\right) \sim 0, \quad |x|^2 \gg t. \quad (3)$$

比较式(2)和(3)可知, 对于固定时刻  $t$ , 当  $|x| \rightarrow \infty$  时, 分数阶扩散模型预测的粒子随机运动的概率密度以幂函数  $1/|x|^{\alpha+1}$  的速度衰减至 0, 其衰减到 0 的速度要远远小于标准扩散  $\exp(-|x|^2)$  的指数衰减情形. 除了分数阶导数扩散模型的解具有幂律分布特征, 分形导数扩散模型的解也具有该特征. Chen (陈文) 等<sup>[10-11]</sup> 基于由整数维时空  $(x, t)$  到分形时空  $(x^\alpha, t^\beta)$  的尺度变换, 提出了分形导数  $\partial/\partial x^\alpha$  和  $\partial/\partial t^\beta$  的定义. 相应的分形导数反常扩散方程模型

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t^\beta} = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha/2}} \left( \frac{\partial u(x, t)}{\partial x^{\alpha/2}} \right) \quad (4)$$

的解对应扩展 Gauss 分布.

分数阶算子是传统算子的微积分阶数在相邻整数值之间的插值. 表达式(5)给出了分数阶微分算子的阶数插值性质 (分数阶积分算子有类似的插值性质):

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{时间算子:} \\ \frac{d^0}{dt^0} < \frac{d^\beta}{dt^\beta} < \frac{d^1}{dt^1}, \quad [s^0 < s^\beta < s^1], \quad 0 < \beta < 1, \\ \text{左空间算子:} \\ \frac{d^1}{dx^1} < \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} < \frac{d^2}{dx^2}, \quad [(ik)^1 < (ik)^\alpha < (ik)^2], \quad 1 < \alpha < 2, \\ \text{右空间算子:} \\ \frac{d^1}{d(-x)^1} < \frac{d^\alpha}{d(-x)^\alpha} < \frac{d^2}{d(-x)^2}, \\ [(-ik)^1 < (-ik)^\alpha < (-ik)^2], \\ \text{Riesz 空间算子:} \\ 0 < \frac{d^\alpha}{d|x|^\alpha} < \frac{d^2}{d|x|^2}, \quad [0 < -|k|^\alpha < -k^2]. \end{array} \right. \quad (5)$$

式(5)中方括号内的式子表示 Fourier 或 Laplace 频率域上的幂指数插值,  $s$  和  $k$  分别为 Laplace 和 Fourier 变换频域变量,  $s$  和  $k$  不妨取为实数,  $i$  为虚单位;  $A < B < C$  表示  $B$  的分数阶导数的阶数或频域变量的幂指数在  $A$  和  $C$  之间的插值; 算子阶数  $\alpha$  和  $\beta$  的取值范围与扩散模型(1)保持一致.

分数阶算子可以由幂函数与算子作用函数的卷积来定义. 定义幂函数:

$$\Phi_\gamma := \begin{cases} \frac{t^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}, & \gamma \in \mathbf{R}, t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad (6)$$

则分数阶导数算子可定义为<sup>[12]</sup>

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{时间算子:} \\
 \frac{d^\beta f(t)}{dt^\beta} = \Phi_{-\beta}(t) * f(t) = \frac{1}{\Gamma(-\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{-\beta-1} f(\tau) d\tau, \\
 \text{左空间算子:} \\
 \frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} = \Phi_{-\alpha}(x) * f(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_{-\infty}^x (x-\xi)^{-\alpha-1} f(\xi) d\xi, \\
 \text{右空间算子:} \\
 \frac{d^\alpha f(x)}{d(-x)^\alpha} = \Phi_{-\alpha}(-x) * f(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_x^{+\infty} (-x+\xi)^{-\alpha-1} f(\xi) d\xi, \\
 \text{Riesz 空间算子:} \\
 \frac{d^\alpha f(x)}{d|x|^\alpha} = -\frac{1}{2\cos(\alpha\pi/2)} \left[ \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} + \frac{d^\alpha}{d(-x)^\alpha} \right] f(x) = \\
 -\frac{1}{2\cos(\alpha\pi/2)\Gamma(-\alpha)} \int_{-\infty}^{+\infty} |x-\xi|^{-\alpha-1} f(\xi) d\xi.
 \end{array} \right\} \quad (7)$$

式(7)中,运算符 $*$ 表示卷积, $\Gamma(\cdot)$ 为 Euler-Gamma (欧拉-伽马)函数.这里的算子阶数 $\alpha$ 和 $\beta$ 可以是任意实数,甚至是复数<sup>[13]</sup>.当阶数 $\alpha$ 或 $\beta$ 为负数时,表示积分算子.例如,当 $\beta < 0$ 时, $d^\beta/dt^\beta$ 为时间分数阶积分算子,当 $\alpha < 0$ 时, $d^\alpha/d|x|^\alpha$ 为 Riesz 势算子.由于卷积核 $\Phi_{-\gamma}(\cdot)$ 在 $\gamma > 0$ 时非绝对可积,计算分数阶导数时需要进行正则化.可以利用分部积分或者卷积核的拆分来实现正则化<sup>[12]</sup>.不同的正则化方法引出不同形式的分数阶导数定义,如 Riemann-Liouville 和 Caputo 定义<sup>[12]</sup>.在本文中,我们不区分分数阶导数的具体定义,统一记为式(7)中的 $d^\alpha/dx^\alpha$ 或 $d^\beta/dt^\beta$ 的形式.由式(6)和(7)知,分数阶微积分运算可以看成幂函数和算子作用函数的卷积,因而具备幂律分布特征(幂函数),全局相关性(空间卷积),以及记忆性或历史依赖性(时间卷积).

## 1 反常扩散的分数阶导数模型

粒子的反常扩散或非 Fick 扩散现象已被发现于裂隙多孔介质<sup>[1,14-15]</sup>、生物组织<sup>[2-3,7]</sup>、湍流<sup>[16]</sup>、非晶半导体<sup>[5]</sup>、无序电介质<sup>[4-5]</sup>、甚至是生态或社会系统<sup>[17]</sup>等复杂介质.近 20 年来,反常扩散的研究在物理学<sup>[18-19]</sup>、水力学<sup>[20]</sup>、生物力学<sup>[21-23]</sup>、经典力学<sup>[24-25]</sup>等领域取得了显著进展.反常扩散的早期研究见综述文献[9],反常扩散数学力学建模的两大典型方法是扩散方程模型和连续时间随机游走模型;前者是大量粒子统计平均后的宏观唯象模型,后者是粒子随机运动的微观统计模型;利用后者,我们可以给出前者模型参数的物理解释.大量试验表明,复杂介质中粒子扩散的均方位移 $\langle x^2(t) \rangle$ 与时间 $t$ 之间满足幂函数关系:

$$\langle x^2(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 u(x,t) dx \sim t^\mu, \quad (8)$$

式中, $u(x,t)$ 为粒子随机运动的概率密度函数, $\mu$ 为输运指数.当 $\mu = 0$ 时,粒子处于局部化状态; $0 < \mu < 1$ 时,粒子做慢扩散或次扩散(分数阶 Brownian (布朗)运动); $\mu = 1$ 时,做标准扩散(Brownian 运动); $1 < \mu < 2$ 时,做快扩散或超扩散(Lévy 飞行或行走); $\mu = 2$ 时,做弹道扩散; $\mu = 3$ 时,做湍流扩散<sup>[26]</sup>.

输运指数 $\mu$ 往往与介质的几何或物理力学性质有关.文献[27]给出关系式 $\mu = 2/z$ ,其中,

当  $1 < z < 2$  时,  $z$  表示粒子 Levy 飞行轨迹的分形拓扑维数<sup>[28]</sup>, 可描述含优先流通道的裂隙多孔岩层中的超扩散现象; 而当  $z > 2$  时,  $z$  表征介质的动力分形维数<sup>[14]</sup>, 可描述将裂隙多孔岩层看成分形介质时的次扩散现象,  $z > 2$  对应的扩散方程为变扩散系数的时间分数阶导数扩散方程<sup>[14]</sup>. 另一个重要的关系式<sup>[8]</sup>为  $\langle x^2(t) \rangle_{tr} \sim t^\mu = t^{2\beta/\alpha}$ , 下标 tr 表示截断的均方位移,  $\alpha$  和  $\beta$  分别是分数阶扩散方程(1) 中的空间和时间分数阶导数阶数:  $1 < \alpha \leq 2, 0 < \beta \leq 1$ . 该关系式对应分数阶扩散模型(1). 由模型参数的范围知, 分数阶扩散模型(1) 可描述次扩散、标准扩散和超扩散现象. 从唯象的角度看,  $\alpha$  对应介质的复杂程度, 如各向异性程度<sup>[2]</sup>;  $\beta$  对应介质的松弛或弛豫特征<sup>[29]</sup>.

利用连续时间随机游走模型, 可以从统计角度解释参数  $\alpha$  和  $\beta$ <sup>[9]</sup>. 考察在数轴上向左或向右随机跳跃的某个粒子, 跳跃的步长为  $dx$ , 满足的概率密度函数为  $\lambda(x)$ , 相邻两次跳跃的时间间隔为  $dt$ , 满足的概率密度函数为  $\psi(t)$ . 当  $\lambda(x)$  和  $\psi(t)$  取不同的概率分布时, 可以得到不同的粒子运动概率密度  $u(x, t)$ , 即  $t$  时刻在  $x$  位置发现粒子的概率. 当  $\psi$  取 Poisson (泊松) 分布 (指数分布),  $\lambda$  取 Gauss 分布 (指数分布) 时, 得到的  $u$  满足 Gauss 分布(3); 当  $\psi(t) \sim t^{-1-\beta} (t \rightarrow \infty)$ ,  $\lambda(x) \sim |x|^{-1-\alpha} (|x| \rightarrow \infty)$  均满足幂律分布时,  $u$  满足幂律分布(2); 当  $\psi$  满足 Poisson 分布,  $\lambda(x)$  满足幂律分布时,  $u$  满足 Levy 稳定分布. 在试验研究中, 需要通过数据拟合确定分数阶扩散模型的参数. 文献[30] 利用旋转环形水箱模拟二维层流中示踪粒子的“混沌对流”, 并用自动数字成像技术记录粒子的运动轨迹. 图 1 给出了 3 个粒子在相同试验环境下的运动轨迹. 三角形为粒子运动的起点, 圆形为终点. 粒子的运动有两种状态: 陷入旋转的涡流 (对应随机行走模型的等待时间  $dt$ ) 和沿水箱的环向大幅喷射 (对应模型的跳跃步长  $dx$ , 这里为角位移). 试验数据拟合结果表明,  $\langle x^2(t) \rangle \sim t^\mu$  的输运指数  $\mu = 1.65 \pm 0.15$ , 呈现超扩散现象; 进一步拟合跳跃步长和等待时间的概率分布, 得到  $\alpha = 1.3 \pm 0.2, \beta = 0.6 \pm 0.3$ . 图 1(b) 中的粒子大部分时间陷入一个涡流中, 并且无规律地摆动, 这是流体混沌对流的缘故.

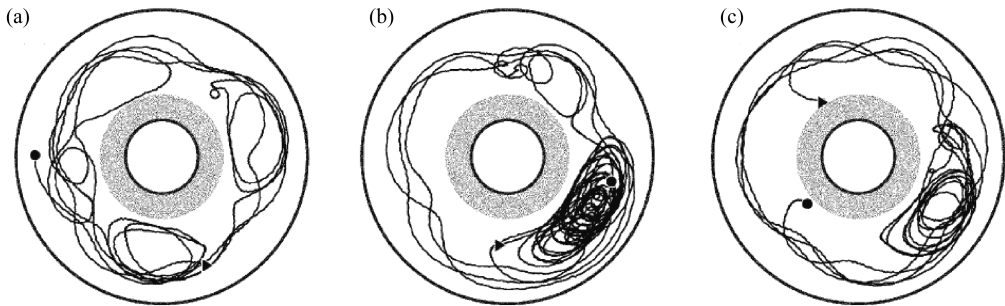


图 1 利用旋转环形水箱模拟二维层流中示踪粒子的混沌对流现象 (该图摘自文献 [30])

Fig. 1 Simulation of chaotic advection of a passive tracer in 2D laminar flow generated in a rotating annular tank<sup>[30]</sup>

由于模型参数少且参数的物理意义清晰等优点, 分数阶反常扩散模型已引起广泛关注. 对于非均匀、各向异性、多相的复杂介质, 标准扩散方程的梯度律受到了挑战. 通过推广这些梯度律, 并结合质量守恒方程, 不同领域的学者得到了形式相近的分数阶反常动力方程. 表 1 给出了不同领域中的分数阶梯度律. 其中, 将通量  $q_2$  代入质量守恒方程  $\partial C(x, t) / \partial t + \partial q(x, t) / \partial x = 0$ , 并令  $c_5 = 0, c_6 = 1$ , 可得分数阶扩散模型(1). 一般来说, 含时间分数阶导数项  $\partial^\beta / \partial t^\beta$  的梯度律对应次扩散; 含空间导数项  $\partial^\alpha / \partial x^\alpha$  的对应超扩散; 两者兼有时, 则要看输运指数  $\mu = 2\beta/\alpha$  与 1 的比较. 由通量表达式  $q_1$  至  $q_4$  可以看出, 通量和场函数梯度原先的局部关系由于分数阶算子



的引入而变得非局部化,且具有记忆性。

表1 传统梯度律的分数阶推广 ( $c_i$  为非负常数,  $0 < \beta < 1$ ,  $1 < \alpha < 2$ )

Table 1 Fractional derivative extensions of the conventional gradient laws  
( $c_i$  denotes nonnegative constants and  $0 < \beta < 1$ ,  $1 < \alpha < 2$ )

conventional gradient law	fractional derivative extension	application
Fick's/Darcy's law $q(x,t) = -D \frac{\partial C(x,t)}{\partial x}$	$(c_1 + c_2 \frac{\partial^{\beta_1}}{\partial t^{\beta_1}}) q_1 = - (c_3 + c_4 \frac{\partial^{\beta_2}}{\partial t^{\beta_2}}) \frac{\partial C}{\partial x}$ $q_2 = -c_5 \frac{\partial C}{\partial x} - c_6 \frac{\partial^{1-\beta}}{\partial t^{1-\beta}} \frac{\partial^{\alpha-1} C}{\partial  x ^{\alpha-1}}$	seepage in fractured porous media <sup>[14,31-32]</sup> , neutron diffusion in nuclear reactors <sup>[33]</sup> , charge transport in dielectric <sup>[4]</sup> contaminant transport in groundwater <sup>[34-35]</sup> , water diffusion in tissue <sup>[2-3,7]</sup>
Fourier's law $q(x,t) = -D \frac{\partial T(x,t)}{\partial x}$	$q_3 = -c_7 \frac{\partial^{1-\beta}}{\partial t^{1-\beta}} \frac{\partial T}{\partial x}$ $q_4 = -c_8 \frac{\partial T}{\partial x} - c_9 \frac{\partial^{1-\beta} T}{\partial  x ^{1-\beta}}$	anomalous heat conduction, thermo-elasticity <sup>[36-37]</sup> nonlocal heat conduction <sup>[38-39]</sup> , peridynamic heat conduction <sup>[40]</sup>
Hooke's law $\sigma(x,t) = E \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$	$\sigma = -c_{10} \frac{\partial u}{\partial x} - c_{11} \frac{\partial^{1-\beta} u}{\partial  x ^{1-\beta}}$	nonlocal linear elasticity <sup>[41-42]</sup>

文献[43]给出了在特定试验观测尺度下,裂隙多孔介质(如地下含水层)中通量和梯度场之间非局部关系的一个解释:若介质中流体的速度场是不确定的,且速度相关的尺度要比观测尺度明显大得多,则在观测尺度内可能会出现通量对浓度梯度的非局部依赖。

在地下水溶质运移方面,Benson<sup>[44]</sup>在其博士论文中首次提出一维分数阶对流-弥散方程模型,并通过沙箱和含水层渗流试验<sup>[34]</sup>,说明分数阶模型预测的溶质穿透曲线具有明显的“拖尾”或“厚尾”现象.相比于“薄尾”的标准对流-弥散模型,分数阶模型可以更好地拟合时刻  $t$  很小和很大时的浓度数据.Navaneethakrishnan<sup>[45]</sup>在其博士论文中进一步考虑城市溪流或河流主干道与围绕河床的多孔介质暂时存储区域间的质量交换及尺度弥散,发展了分数阶弥散暂时存储(transient storage)模型;模型预测结果与美国 Grand 河以及 Red Cedar 河的观测数据接近.Meerschaert 等<sup>[46]</sup>将 Benson 的分数阶对流-弥散模型推广至三维空间.该三维方程模型可以预测粒子的任何 Levy 飞行.随后,Meerschaert 等<sup>[47-48]</sup>进一步用尺度张量替换三维模型中空间分数阶弥散项的分数阶阶数,得到刻画粒子沿不同方向做不同尺度弥散的三维多尺度分数阶对流-弥散模型.Benson 等<sup>[49]</sup>建立了裂隙岩层(如油库、水库周围的岩层)的径向空间分数阶弥散模型.这项工作类似 Park 等<sup>[14]</sup>之前的工作,区别在于前者利用空间分数阶算子,后者利用时间分数阶算子.Sun(孙洪广)等<sup>[50]</sup>将 Samko 等<sup>[13]</sup>提出的可变阶数分数阶导数引入扩散模型,并提出了考虑复杂介质内部随机扰动的随机阶的分数阶扩散模型<sup>[51]</sup>.Fomin 等<sup>[15]</sup>从微观-介观-宏观不同尺度建立了耦合的裂隙多孔岩层的时间分数阶弥散模型.Chen 等<sup>[52]</sup>建立了河底沉积物竖直弥散的空间分数阶导数模型.Sun 等<sup>[1]</sup>注意到地下水溶质运移存在扩散状态的转换现象,如由次扩散转换为标准扩散,在 Meerschaert 等提出的三维多尺度分数阶对流-弥散模型的基础上,引入了可变阶时间和空间分数阶导数,得到了三维可变阶多尺度分数阶对流-弥散模型,模型预测结果与试验观测数据较为吻合。

生物力学方面,Magin 综述了分数阶算子在生物工程中的典型应用<sup>[21-23]</sup>.Magin 等<sup>[2]</sup>首次提出时间-空间分数阶 Bloch-Torrey 方程模型,并利用空间分数阶模型的扩展指数形式的精确

解拟合了交联葡聚糖胶体、人体关节软骨和人脑中水分扩散的磁共振扩散加权数据。值得一提的是,空间分数阶模型(阶数介于1到2之间)一般用来描述粒子的超扩散现象,但文中却指出:该模型较好地描述了生物组织中水分的次扩散现象。这个矛盾可能来源于模型中采用的空间分数阶算子的形式。Magin等选择的并不是模型(1)中的Riesz空间算子 $\partial^\alpha/\partial|x|^\alpha$ ,而是次序空间算子 $(\partial^{\alpha/2}/\partial|x|^{\alpha/2})$ 。由于分数阶算子的复合并不满足结合律<sup>[53]</sup>,故次序算子和Riesz算子并不等价。基于磁共振扩散加权成像, Magin等<sup>[7]</sup>进一步利用模型(1)基本解的特征函数 $u(k,t)$ 拟合了老鼠大脑中水分扩散的试验数据,得到了空间分数阶阶数 $\alpha$ 和时间分数阶阶数 $\beta$ 的具体数值。例如,对于固定的有效扩散时间,老鼠大脑白质对应的空间阶数 $\alpha = 1.15 \pm 0.13$ ,时间阶数 $\beta = 0.42 \pm 0.04$ 。

热力学方面, Povstenko<sup>[36-37]</sup>发展了时间分数阶反常热传导和热弹性模型。Bobaru等<sup>[40]</sup>针对几何不连续介质,提出了非局部热传导的近场动力形式。Zingales等<sup>[38-39]</sup>类比Eringen等<sup>[54-55]</sup>提出的非局部弹性模型,假设介质中存在与距离成反幂律衰减的长程热量输运,建立了空间分数阶非局部热传导模型。

不仅仅局限于上述的水力学、生物力学、热力学方面,分数阶导数反常扩散建模也涉及无序电介质、非晶半导体、生态社会系统、宇宙射线、动力系统等研究对象,相关研究请参考文献[5,56-57]。相比于描述复杂介质的整数阶扩散模型,分数阶模型往往形式简单,参数少且参数的物理意义明确,以及可以刻画中间过程<sup>[58]</sup>。从统计或数据拟合的角度看,分数阶导数模型对应着幂律分布,而整数阶模型对应着指数型分布或Gauss分布。

## 2 反常扩散的分形导数模型

自从Mandelbrot教授提出了分形的概念并认为自然界和工程中分形结构大量存在,许多复杂介质如土壤、地下含水层、裂隙岩体等都被证明具有分形结构<sup>[59]</sup>。经典的物理定律如Fick定律和Darcy定律成立的均匀介质假设在分形介质中不成立,因此需要引入新的物理理论来解决这类问题。基于尺度变换的分形导数扩散模型被认为是模拟分形结构中反常扩散或耗散过程的理想工具之一。其基本思想是在分形结构中,基本物理量(空间和时间)的度量应转变为 $x' = x^\alpha$ ,  $t' = t^\beta$ , 速度 $v' = dx'/dt'$ , 其中幂指数 $\alpha$ 和 $\beta$ 由分形结构的类型和维数决定,在上述度量空间上再运用经典的物理定律建立物理模型<sup>[10,60]</sup>。分形导数反常扩散控制方程模型如式(4)所示。方程模型中 $\alpha \in (0,2)$ ,  $\beta \in (0,1)$ 。该方程的解对应于扩展Gauss统计分布,这与大量的溶质扩散和分数Brownian运动的实验观测结果是吻合的。

1998年Kanno首次提出了基于分形时空(时间和空间)分析分形结构中反常扩散过程的思路,并通过分形结构中粒子随机运动模拟结果验证了该理论的合理性<sup>[60]</sup>。2005年,Chen提出了分形导数的概念,推导得到了能量、频率、动量和波数之间的分数阶量子力学关系,并引出了分数阶Schrodinger(薛定谔)方程<sup>[10]</sup>。Chen等更进一步分析了分形导数和分数阶导数在刻画反常扩散中的异同<sup>[11]</sup>。虽然两种模型都能够描述反常扩散的非Gauss分布现象,但分形导数对应于反常扩散的扩展指数衰减现象,分数阶导数对应于幂率拖尾现象<sup>[61]</sup>。湍流中粒子运动轨迹的统计分布具有明显的扩展Gauss分布特征,经典的湍流理论难以解释,分形导数扩散模型为研究此类问题提供了新的突破口<sup>[61-62]</sup>。人体磁共振成像研究也涉及到反常扩散过程,研究发现人体组织中的反常扩散符合扩展Gauss分布特征,因此分形导数扩散模型或许能够更好地模拟和解释<sup>[2]</sup>。同时,Balankin和Elizarraraz的研究结果也表明分形导数能够准确地刻画多孔介质中液体的分形流动,新模型比含有时间或空间依赖渗透系数的Darcy定律更能方便地应

用于石油工程中涉及到的流动过程模拟<sup>[63]</sup>。

Sun 等<sup>[64]</sup>也发现分数阶导数 Richards 方程模型虽然比经典模型能够更准确地刻画非饱和介质中的水分扩散现象,但仍不能很好地解释非饱和介质中水分扩散过程的尺度效应,越来越多的室内和野外观测数据显示经典模型对应的 Boltzmann 尺度律不成立.表 2 给出了不同类型介质对应的 Boltzmann 尺度律指标<sup>[64]</sup>.为此,Sun 等<sup>[64]</sup>建立了分形导数 Richards 方程模型:

$$\frac{\partial \theta(x, t)}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D(\theta) \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} \right). \quad (9)$$

上式中  $D(\theta)$  等效于水分扩散系数,  $\alpha$  表示分形导数的阶数(或称为尺度变换指标).该模型能够准确描述非饱和介质中水分扩散过程,数值模拟结果与非 Boltzmann 尺度律吻合.

表 2 不同类型介质对应的 Boltzmann 指标 ( $x = \lambda(\theta) t^{\alpha/2}$ ), 其中  $\theta$  表示介质体积含水率<sup>[64]</sup>

Table 2 The Boltzmann indexes ( $x = \lambda(\theta) t^{\alpha/2}$ ) of different media where  $\theta$  is the volume moisture content<sup>[64]</sup>

data source	type of media	$\alpha/2$
Nielsen et al. (1962)	Hesperia sandy loam wet at -100 mb	0.344
Nielsen et al. (1962)	Hesperia sandy loam at -50 mb	0.384
Nielsen et al. (1962)	Columbia silt loam wet at -100 mb	0.425
El Abd, Milczarek (2004)	white siliceous brick (sil #1)	0.430
Rawlins, Gardner (1963)	Salkum silty clay loam, $q = 0.51$	0.439
Ferguson, Gardner (1963)	Salkum silty clay loam	0.455
Rawlins, Gardner (1963)	Salkum silty clay loam, $q = 0.05$	0.461
Kuntz, Lavallée (2001)	fired-clay brick	0.580
Kuntz, Lavallée (2001)	Lépine limestone	0.610
El Abd, Milczarek (2004)	fired-clay brick (clay #1)	0.620

### 3 粘弹性行为的分数阶导数模型

聚合物、聚合物溶液、高温下的金属、非晶材料(amorphous materials)的力学行为具有明显的粘弹性特征<sup>[65]</sup>.1953年,Rouse<sup>[66]</sup>在研究稀释聚合物溶液的力学性质时,将聚合物看成浸入粘性流体中的由珠子(单体)和将其彼此连接的弹簧组成的链.单体受到溶剂分子施加的涨落变化力的作用.若单体受到恒定力的作用,则该单体随机运动的均方位移满足  $\langle x^2(t) \rangle \sim t^{1/2}$ <sup>[19,66]</sup>.Rouse 同时给出了聚合物溶液的应力-应变关系(由 Ferry 等<sup>[67]</sup>将之推广到聚合物):

$$\tau(t) = (3\mu\rho RT/(2M))^{1/2} \frac{d^{1/2}\gamma(t)}{dt^{1/2}}, \quad (10)$$

其中,  $\tau$  为剪应力,  $\gamma$  为剪应变,  $\mu$  是稳态流粘度,  $T$  是绝对温度,  $\rho$  为密度,  $R$  为理想气体常数,  $M$  为分子质量.关系式(10)给出了用分数阶算子表示的粘弹性本构关系,Bagley 等<sup>[68]</sup>利用分数阶 Kelvin 粘弹性模型拟合了丁基 B252 橡胶的动态模量曲线,得到的分数阶阶数也是 1/2,与 Rouse 的结果(10)中的阶数完全相同.因此,他们认为 Rouse 的粘弹性介质分子理论在一定程度上使分数阶粘弹性本构模型摆脱了唯象模型的尴尬.此外,粘弹性材料在常荷载作用下往往发生材料内部原子和分子的扩散<sup>[65]</sup>,从 Rouse 的研究结果可以看出分数阶粘弹性本构与粒子的次扩散行为是有关系的.

分数阶粘弹性对应的基本单元是弹壶元件:

$$\sigma(t) = E\tau^\gamma \frac{d^\gamma \varepsilon(t)}{dt^\gamma}, \quad 0 \leq \gamma \leq 1. \quad (11)$$



应力和应变满足时间分数阶导数关系.当  $\gamma = 0$  时,弹壶元件即为弹簧元件(Hooke 定律  $\sigma(t) = E\varepsilon(t)$ );当  $\gamma = 1$  时,弹壶元件即为粘壶元件(Newton 粘性  $\sigma(t) = \eta d\varepsilon(t)/dt, \eta = E\tau$ ),见图 2.一个弹壶等价于无穷多个弹簧和粘壶串并联而成的复杂网络,如梯子形、树形和分形网络<sup>[22]</sup>.图 3 为典型的梯子形网络<sup>[69]</sup>,若第  $k$  层弹簧刚度满足  $E_k = (E_0\Gamma(\gamma)k^{1-2\gamma})/(2\Gamma(1-\gamma))$ ,粘壶粘度满足  $\eta_k = (2\eta_0\Gamma(\gamma)k^{1-2\gamma})/\Gamma(1-\gamma)$ ,则梯子形网络等价于  $\gamma = 1/2$  时的弹壶(式(11)).由此可见,与传统模型相比,分数阶模型的优点之一是可以较少的模型参数达到与传统模型相当的数据拟合效果.将弹壶与弹壶(或弹簧、粘壶)进行不同形式的串并联即可得到不同的分数阶粘弹性本构.较典型的模型<sup>[6,12]</sup>为分数阶 Maxwell 模型(弹壶和弹簧并联)、分数阶 Kelvin-Voigt 模型(弹壶和弹簧串联)和分数阶 Zener 模型(弹簧和分数阶 Kelvin-Voigt 模型串联).例如,分数阶 Kelvin-Voigt 本构关系为

$$\tau(t) = G_0 \left( 1 + c \frac{d^q}{dt^q} \right) \gamma(t), \quad 0 < q < 1, \tag{12}$$

其中  $\tau, \gamma$  分别为剪应力和剪应变,  $G_0$  为剪切模量,  $c$  为阻尼常数. Koh 等<sup>[70]</sup>利用该模型拟合了可做为建筑物抗震弹性支承的某类轻度硬化橡胶的损耗因子和剪切储能模量,并与传统 Kelvin-Voigt 模型(弹簧和粘壶并联)以及传统 Zener 模型(弹簧和传统 Kelvin-Voigt 模型串联)的拟合结果相比较,见图 4(FKV 为分数阶 Kelvin-Voigt 模型, SLS 为传统 Zener 模型, Kelvin 为传统 Kelvin-Voigt 模型, 三角形和圆形为试验数据).分数阶模型的数据拟合要比其他两种模型精确很多.除了模型参数少,分数阶粘弹性模型的另一个优点是在宽频或者长时间区间内较好地拟合试验数据. Schiessel 等<sup>[71]</sup>利用分数阶 Maxwell 模型(两个弹壶串联)拟合了乙烯-丁烯共聚物的储能模量和损失模量,见图 5(方块和圆圈表示试验数据,线条表示分数阶 Maxwell 模型的拟合曲线).由图可见,分数阶模型可以在  $[10^{-2}, 10^4]$  跨 6 个数量级的频率范围内精确地拟合试验数据.需指出,分数阶模型的松弛模量和蠕变柔量一般为幂函数<sup>[6,12]</sup>.分数阶粘弹性本构模型的进一步应用见文献<sup>[12, 72-76]</sup>.

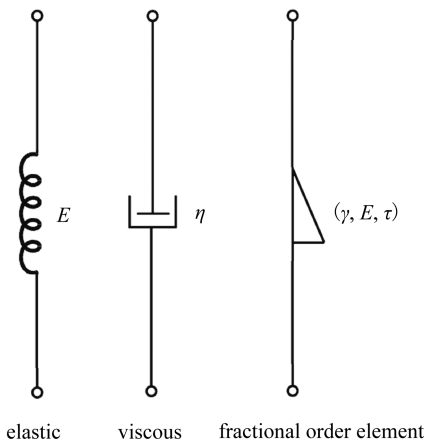


图 2 弹簧、粘壶和弹壶<sup>[22]</sup>

Fig. 2 The spring, dashpot and Abel dashpot<sup>[22]</sup>

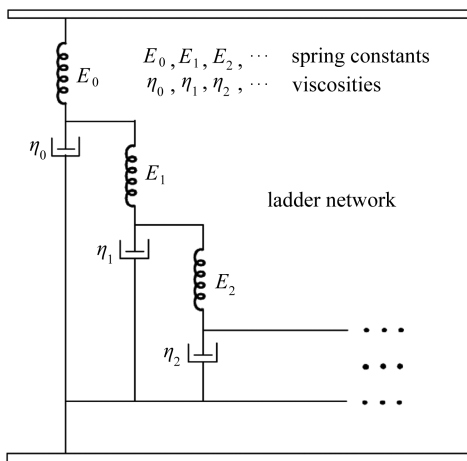


图 3 由弹簧、粘壶串并联而成的梯子网络<sup>[22,69]</sup>

Fig. 3 The ladder network of parallel arrangement with springs and dashpots<sup>[22,69]</sup>

分数阶粘弹性模型推广的是经典粘弹性本构中时间依赖的应力-应变关系;与之类似,分数阶非局部弹性模型<sup>[42,54,77]</sup>推广的是经典弹性本构中空间依赖的应力-应变关系.表 1 的最后

一行就是一种典型的分数阶非局部弹性关系,其中  $u$  为轴向位移.与分数阶时间依赖的本构关系相比,分数阶空间依赖的本构关系的发展较不成熟,缺乏典型应用和试验验证.

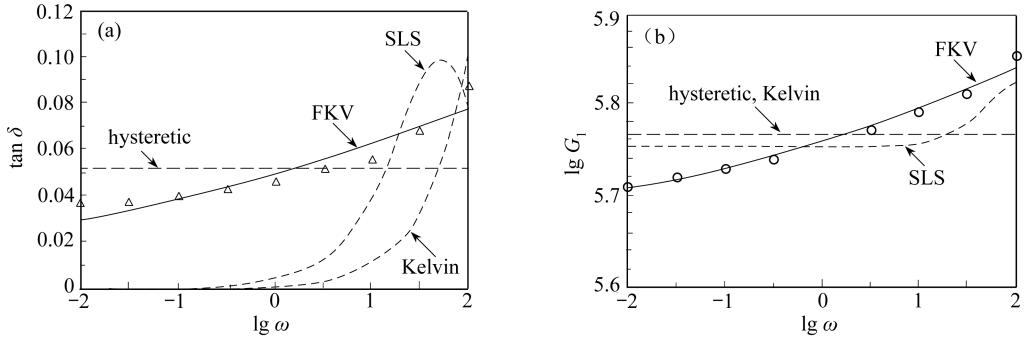


图4 轻度硬化橡胶损耗因子和储能模量的试验数据拟合<sup>[70]</sup>

Fig. 4 Fitting of experimental data for lightly vulcanized Hevea rubber with different models: the loss factor (left) and shear storage modulus (right) <sup>[70]</sup>

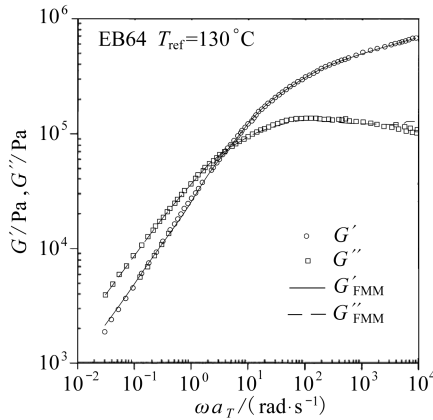


图5 乙烯-丁烯共聚物储能模量  $G'$  和损耗模量  $G''$  的试验数据<sup>[71]</sup>

Fig. 5 Experiment data of storage modulus  $G'$  and loss modulus  $G''$  of the ethene-co-1-butene copolymer<sup>[71]</sup>

### 4 复杂介质中声波频率依赖耗散行为的分数阶模型

复杂介质中的声波传播具有明显的幂律频率依赖耗散(或衰减)现象.假定一单位平面简谐波  $u(x, t) = \exp[i(\omega t - kx)]$ , 其中  $u$  为声压,  $\omega$  为声源角频率,  $k = k(\omega) = m(\omega) - in(\omega)$  为频率依赖的复波数,  $i$  为虚单位.该平面波在复杂介质中传播了  $\Delta x$  后的  $u$  为

$$u(x + \Delta x, t) = \exp[-n(\omega)\Delta x] \exp[i(\omega t - m(\omega)x)] .$$

此时的波幅由起初的 1 减弱至  $\exp[-n(\omega)\Delta x]$ . 可见  $n(\omega)$  表示波幅随距离  $\Delta x$  的衰减程度, 故称为衰减系数,  $m(\omega)$  为频散系数, 波传播的相速度  $c_p(\omega)$  可写成  $c_p(\omega) = \omega/m(\omega)$ . 复杂介质中的声波衰减系数满足如下幂律关系<sup>[78-80]</sup>:

$$n(\omega) = n_0 |\omega|^y, \quad 0 \leq y \leq 2, \tag{13}$$

式中,  $n_0$  和  $y$  为介质参数.水和大多数金属对应的幂指数  $y$  为 0 或 2, 地壳岩层(地震波)对应的  $y = 1$ , 生物组织、聚合物、裂隙多孔岩层等复杂介质对应的  $y$  介于 0 和 2 之间.可以描述幂律频率依赖衰减关系的声波方程一般可写成含衰减项的形式:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + C \frac{\partial^p}{\partial t^p} \frac{\partial^q}{\partial |x|^q} u(x, t) = 0, \quad x \in \mathbf{R}; p, q \geq 0. \quad (14)$$

上式等号左边的第3项为衰减项,刻画声波的能量耗散;  $C$  为模型依赖的常数,  $c_0$  为零频率时的相速度. 将波函数  $u(x, t) = \exp[i(\omega t - kx)]$  代入方程(14), 并利用分数阶导数的性质

$$\partial^p \exp(i\omega t) / \partial t^p = (i\omega)^p \exp(i\omega t), \quad \partial^q \exp(ikx) / \partial |x|^q = -k^q \exp(ikx)^{[13]},$$

可得如下频域关系式:

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c_0^2} + C(i\omega)^p k^q = 0. \quad (15)$$

注意上式  $k^q$  中  $k$  的两边不含求模符号  $|\cdot|$ , 因为这里的  $k$  为复数. 通过上式解出复波数  $k(\omega) = m(\omega) - in(\omega)$  与频率  $\omega$  的关系, 从而确定衰减系数  $n(\omega)$  的具体形式. 调整参数  $p$  和  $q$ , 以使解出的  $n(\omega)$  满足唯象表达式(13). 当  $p = 1, q = 0$  时, 式(14) 为阻尼波方程<sup>[78]</sup>, 对应的  $y = 0$ ; 当  $p = 1, q = 2$  时, 式(14) 为热粘性波方程<sup>[78, 80]</sup>, 当频率  $n_0 |\omega|^y c_0$  很小(低频近似) 时, 该方程与  $p = 3, q = 0$  时的方程具有相近的频域关系, 对应的  $y = 2$ <sup>[78-79]</sup>.

为了得到任意阶 ( $0 \leq y \leq 2$ ) 频率依赖的关系, 1967年, Caputo<sup>[81]</sup> 令  $p = y - 1$  ( $1 < y < 2$ ),  $q = 2$  首次得到了时间分数阶声波耗散模型. Szabo<sup>[78]</sup> 给出卷积形式的衰减项, Chen等<sup>[79]</sup> 将其写成时间分数阶导数的形式, 即  $p = y + 1, q = 0$ . Chen等<sup>[80]</sup> 同时引入了空间分数阶导数的衰减项, 即  $p = 1, q = y$ . Caputo, Szabo 和 Chen 的声波耗散模型均在低频近似的前提下才满足唯象公式(13). 最近, Holm等<sup>[82]</sup> 提出了分数阶声波耗散建模的一种新视角. 前面3种模型是人为地选择  $p$  和  $q$ , 以使由频域关系式(15) 可以推导出唯象公式(13), 这种建模思路并未涉及介质的本构方程. Holm等认为, 将分数阶粘弹性本构与运动方程、几何方程结合, 可以直接得到形如式(14) 的声波耗散方程, 从而模型具有明确的物理意义. 例如, 考察无限长粘弹性杆中的纵波, 将分数阶 Kelvin-Voigt 模型  $\sigma = C_1(1 + d^{y-1}/dt^{y-1}) \varepsilon$  (类似模型(12)) 与运动方程  $d\sigma/dx = \rho dt^2 u/dt^2$ 、几何方程  $\varepsilon = du/dx$  结合, 得到形如式(14) 的时间分数阶导数声波耗散模型 ( $p = y - 1, q = 2$ ). 该模型(称为分数阶 Kelvin-Voigt 声波耗散模型) 与 Caputo 的模型完全相同, 但是建模思路却完全不同: 前者基于粘弹性本构, 而后者是人为选择参数  $p$  和  $q$ . Holm等进一步指出, Caputo, Szabo 和 Chen 的唯象声波模型只是分数阶 Kelvin-Voigt 声波模型的低频近似, 前者虽然适用于医学超声(低频声源)的数学建模<sup>[83-84]</sup>, 但并不适用于剪切波弹性成像(高频声源)的建模; Holm等同时发展了比分数阶 Kelvin-Voigt 模型更为广义的分数阶 Zener 声波耗散模型<sup>[82, 85]</sup>, 该模型在低频、中频和高频范围内均满足幂律频率衰减关系式(13).

模型(14) 并不总能反映声波在介质中的频散现象, 即相速度随角频率  $\omega$  变化的现象. 例如  $p = 1, q = y$  情形对应的相速度  $c_p = c_0$ , 不依赖于频率而变化. 为保证模型能反映频散, Kelly等<sup>[86]</sup> 提出幂律频率依赖的频散系数  $m(\omega)$ , 并通过频散方程的 Fourier 逆变换得到时间域上的幂律声波耗散模型. 该模型令方程(14) 中的  $p = y + 1, q = 0$ , 并在等号左侧另外加入频散项  $\partial^{2y}/\partial t^{2y}$ . 该模型满足 Kramers-Kronig 关系或时间因果关系. Treeby等<sup>[87]</sup> 利用 Kelly 等的频散方程和  $n_0 |\omega|^y c_0 \ll 1$  或  $k \approx \omega/c_0$  的低频假设, 得到了含空间分数阶导数的声波耗散模型. 该模型令方程(14) 中的  $p = 1, q = y$ , 并在等号左侧另外加入频散项  $\partial/\partial t(\partial^{y+1}/\partial |x|^{y+1} u)$ . Holm等<sup>[82]</sup> 指出基于分数阶 Zener 粘弹性本构和低频假设, 同样可以推导出上述的两个模型.

## 5 结束语

与传统的整数阶导数力学模型相比, 分数阶导数模型可以较好地描述复杂介质中的扩散

和耗散行为.对于反常扩散,传统模型不能很好地解释幂函数形式的试验观测结果,模型多采用变系数或者非线性化处理,参数较多,且参数的物理意义不是很清晰;而分数阶模型能够用较少的参数解释幂律现象,且参数可以通过随机游走模型这一统计力学工具来解释,物理意义较清晰.对于复杂粘弹性材料的本构建模,传统模型需要利用较多的参数在宽频或长时间范围内拟合试验数据,模型复杂;而分数阶模型仅需较少的参数就可以达到相同甚至更好的拟合效果.对于复杂介质中声波耗散行为的数学力学建模,传统模型往往形式复杂,且含有试验难以测量的参数,例如多松弛模型中每种分子松弛过程对应的体积模量和松弛时间;而分数阶模型仅含有  $n_0$  和  $\gamma$  两个需要试验数据拟合的参数(见式(13)),模型的表达式要简单得多.

分数阶算子具有幂律分布特征和卷积性质,可以描述幂律特征、非局部的空间关系和历史依赖的时间关系.分数阶算子能够刻画相邻整数阶算子间的中间状态,如 Rouse 粘弹本构关系(10)中的  $1/2$  阶导数,以及标准热传导模型中表面热流和表面温度间的  $1/2$  阶导数关系<sup>[23,53]</sup>.由于 Fourier 和 Laplace 频域中的幂函数形式,分数阶算子还可以刻画物理量对频率的幂律依赖关系,如声波衰减关系(13)以及电介质导电率的幂律频率依赖<sup>[4]</sup>.分数阶算子的阶数一般表征介质的结构复杂程度和弛豫特征.

分数阶算子力学模型是典型的唯象模型,分数阶算子的阶数一般由试验数据拟合得到.例如,在反常扩散模型中,分数阶导数和分形导数阶数由粒子的均方位移试验数据拟合得到;在粘弹性本构中,分数阶导数阶数是由材料的松弛模量、蠕变柔量、储能模量或损失模量试验数据拟合得到;在声波耗散模型中,分数阶导数阶数由声波幂律吸收经验公式(13)拟合试验数据得到.另一方面,分数阶算子的阶数似乎可以与介质的分形维数联系起来<sup>[88-89]</sup>.Tarasov<sup>[90]</sup>利用分形介质质量维数的概念给出了分形集  $W$  上的积分和分数阶积分的关系:

$$\int_W f(|x - x_0|) d\mu_B = \frac{2\pi^{D/2}\Gamma(D)}{\Gamma(D/2)} \left[ \frac{d^{-D}f(r)}{d(-r)^{-D}} \right]_{r=0}, \quad x \in W \subseteq R^n, x_0 \in R^n, \quad (16)$$

其中,  $f$  定义在分形集  $W$  上,且关于点  $x_0$  中心对称,  $\mu_B$  为计盒测度(box-counting measure),质量维数  $D$  (正实数)满足

$$M(R) \sim R^D, \quad (17)$$

即半径为  $R$  的球形区域中的介质质量  $M$  与半径  $R$  之间有幂函数关系,幂指数即为质量维数  $D$ .由式(16)知,分形介质中某个量  $f$  的积分可以表示成该量的分数阶积分.类似地,我们可以推测,分形介质中某个量  $f$  的微分可以表示成该量的分数阶导数<sup>[91]</sup>.然而,实际的复杂介质并不是理想的分形介质,无法直接利用式(17)通过试验测定介质的质量维数;而且,定义在复杂介质上的量  $f$  也不一定关于某个点中心对称,故式(16)也不一定成立.能否利用试验手段,通过测量介质的分形维数来估分数阶模型的分数阶参数,是一个值得思考的问题.

近 20 年来,分数阶算子的应用与分析取得了长足发展.在国际上,以“分数阶算子”为主题的大会、专题讨论会频繁举行;例如,从 2004 年开始,每两年举办一次的 Fractional Differentiation and Applications(FDA)国际大会.从 2011 至 2014 年,平均每年有 10 本关于“分数阶算子应用与分析”的英文专著出版<sup>[92]</sup>.分数阶应用与分析领域的顶级专刊《Fractional Calculus and Applied Analysis》的影响因子为 2.245(2014),在 Journal Citation Reports 的“数学”类的 310 种期刊中排名第 11,“数学,应用”类的 255 种期刊中排名第 12.

分数阶算子的应用与分析仍需要进一步地发展.在 2014 年 FDA 大会的圆桌会议讨论中,来自全球的二十余位知名学者阐述了分数阶研究领域的开放性问题 and 值得深入研究的方向<sup>[92]</sup>.例如,生物工程领域的专家 Magin 指出,分数阶 Bloch-Torrey 磁共振扩散加权模型在生物



力学、生物医学中具有良好的应用前景.为了使分数阶模型能更好地揭示生物组织的结构复杂程度, Magin 将与地下水溶质运移领域的分数阶建模专家 Meerschaert 合作, 尝试将分数阶向量微积分和空间依赖的分数阶阶数引入现有的一维分数阶 Bloch-Torrey 模型中.

### 参考文献(References):

- [1] SUN Hong-guang, ZHANG Yong, CHEN Wen, Reeves D M. Use of a variable-index fractional-derivative model to capture transient dispersion in heterogeneous media[J]. *Journal of Contaminant Hydrology*, 2014, **157**(3): 47-58.
- [2] Magin R L, Abdullah O, Baleanu D, Zhou X J. Anomalous diffusion expressed through fractional order differential operators in the Bloch-Torrey equation[J]. *Journal of Magnetic Resonance*, 2008, **190**(2): 255-270.
- [3] GAO Qing, Srinivasan G, Magin R L, Zhou X J. Anomalous diffusion measured by a twice-refocused spin echo pulse sequence: analysis using fractional order calculus[J]. *Journal of Magnetic Resonance Imaging*, 2011, **33**(5): 1177-1183.
- [4] Milovanov A V, Rypdal K, Rasmussen J J. Stretched exponential relaxation and ac universality in disordered dielectrics[J]. *Physical Review B*, 2007, **76**(10): 104201.
- [5] Uchaikin V, Sibatov R. *Fractional Kinetics in Solids: Anomalous Charge Transport in Semiconductors, Dielectrics, and Nanosystems*[M]. Hackensack, New Jersey: World Scientific, 2013.
- [6] 陈文, 孙洪广, 李西成, 叶霖娟, 胡帅, 张晓棣, 成亮. 力学与工程问题的分数阶导数建模[M]. 北京: 科学出版社, 2010: 245-251.(CHEN Wen, SUN Hong-guang, LI Xi-cheng, YE Lin-juan, HU Shuai, ZHANG Xiao-di, CHENG Liang. *Fractional Derivative Modeling in Mechanical and Engineering Problems*[M]. Beijing: Science Press, 2010: 245-251.(in Chinese))
- [7] Magin R L, Ingo C, Colon-Perez L, Triplett W, Mareci T H. Characterization of anomalous diffusion in porous biological tissues using fractional order derivatives and entropy[J]. *Micro-porous and Mesoporous Materials*, 2013, **178**(18): 39-43.
- [8] Zaslavsky G M. Chaos, fractional kinetics, and anomalous transport[J]. *Physics Reports—Review Section of Physics Letters*, 2002, **371**(6): 461-580.
- [9] Metzler R, Klafter J. The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach[J]. *Physics Reports—Review Section of Physics Letters*, 2000, **339**(1): 1-77.
- [10] CHEN Wen. Time-space fabric underlying anomalous diffusion[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2005, **28**(4): 923-929.
- [11] CHEN Wen, SUN Hong-guang, ZHANG Xiao-di, Korošak D. Anomalous diffusion modeling by fractal and fractional derivatives[J]. *Computers & Mathematics With Applications*, 2010, **59**(5): 1754-1758.
- [12] Mainardi F. *Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity*[M]. London: Imperial College Press, 2010.
- [13] Samko S G, Kilbas A A, Marichev O I. *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*[M]. London: Gordon and Breach Science Publishers, 1993.
- [14] Park H W, Choe J, Kang J M. Pressure behavior of transport in fractal porous media using a fractional calculus approach[J]. *Energy Sources*, 2000, **22**(10): 881-890.
- [15] Fomin S A, Chugunov V A, Hashida T. Non-Fickian mass transport in fractured porous media [J]. *Advances in Water Resources*, 2011, **34**(2): 205-214.

- [ 16 ] Shlesinger M F, West B J, Klafter J. Lévy dynamics of enhanced diffusion: application to turbulence[J]. *Physical Review Letters*, 1987, **58**(11) : 1100-1103.
- [ 17 ] Brockmann D. Money circulation science-fractional dynamics in human mobility[C]//*Anomalous Transport: Foundations and Applications*. Berlin: Wiley-VCH, 2008: 459-483.
- [ 18 ] Hilfer R, ed. *Applications of Fractional Calculus in Physics*[C]. Singapore: World Scientific, 2000.
- [ 19 ] Sokolov I M, Klafter J, Blumen A. Fractional kinetics[J]. *Physics Today*, 2002, **55**(11) : 48-55.
- [ 20 ] Benson D A, Meerschaert M M, Revielle J. Fractional calculus in hydrologic modeling: a numerical perspective[J]. *Advances in Water Resources*, 2013, **51**(1) : 479-497.
- [ 21 ] Magin R L. Fractional calculus in bioengineering—part 1[J]. *Critical Reviews<sup>TM</sup> in Biomedical Engineering*, 2004, **32**(1) : 1-104.
- [ 22 ] Magin R L. Fractional calculus in bioengineering—part 2[J]. *Critical Reviews<sup>TM</sup> in Biomedical Engineering*, 2004, **32**(2) : 105-193.
- [ 23 ] Magin R L. Fractional calculus in bioengineering—part 3[J]. *Critical Reviews<sup>TM</sup> in Biomedical Engineering*, 2004, **32**(3/4) : 195-377.
- [ 24 ] Atanackovic T M, Pilipovic S, Stankovic B, Zorica D. *Fractional Calculus With Applications in Mechanics: Vibrations and Diffusion Processes*[M]. USA: John Wiley & Sons Inc, 2014.
- [ 25 ] Atanackovic T M, Pilipovic S, Stankovic B, Zorica D. *Fractional Calculus With Applications in Mechanics: Wave Propagation, Impact and Variational Principles* [M]. USA: John Wiley & Sons Inc, 2014.
- [ 26 ] Kimmich R, Fatkullin N, Kehr M, Li Yu-jie. Anomalous molecular displacement laws in porous media and polymers probed by nuclear magnetic resonance techniques[C]//*Anomalous Transport: Foundations and Applications*. Berlin: Wiley-VCH, 2008: 485-518.
- [ 27 ] Fogedby H C. Lévy flights in random environments[J]. *Physical Review Letters*, 1994, **73**(19) : 2517-2520.
- [ 28 ] Huges B D. *Random Walks and Random Environments*[M]. Vol 1. Oxford: Oxford University Press, 1995.
- [ 29 ] Magin R L, Li Wei-guo, Velasco M P, Trujillo J, Reiter D A, Morgenstern A, Spencer R G. Anomalous NMR relaxation in cartilage matrix components and native cartilage: fractional-order models[J]. *Journal of Magnetic Resonance*, 2011, **210**(2) : 184-191.
- [ 30 ] Solomon T H, Weeks E R, Swinney H L. Observation of anomalous diffusion and Lévy flights in a two-dimensional rotating flow[J]. *Physical Review Letters*, 1993, **71**(24) : 3975-3978.
- [ 31 ] Caputo M. Models of flux in porous media with memory[J]. *Water Resources Research*, 2000, **36**(3) : 693-705.
- [ 32 ] Caputo M, Plastino W. Diffusion in porous layers with memory[J]. *Geophysical Journal International*, 2004, **158**(1) : 385-396.
- [ 33 ] Espinosa-Paredes G, Morales-Sandoval J B, Vázquez-Rodríguez R, Espinosa-Martíez E G. Constitutive laws for the neutron density current[J]. *Annals of Nuclear Energy*, 2008, **35**(10) : 1963-1967.
- [ 34 ] Benson D A, Wheatcraft S W, Meerschaert M M. Application of a fractional advection-dispersion equation[J]. *Water Resources Research*, 2000, **36**(6) : 1403-1412.
- [ 35 ] Benson D A, Wheatcraft S W, Meerschaert M M. The fractional-order governing equation of Lévy motion[J]. *Water Resources Research*, 2000, **36**(6) : 1413-1423.

- [36] Povstenko Y Z. Fractional heat conduction equation and associated thermal stress[J]. *Journal of Thermal Stresses*, 2004, **28**(1): 83-102.
- [37] Povstenko Y Z. Two-dimensional axisymmetric stresses exerted by instantaneous pulses and sources of diffusion in an infinite space in a case of time-fractional diffusion equation[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2007, **44**(7/8): 2324-2348.
- [38] Mongiovi M S, Zingales M. A non-local model of thermal energy transport: the fractional temperature equation[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2013, **67**(12): 593-601.
- [39] Zingales M. Fractional-order theory of heat transport in rigid bodies[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulations*, 2014, **19**(11): 3938-3953.
- [40] Bobaru F, Duangpanya M. The peridynamic formulation for transient heat conduction[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2010, **53**(19/20): 4047-4059.
- [41] Paola M D, Zingales M. Long-range cohesive interactions of non-local continuum faced by fractional calculus[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2008, **45**(21): 5642-5659.
- [42] Carpinteri A, Cornetti P, Sapora A. Nonlocal elasticity: an approach based on fractional calculus[J]. *Meccanica*, 2014, **49**(11): 2551-2569.
- [43] Morales-Casique E, Neuman S P, Guadagnini A. Non-local and localized analyses of non-reactive solute transport in bounded randomly heterogeneous porous media: theoretical framework[J]. *Advances in Water Resources*, 2006, **29**(8): 1238-1255.
- [44] Benson D A. The fractional advection-dispersion equation: development and application[D]. PhD Thesis. Reno: University of Nevada, 1998.
- [45] Navaneethakrishnan R P. Stream transient storage modeling based on fractional-in-space dispersion[D]. PhD Thesis. Michigan: Michigan State University, 2007.
- [46] Meerschaert M M, Benson D A, Bäumer B. Multidimensional advection and fractional dispersion[J]. *Physical Review E, Statistical Physics, Plasmas, Fluids, and Related Interdisciplinary Topics*, 1999, **59**(5): 5026-5028.
- [47] Meerschaert M M, Benson D A, Bäumer B. Operator Lévy motion and multiscaling anomalous diffusion[J]. *Physical Review E*, 2001, **63**(2): 142.
- [48] Schumer R, Benson D A, Meerschaert M M, Bäumer B. Multiscaling fractional advection-dispersion equations and their solutions[J]. *Water Resources Research*, 2003, **39**(1): 1022.
- [49] Benson D A, Tadjeran C, Meerschaert M M, Farnham I, Pohl G. Radial fractional-order dispersion through fractured rock[J]. *Water Resources Research*, 2004, **40**(12): 87.
- [50] SUN Hong-guang, CHEN Wen, CHEN Yang-quan. Variable-order fractional differential operators in anomalous diffusion modeling[J]. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 2009, **388**(21): 4586-4592.
- [51] SUN Hong-guang, CHEN Wen, SHENG Hu, CHEN Yang-quan. On mean square displacement behaviors of anomalous diffusions with variable and random orders[J]. *Physics Letters A*, 2010, **374**(7): 906-910.
- [52] CHEN Dong, SUN Hong-guang, ZHANG Yong. Fractional dispersion equation for sediment suspension[J]. *Journal of Hydrology*, 2013, **491**(1): 13-22.
- [53] Podlubny I. *Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications*[M]. USA: Academic Press, 1999: 74.

- [54] Eringen A C. Linear theory of nonlocal elasticity and dispersion of plane waves[J]. *International Journal of Engineering Science*, 1972, **10**(5): 425-435.
- [55] Eringen A C, Speziale C G, Kim B S. Crack-tip problem in non-local elasticity[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1977, **25**(5): 339-355.
- [56] Klages R, Radons G, Sokolov I M, ed. *Anomalous Transport: Foundations and Applications* [C]. Berlin: Wiley-VCH, 2008.
- [57] Zaslavsky G M. *Hamiltonian Chaos & Fractional Dynamics*[M]. New York: Oxford University Press, 2008.
- [58] 徐明瑜, 谭文长. 中间过程、临界现象——分数阶算子理论、方法、进展及其在现代力学中的应用[J]. 中国科学 G 辑: 物理学 力学 天文学, 2006, **36**(3): 225-238. (XU Ming-yu, TAN Wen-chang. Intermediate process and critical phenomenon—theory, method, and advances of fractional operators and its applications in modern mechanics[J]. *Science in China Series G: Physics, Mechanics & Astronomy*, 2006, **36**(3): 225-238. (in Chinese))
- [59] Mandelbrot B B. *The Fractal Geometry of Nature*[M]. New York: W H Freeman and Company, 1982.
- [60] Kanno R. Representation of random walk in fractal space-time[J]. *Physica A*, 1998, **248**(1/2): 165-175.
- [61] 孙洪广, 常爱莲, 陈文, 张勇. 反常扩散: 分数阶导数建模及其在环境流动中的应用[J]. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2015, **45**(10): 104702. (SUN Hong-guang, CHANG Ai-lian, CHEN Wen, ZHANG Yong. Anomalous diffusion; fractional derivative modeling and its application in environment fluid[J]. *Scientia Sinica: Physica, Mechanica & Astronomica*, 2015, **45**(10): 104702. (in Chinese))
- [62] SUN Hong-guang, CHEN Wen. Fractal derivative multi-scale model of fluid particle transverse accelerations in fully developed turbulence[J]. *Science in China Series E: Technological Sciences*, 2009, **52**(3): 680-683.
- [63] Balankin A S, Elizarraraz B E. Hydrodynamics of fractal continuum flow[J]. *Physical Review E*, 2012, **85**(2): 605-624.
- [64] SUN Hong-guang, Meerschaert M M, ZHANG Yong, ZHU Jian-ting, CHEN Wen. A fractal Richards' equation to capture the non-Boltzmann scaling of water transport in unsaturated media[J]. *Advances in Water Resources*, 2013, **52**(4): 292-295.
- [65] Meyers M A, Chawla K K. *Mechanical Behavior of Materials*[M]. New York: Cambridge University Press, 2008: 120-121.
- [66] Rouse P E. A theory of the linear viscoelastic properties of dilute solutions of coiling polymers [J]. *Journal of Chemical Physics*, 1953, **21**(7): 1272-1280.
- [67] Ferry J D, Landel R F, Williams M L. Extensions of the rouse theory of viscoelastic properties to undiluted linear polymers[J]. *Journal of Applied Physics*, 1955, **26**(4): 359-362.
- [68] Bagley R L, Torvik P J. Fractional calculus in the transient analysis of viscoelastically damped structures[J]. *AIAA Journal*, 1985, **23**(6): 918-925.
- [69] Schiessel H, Blumen A. Hierarchical analogues to fractional relaxation equations[J]. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1993, **26**(19): 5057-5069.
- [70] Koh C G, Kelly J M. Application of fractional derivatives to seismic analysis of base-isolated models[J]. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 1990, **19**(2): 229-241.
- [71] Schiessel H, Friedrich C, Blumen A. Applications to problems in polymer physics and rheology[C]//*Applications of Fractional Calculus in Physics*. Singapore: World Scientific, 2000:



- 331-376.
- [72] Sabatier J, Agrawal O P, Tenreiro Machado J A, ed. *Advances in Fractional Calculus: Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering*[C]. Netherlands: Springer, 2007.
- [73] Rossikhin Y A, Shitikova M V. Application of fractional calculus for dynamic problems of solid mechanics: novel trends and recent results[J]. *Applied Mechanics Reviews*, 2009, **63**: 010801.
- [74] Rossikhin Y A. Reflections on two parallel ways in the progress of fractional calculus in mechanics of solids[J]. *Applied Mechanics Reviews*, 2009, **63**(1): 2809-2814.
- [75] Usuki T. Dispersion curves for 3D viscoelastic beams of solid circular cross section with fractional derivatives[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2013, **332**(1): 126-144.
- [76] Aguado J V, Abisset-Chavanne E, Cueto E, Chinesta F, Keunings R. Fractional modeling of functionalized CNT suspensions[J]. *Rheologic Acta*, 2015, **54**(2): 109-119.
- [77] Di Paola M, Failla G, Zingales M. Physically-based approach to the mechanics of strong non-local linear elasticity theory[J]. *Journal of Elasticity*, 2009, **97**(2): 103-130.
- [78] Szabo T L. Time domain wave equations for lossy media obeying a frequency power law[J]. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1994, **96**(1): 491-500.
- [79] CHEN Wen, Holm S. Modified Szabo's wave equation models for lossy media obeying frequency power law[J]. *Journal of the Acoustical Society of America*, 2003, **114**(5): 2570-2574.
- [80] CHEN Wen, Holm S. Fractional Laplacian time-space models for linear and nonlinear lossy media exhibiting arbitrary frequency power-law dependency[J]. *Journal of the Acoustical Society of America*, 2004, **115**(4): 1424-1430.
- [81] Caputo M. Linear models of dissipation whose  $Q$  is almost frequency independent-II[J]. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, 1967, **13**(5): 529-539.
- [82] Holm S, Näsholm S P. Comparison of fractional wave equations for power law attenuation in ultrasound and elastography[J]. *Ultrasound in Medicine and Biology*, 2013, **40**(4): 695-703.
- [83] Bounaïm A, CHEN Wen. Computations for a breast ultrasonic imaging technique and finite element approach for a fractional derivative modeling the breast tissue acoustic attenuation[J]. *International Journal of Tomography & Statistics*, 2008, **10**(F08): 31-43.
- [84] ZHANG Xiao-di, CHEN Wen, ZHANG Chuan-zeng. Modified Szabo's wave equation for arbitrarily frequency-dependent viscous dissipation in soft matter with applications to 3D ultrasonic imaging[J]. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2012, **25**(5): 510-519.
- [85] Holm S, Näsholm S P. A causal and fractional all-frequency wave equation for lossy media [J]. *Journal of the Acoustical Society of America*, 2011, **130**(4): 2195-2202.
- [86] Kelly J F, McGough R J. Analytical time-domain Green's functions for power-law media[J]. *Journal of the Acoustical Society of America*, 2008, **124**(5): 2861-2872.
- [87] Treeby B E, Cox B T. Modeling power law absorption and dispersion for acoustic propagation using the fractional Laplacian[J]. *Journal of the Acoustical Society of America*, 2010, **127**(5): 2741-2748.
- [88] Butera S, Paola M D. A physically based connection between fractional calculus and fractal geometry[J]. *Annals of Physics*, 2014, **350**: 146-158.
- [89] Alaimo G, Zingales M. Laminar flow through fractal porous materials: the fractional-order transport equation[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2015, **22**(1/3): 889-902.

- [90] Tarasov V E. *Fractional Dynamics: Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media*[M]. Beijing: Higher Education Press, 2010; 24.
- [91] HE Ji-huan. A tutorial review on fractal spacetime and fractional calculus[J]. *International Journal of Theoretical Physics*, 2014, **53**(11): 3698-3718.
- [92] Machado J T, Mainardi F, Kiryakova V. Fractional calculus: quo vadimus? (Where are we going?)[J]. *Fractional Calculus & Applied Analysis*, 2015, **18**(2): 495-526.

## Fractional Differential Phenomenological Modeling for Diffusion and Dissipation Behaviors of Complex Media

PANG Guo-fei<sup>1,2</sup>, CHEN Wen<sup>1,2</sup>, ZHANG Xiao-di<sup>3</sup>, SUN Hong-guang<sup>1,2</sup>

(1. *State Key Laboratory of Hydrology-Water Resources and Hydraulic Engineering(Hohai University)*, Nanjing 210098, P.R.China;

2. *College of Mechanics and Materials, Hohai University*,  
Nanjing 211100, P.R.China;

3. *Siemens PLM Software, Shanghai 200050, P.R.China)*

(Contributed by CHEN Wen, M. AMM Editorial Board)

**Abstract:** A complex medium is generally a multiphase mixture. Unlike the classical solid, liquid and gas, its mechanical behaviors exhibit anomalous features such as the memory and the path-dependence characteristics, which can hardly be well described with the classical mechanics models of integral-order derivatives. From the viewpoint of mathematical and physical modeling, the local limit definition of the integral-order derivative is not suitable to depict such non-local mechanical behaviors. The fractional derivative is essentially an integro-differential operator with underlying clear statistical physical explanation and can accurately describe the global correlation of complex mechanical behaviors. Since 1990s, the fractional derivative modeling for anomalous mechanical behaviors of complex media has attracted extensive attention due to its merits of fewer parameters with clear physical explanations. From the phenomenological modeling perspective, a review was made on the applications and developments of the fractional and fractal derivative models for the diffusion and energy dissipation behaviors of complex media.

**Key words:** complex medium; fractional derivative; fractal derivative; diffusion; dissipation; mathematical and physical modeling

**Foundation item:** The National Natural Science Foundation of China (General Program) (11372097); The National Science Fund for Distinguished Young Scholars of China (11125208)