

# 海洋表面波约化 Hamilton 方程的新发展: 从小幅波到有限幅波的推广\*

王兆玲<sup>1,2</sup>, 肖 衡<sup>2,3</sup>

- (1. 潍坊学院 数学与信息科学学院, 山东 潍坊 261061;
2. 省部共建高品质特殊钢冶金与制备国家重点实验室(上海大学), 上海 200444;
3. 上海大学 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072)

**摘要:** 海洋表面波的 3-波至 5-波约化 Hamilton 方程由于其对称多项式简化结构以及保能量等独特优点,得到广泛应用,但是,据相关近似假设,其适用范围局限于波陡很小的弱非线性波,于是进一步探讨下述推广问题:对一定范围内的有限幅非线性波,在足够精确意义上是否也能获得具对称多项式简化结构的约化 Hamilton 方程?由于涉及复杂非线性强耦合,在该重要方面至今尚未取得进展,提出基于 Chebyshev(切比雪夫)多项式逼近处理精确水波方程非线性耦合的新简化途径,导出具对称多项式简化结构的新约化 Hamilton 方程,新结果将波数与波陡之积为小量的弱非线性情形推广到该积直至 1.035 的非线性情形.分析表明,在该范围内新结果的误差不超过 5%,特别,当前述积邻近于 0.9 时新结果给出精确结果.

**关键词:** 海洋表面波; 有限波幅; 新简化途径; 新约化 Hamilton 方程

**中图分类号:** O302      **文献标志码:** A

**doi:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2015.11.002

## 引 言

深入了解并定量表征海面波浪的动力学行为有多方面重要意义,这激发了近些年来人们对非线性海洋表面波的兴趣<sup>[1-5]</sup>.Zakharov<sup>[6]</sup>以及 Zakharov 和 Kharitonov<sup>[7]</sup>分别在无限深度和有限深度情形首次给出了海洋表面波的 Hamilton 表述;之后,Miles<sup>[8]</sup>给出基于 Hamilton 原理的另一表述.按照 Hamilton 表述,理想流体无旋表面波的演化方程由一对 Hamilton 正则方程所表征,其中的 Hamilton 量是波的总能量,广义坐标是自由表面位移,广义动量则是自由表面速度势.Hamilton 表述将表面水波动力学行为的本质特征纳入其独特的正则对称结构,为研究表面水波演化的动力学行为开辟了一条有效途径.

由于涉及高度复杂的非线性强耦合,处理精确意义上的水波动力学方程十分困难.通常,可在一定的近似条件下简化精确水波方程,导出在一定范围内适用的约化方程,从而基于后者

\* 收稿日期: 2015-04-10; 修订日期: 2015-09-08

基金项目: 国家教委 211 工程科研启动基金(A.15-B002-09-032); 国家自然科学基金(11372172)

作者简介: 王兆玲(1979—),女,山东潍坊人,博士(E-mail: wangzhaoling555@126.com);

肖衡(1963—),男,湖南永州人,教授,博士,博士生导师(通讯作者. E-mail: xiaoheng@shu.edu.cn).

研究表面水波的动力学行为.在此意义上,许多学者基于各种简化途径做了大量研究,取得了许多重要成果,其中一些代表性工作参见文献[9-21].特别地,在波数与波陡之积为小量的近似假设下,基于 Taylor 级数展开,可从精确意义上的非线性强耦合水波方程导出 3-波直至 5-波约化 Hamilton 正则方程<sup>[9-10]</sup>.该方程由于其对称多项式简化结构以及保证能量守恒等优点,得到广泛应用.

由于相关近似假设,上述广泛应用的约化 Hamilton 水波方程只适用于波陡很小的弱非线性情形.然而,在各种现实情形下,海面波浪可表现出远不同于弱非线性的非线性特征.例如,波流反向流动时波峰可变得更高和陡峭,波谷变得更低而平坦,在此情形下波浪的非线性特征由于增强而变得更为突出.原则上,超出弱非线性范畴在更广泛意义上的非线性水波由精确水波方程所表征.如前所述,后者由于非线性强耦合的高度复杂性,除某些特殊情形外难以处理.参照关于弱非线性情形所获得的简化结果,本文进一步探讨下述推广问题:对一定范围内的有限幅非线性波,在足够精确意义上是否也能获得具对称多项式简化结构的约化 Hamilton 演化方程?

目前,在上述重要方面尚未取得进展.本文将提出处理精确水波方程非线性强耦合的新简化途径,导出具对称多项式简化结构的新约化 Hamilton 方程.新结果将波数与波陡之积为小量的弱非线性情形拓广到该积直至约 1.035 的非线性情形.分析表明,在该范围内新结果的误差不超过 5%,且当前述积邻近于 0.9 时给出精确结果.本文主要内容如下:第 1 节简述精确意义上水波演化方程的 Hamilton 表述及其在弱非线性情形的约化形式;第 2 节引入基于 Chebyshev 多项式逼近的新简化途径,处理精确水波方程的非线性耦合,导出新的约化 Hamilton 方程;第 3 节给出误差分析并确定适用范围;第 4 节讨论主要结果.

## 1 Hamilton 表述及其弱非线性约化形式

考虑水平方向无界深度为  $h$  的理想无旋流体.设  $\zeta(\mathbf{x}, t)$  为静止自由表面上点  $\mathbf{x} = (x, y)$  在  $t$  时刻的竖向位移;  $\phi(\mathbf{x}, z, t)$  为在重力和表面张力影响下流体的速度势;  $z$  为铅直坐标指向朝上,在  $t$  时刻流体表面  $z = \zeta(\mathbf{x}, t)$ ,在底边  $z = -h$ ,于是  $-h \leq z \leq \zeta(\mathbf{x}, t)$ ;此外,  $\psi(\mathbf{x}, t) = \phi[\mathbf{x}, \zeta(\mathbf{x}, t), t]$  为自由表面速度势.

### 1.1 表面波的流体动力学方程

速度势  $\phi(\mathbf{x}, z, t)$  在  $-\infty < x, y < +\infty$ ,  $-h < z < \zeta(\mathbf{x}, t)$  范围内定义,须满足 Laplace 方程

$$\nabla^2 \phi + \partial^2 \phi / \partial z^2 = 0 \quad (-h \leq z \leq \zeta(\mathbf{x}, t)), \quad (1)$$

以及底边条件

$$\partial \phi / \partial z = 0 \quad (z = -h) \quad (2)$$

和自由表面条件<sup>[9-10]</sup>

$$\partial \zeta / \partial t + (\nabla \psi) \cdot (\nabla \zeta) - v(1 + |\nabla \zeta|^2) = 0, \quad (3)$$

$$\partial \psi / \partial t + g\zeta + 0.5 |\nabla \psi|^2 - 0.5 v^2 (1 + |\nabla \zeta|^2) = 0. \quad (4)$$

上列各式中,  $g$  为重力加速度,  $\nabla = (\partial_x, \partial_y)$  和  $\nabla^2 = (\partial_{xx}, \partial_{yy})$  分别为二维水平面上梯度算符和 Laplace 算符;此外,  $v = v(\mathbf{x}, t)$  为表面速度的竖向分量,即

$$v = (\partial \phi / \partial z) |_{z=\zeta(\mathbf{x}, t)}.$$

由 Laplace 方程(1)和底边条件(2)经由 Fourier(傅立叶)变换可将速度势用一个波矢函数  $\chi(\mathbf{k}, t)$  的下述积分形式表出:

$$\phi(\mathbf{x}, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int \chi(\mathbf{k}, t) [\cosh(|\mathbf{k}|(z+h))/\sinh(|\mathbf{k}|h)] e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{k}. \quad (5)$$

于是,表面速度势  $\psi$  和表面速度竖向分量  $v$  可由函数  $\chi(\mathbf{k}, t)$  和表面位移  $\zeta$  给出如下:

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int \chi(\mathbf{k}, t) [\cosh(|\mathbf{k}|(\zeta+h))/\sinh(|\mathbf{k}|h)] e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{k}, \quad (6)$$

$$v(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int |\mathbf{k}| \chi(\mathbf{k}, t) [\sinh(|\mathbf{k}|(\zeta+h))/\sinh(|\mathbf{k}|h)] e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{k}, \quad (7)$$

其中,  $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$  为水平波矢,其值  $|\mathbf{k}| = \sqrt{(k_x)^2 + (k_y)^2}$  为波数.上述以及后继给出的关于波矢的积分范围从  $-\infty$  到  $+\infty$ .

上述方程是表面水波动力学的标准表述,参见文献[9-10].

## 1.2 Hamilton 表述

式(6)、(7)和式(3)、(4)共同给出表面水波演化方程的精确流体动力学表述.进一步的 Hamilton 表述归功于 Zakharov<sup>[6]</sup> 的开创性工作及其后继发展.按照该表述,表面水波演化的动力学可由关于正则共轭变量对  $(\zeta, \psi)$  的一对 Hamilton 正则方程表征(例如,参见文献[6]):

$$\frac{\partial \zeta(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \frac{\delta E}{\delta \psi(\mathbf{x}, t)}, \quad \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -\frac{\delta E}{\delta \zeta(\mathbf{x}, t)}. \quad (8)$$

其中  $\delta(\cdot)$  表示泛函导数,  $E$  为流体的总能量,  $E = K + P$ , 即动能  $K$  与势能  $P$  的和.后两者由下式给出:

$$K = \frac{1}{2} \iint_{-h}^{\zeta} [(\nabla\phi)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2] dz d\mathbf{x}, \quad (9)$$

$$P = \frac{1}{2} \int \zeta^2 d\mathbf{x} + \gamma \int \{ [1 + |\nabla\zeta|^2]^{1/2} - 1 \} d\mathbf{x}, \quad (10)$$

其中,  $\gamma$  为表面张力系数,关于  $\mathbf{x}$  的积分范围遍及整个水平面.

Hamilton 量即总能量  $E$  可经由下述途径表为正则共轭变量对表面位移  $\zeta$  和表面速度势  $\psi$  的泛函:从方程(6)将波矢函数  $\chi(\mathbf{k}, t)$  作为积分方程解表为表面速度势  $\psi$  和表面位移  $\zeta$  的 Fourier 变换的函数,然后将此解代入式(5)和式(9)、(10).

## 1.3 弱非线性 3-波和 4-波约化形式

由于高度复杂的非线性强耦合,前述精确意义上的表面水波演化方程难以处理.然而,可在一定近似情形下简化这些精确表面水波方程,导出其约化形式,从而从后者获得系统性结果.最简单情形为波陡  $\zeta$  为无穷小量的线性表面波.这时可引入下述近似:

$$\begin{aligned} \cosh(|\mathbf{k}|(\zeta+h)) &= \cosh(|\mathbf{k}|h), \\ \sinh(|\mathbf{k}|(\zeta+h)) &= \sinh(|\mathbf{k}|h). \end{aligned}$$

将精确表面波方程线性化,从而导出关于线性表面波的约化方程.

进一步的工作考虑波数与波陡之积  $|\mathbf{k}|\zeta$  为小量但非无穷小的所谓弱非线性情形.业已发现<sup>[9-10]</sup>,对该情形可引入简化途径近似处理精确表面波方程的非线性耦合,从而导出 4 次多项式形式的 4-波约化方程.该简化途径的主要步骤如下:

(i) 对小量  $|\mathbf{k}|\zeta$ , 引入下述 Taylor 级数近似:

$$\cosh(|\mathbf{k}|\zeta) = 1 + 0.5(|\mathbf{k}|\zeta)^2, \quad \sinh(|\mathbf{k}|\zeta) = |\mathbf{k}|\zeta, \quad (11)$$

分别替换式(6)、(7)中的双曲正弦和双曲余弦函数;

(ii) 然后将替换后积分中出现的每个幂函数  $\zeta^m$  代换为关于  $m$  个  $\zeta^*$  乘积的重积分;

(iii) 将如此得到的两个表达式进行关于水平坐标  $\mathbf{x}$  的 Fourier 变换;

(iv) 从变换后的表达式之一经由迭代求解将波矢函数  $\chi(\mathbf{k}, t)$  表为关于  $\zeta^*$  和  $\psi^*$  的多重积分之和, 然后将  $v^*$  也表为后两者的多重积分之和.

关于这些步骤及相关结果的进一步讨论将在下节给出.

在上述以及后继发展中,  $\zeta^*$  和  $\psi^*$  分别是  $\zeta$  和  $\psi$  的关于  $\mathbf{x}$  的 Fourier 变换, 即

$$\zeta(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int \zeta^*(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{k}, \quad \zeta^*(\mathbf{k}, t) = \bar{\zeta}^*(-\mathbf{k}, t), \quad (12)$$

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int \psi^*(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{k}, \quad \psi^*(\mathbf{k}, t) = \bar{\psi}^*(-\mathbf{k}, t), \quad (13)$$

其中上划横线表示复共轭.

基于前述简化途径和步骤, Stiassnie 和 Shemer<sup>[11]</sup> 从方程(3)、(4)和(6)、(7)导出弱非线性表面水波的 4-波约化方程以及修正的 Zakharov 型方程并应用这些方程分析了波列的线性稳定性问题. 此外, 早期结果给出 3-波约化方程<sup>[6]</sup>. 后继分析表明, 这些结果不必保证能量守恒<sup>[11]</sup>.

进一步工作指出, 上述能量不守恒问题起因于约化方程中的多项式积分核的非对称性, 可经由基于 Hamilton 变换的对称化步骤予以消除. 基于此理解以及前述简化途径, Krasitskii<sup>[9-10]</sup> 导出具对称多项式积分核的 3-波至 5-波约化 Hamilton 方程. 这些方程的 Hamilton 正则对称结构自动保证能量守恒, 且该性质在正则变换下保持不变, 该方面的进一步结果参见前述文献以及 Zakharov, Musher 等<sup>[12]</sup> 和 Janssen<sup>[13]</sup> 等.

## 2 新简化途径与纽约化 Hamilton 方程

至今所获得的表面水波约化方程适用于波陡很小的弱非线性情形. 双曲正弦和双曲余弦函数  $\sinh(|\mathbf{k}|\zeta)$  和  $\cosh(|\mathbf{k}|\zeta)$  在  $|\mathbf{k}|\zeta = 0$  邻域的幂级数近似(参见式(11))是它们的共同出发点. 由该近似可导出约化方程的关键在于幂函数  $(|\mathbf{k}|\zeta)^m$  的引入可将式(6)、(7)中的积分简化为  $m$  个  $\zeta^*$  的乘积的显式重积分(详情在后文中给出).

上述理解启发下述新简化途径: 寻求在更大范围内有效的多项式, 取代在 0 点邻域的 Taylor 近似式(11), 逼近双曲正弦和双曲余弦函数  $\sinh(|\mathbf{k}|\zeta)$  和  $\cosh(|\mathbf{k}|\zeta)$ . 如果该想法是可能的, 则可获得超出弱非线性情形的非线性表面水波的新约化 Hamilton 方程.

上述想法可由 Chebyshev 多项式逼近予以实现. 新简化途径的出发点基于下述 Chebyshev 逼近:

$$\cosh(|\mathbf{k}|\zeta) = 1 + (\cosh 0.9 - 1)(|\mathbf{k}|\zeta/0.9)^2, \quad (14)$$

$$\sinh(|\mathbf{k}|\zeta) = \frac{\sinh 0.9}{0.9} |\mathbf{k}|\zeta. \quad (15)$$

上述两式分别给出双曲余弦和双曲正弦函数在区间  $[-1.8/\sqrt{3}, 1.8/\sqrt{3}]$  的 2 次和 1 次 Chebyshev 多项式逼近. 不同于 Taylor 逼近式(11), 这些逼近不再限于  $|\mathbf{k}|\zeta$  很小的弱非线性情形. 有关它们的详细性质, 包括 0 点, 逼近精度以及适用范围等将在下节给出.

下面将基于式(14)、(15), 应用 1.3 小节所述的简化步骤导出新的约化 Hamilton 方程.

为简便计算, 引进下述压缩符号: 带下标符号  $\mathbf{k}_j$  表示波矢变量, 下标  $j$  取值 0, 1, 2,  $\dots$ , 特别地, 让  $\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}$ ; 进一步地, 引入波矢函数的如下简化表示:

$$\omega_j = \omega(\mathbf{k}_j, t), \quad K_{0,1,2}^{(n)} = K^{(n)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2), \quad \delta_{0-1-2} = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2),$$

等等;此外,  $\mathbf{k}_{-j}$  表示与  $\mathbf{k}_j$  方向相反的波矢变量,微分使用缩写:  $d\mathbf{k}_0 = d\mathbf{k}, d\mathbf{k}_{012} = d\mathbf{k}d\mathbf{k}_1d\mathbf{k}_2, \dots$ ; 积分符号表示相应的多重积分,积分限从  $-\infty$  到  $+\infty$ .

结果分 3 步导出:

**第 1 步** 从方程(6)导出经由  $\psi^*$  和  $\zeta^*$  表示的波矢函数  $\chi$ . 用新逼近式(14)、(15)替换式(6)中的双曲正弦和双曲余弦函数,循 1.3 小节所述简化步骤(ii)和(iii)可推出:

$$\begin{aligned} \psi_0^* &= \coth(|\mathbf{k}|h)\chi_0 + \frac{\sinh 0.9}{0.9} \frac{1}{2\pi} \int |\mathbf{k}_1| \chi_1 \zeta_2^* \delta_{0-1-2} d\mathbf{k}_{12} + \\ &\frac{\cosh 0.9 - 1}{(0.9)^2} \frac{1}{(2\pi)^2} \int |\mathbf{k}_1|^2 \coth(|\mathbf{k}_1|h) \chi_1 \zeta_2^* \zeta_3^* \delta_{0-1-2-3} d\mathbf{k}_{123}. \end{aligned} \quad (16)$$

然后对上式循环迭代直至 3 阶项,并通过适当的对称化得到

$$\begin{aligned} \chi_0 &= \tanh(|\mathbf{k}|h) \left[ \psi_0^* - \frac{1}{2\pi} \int a_1 q_1 \psi_1^* \zeta_2^* \delta_{0-1-2} d\mathbf{k}_{12} - \right. \\ &\left. \frac{1}{(2\pi)^2} \int \chi_{0,1,2,3}^{(3)} \psi_1^* \zeta_2^* \zeta_3^* \delta_{0-1-2-3} d\mathbf{k}_{123} \right], \end{aligned} \quad (17)$$

其中

$$\chi_{0,1,2,3}^{(3)} = a_2 |\mathbf{k}_1|^2 - \frac{1}{2} a_1^2 (q_1 q_{0-2} + q_1 q_{0-3}), \quad (18)$$

$$a_1 = \frac{\sinh 0.9}{0.9}, \quad a_2 = \frac{\cosh 0.9 - 1}{(0.9)^2}, \quad (19)$$

$$q(\mathbf{k}) = |\mathbf{k}| \tanh(|\mathbf{k}|h). \quad (20)$$

**第 2 步** 导出经由  $\psi^*$  和  $\zeta^*$  表示的动能和势能. 首先, 将式(5)代入动能表达式(9)可以推出:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int \int_{-h}^{\zeta} \left[ (\nabla\phi)^2 + \left( \frac{\partial\phi}{\partial z} \right)^2 \right] dz dx = \\ \frac{-1}{2(2\pi)^2} \iiint [(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_1) I^+ - |\mathbf{k}| |\mathbf{k}_1| I^-] \chi(\mathbf{k}) \chi(\mathbf{k}_1) e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1)x} d\mathbf{k} d\mathbf{k}_1 dx, \end{aligned} \quad (21)$$

其中

$$\begin{aligned} I^\pm = \frac{n \sinh[m(h+\zeta)] \pm m \sinh[n(h+\zeta)]}{mn [\cosh(mh) - \cosh(nh)]}, \\ m = |\mathbf{k}| + |\mathbf{k}_1|, \quad n = |\mathbf{k}| - |\mathbf{k}_1|. \end{aligned} \quad (22)$$

将式(22)的分子用变量分别为  $|\mathbf{k}|\zeta$  和  $|\mathbf{k}_1|\zeta$  的双曲正弦和双曲余弦函数表示,代入逼近式(14)、(15),将所得结果代入式(21)得到下述表达式:

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2(2\pi)} \int |\mathbf{k}| \coth(|\mathbf{k}|h) \bar{\chi}_0 \chi_0 d\mathbf{k}_0 - \frac{1}{2(2\pi)^2} \int K_{0,1}^{(3)} \chi_0 \chi_1 \zeta_2^* \delta_{0+1+2} d\mathbf{k}_{012} - \\ &\frac{1}{2(2\pi)^3} \int K_{0,1}^{(4)} \chi_0 \chi_1 \zeta_2^* \zeta_3^* \delta_{0+1+2+3} d\mathbf{k}_{0123}, \end{aligned} \quad (23)$$

其中,  $\chi$  由式(17)给出,而系数给出如下:

$$K_{0,1}^{(3)} = a_1 \coth(|\mathbf{k}|h) \coth(|\mathbf{k}_1|h) [(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_1) - q_0 q_1], \quad (24)$$

$$\begin{aligned} K_{0,1}^{(4)} &= a_2 \coth(|\mathbf{k}|h) \coth(|\mathbf{k}_1|h) \times \\ &\{ [(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_1) - |\mathbf{k}_1|^2] q_0 + [(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_1) - |\mathbf{k}|^2] q_1 \}. \end{aligned} \quad (25)$$

其次,导出经由  $\zeta^*$  表出的势能  $P$  (参见式(10)).为此,应用下述 Chebyshev 逼近:

$$\sqrt{1 + |\nabla\zeta|^2} = 1 + 0.25(\sqrt{5} + 1) [(\sqrt{2} - 1) |\nabla\zeta|^2 (2|\nabla\zeta|^2 - 3 + \sqrt{5}) + (1 + \sqrt{5} - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}) |\nabla\zeta|^2 (|\nabla\zeta|^2 - 1)]. \quad (26)$$

上式右边是左边平方根函数在区间  $[-1/\cos(\pi/10), 1/\cos(\pi/10)]$  上的 4 次 Chebyshev 逼近多项式.将上述逼近代入式(10)得到

$$P = \frac{1}{2(2\pi)} \int P_0^{(1)} \bar{\zeta}_0^* \zeta_0^* d\mathbf{k}_0 + \int P_{0,1,2,3}^{(4)} \zeta_0^* \zeta_1^* \zeta_2^* \zeta_3^* \delta_{0+1+2+3} d\mathbf{k}_{0123}, \quad (27)$$

其中

$$P_0^{(1)} = g + 2\gamma d_1 |\mathbf{k}_0|^2, \quad (28)$$

$$P_{0,1,2,3}^{(4)} = \frac{\gamma d_2}{3(2\pi)^3} [(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_1)(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}_3) + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_2)(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_3) + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_3)(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)], \quad (29)$$

$$d_1 = -0.25(\sqrt{5} + 1) [(\sqrt{2} - 1)(3 - \sqrt{5}) + (1 + \sqrt{5} - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}})], \quad (30)$$

$$d_2 = 0.25(\sqrt{5} + 1) [2(\sqrt{2} - 1) + (1 + \sqrt{5} - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}})]. \quad (31)$$

于是,由式(23)和(27)得到 Hamilton 量如下:

$$E = \frac{1}{2(2\pi)} \int |\mathbf{k}| \coth(|\mathbf{k}|h) \bar{\chi}_0 \chi_0 d\mathbf{k}_0 - \frac{1}{2(2\pi)^2} \int K_{0,1}^{(3)} \chi_0 \chi_1 \zeta_2^* \delta_{0+1+2} d\mathbf{k}_{012} - \frac{1}{2(2\pi)^3} \int K_{0,1}^{(4)} \chi_0 \chi_1 \zeta_2^* \zeta_3^* \delta_{0+1+2+3} d\mathbf{k}_{0123} + \frac{1}{2(2\pi)} \int P_0^{(1)} \bar{\zeta}_0^* \zeta_0^* d\mathbf{k}_0 + \int P_{0,1,2,3}^{(4)} \zeta_0^* \zeta_1^* \zeta_2^* \zeta_3^* \delta_{0+1+2+3} d\mathbf{k}_{0123}. \quad (32)$$

**第 3 步** 将 Hamilton 正则方程(8)进行 Fourier 变换,代入所得到的 Hamilton 量给出下述方程:

$$\frac{\partial \zeta_0^*}{\partial t} = \frac{1}{2\pi} \int |\mathbf{k}| \coth(|\mathbf{k}|h) \chi_0 \frac{\delta \bar{\chi}_0}{\delta \bar{\psi}_0^*} d\mathbf{k} - \frac{1}{4\pi^2} \int K_{1,-0}^{(3)} \frac{\delta \bar{\chi}_0}{\delta \bar{\psi}_0^*} \chi_1 \zeta_2^* \delta_{0-1-2} d\mathbf{k}_{012} - \frac{1}{8\pi^3} \int K_{1,-0}^{(4)} \frac{\delta \bar{\chi}_0}{\delta \bar{\psi}_0^*} \chi_1 \zeta_2^* \zeta_3^* \delta_{0-1-2-3} d\mathbf{k}_{0123}, \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_0}{\partial t} = & -\frac{1}{2\pi} \int |\mathbf{k}| \coth(|\mathbf{k}|h) \chi_0 \frac{\delta \bar{\chi}_0}{\delta \bar{\zeta}_0^*} d\mathbf{k} + \\ & \frac{1}{4\pi^2} \int \left( K_{1,-0}^{(3)} \frac{\delta \bar{\chi}_0}{\delta \bar{\zeta}_0^*} \chi_1 \zeta_2^* + \frac{1}{2} K_{2,1}^{(3)} \chi_1 \chi_2 \right) \delta_{0-1-2} d\mathbf{k}_{012} + \\ & \frac{1}{8\pi^3} \int \left( K_{1,-0}^{(4)} \frac{\delta \bar{\chi}_0}{\delta \bar{\zeta}_0^*} \chi_1 \zeta_2^* \zeta_3^* + K_{2,1}^{(4)} \chi_1 \chi_2 \zeta_3^* \right) \delta_{0-1-2-3} d\mathbf{k}_{123} - \\ & \frac{1}{2\pi} P_0^{(1)} \zeta_0^* - 4 \int P_{-0,1,2,3}^{(4)} \zeta_1^* \zeta_2^* \zeta_3^* \delta_{0-1-2-3} d\mathbf{k}_{0123}. \end{aligned} \quad (34)$$

其中关于  $\bar{\chi}_0$  的两个泛函导数从式(17)导出,结果如下:

$$\coth(|\mathbf{k}|h) \frac{\delta \bar{\chi}_0}{\delta \bar{\psi}_0^*} = \delta(\mathbf{k} - \hat{\mathbf{k}}) - \frac{a_1}{2\pi} \int q(\hat{\mathbf{k}}) \bar{\zeta}^*(\hat{\mathbf{k}}_1) \delta_{0-\hat{0}-1} d\hat{\mathbf{k}}_1 -$$

$$\frac{1}{4\pi^2} \int \chi_{0,0,\hat{i},\hat{2}}^{(3)} \bar{\zeta}^*(\hat{\mathbf{k}}_1) \bar{\zeta}^*(\hat{\mathbf{k}}_2) \delta_{0-\hat{0}-\hat{i}-\hat{2}} d\hat{\mathbf{k}}_1 d\hat{\mathbf{k}}_2, \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \coth(|\mathbf{k}|h) \frac{\delta \bar{\chi}_0}{\delta \bar{\zeta}_0^*} = & -\frac{a_1}{2\pi} \int q(\hat{\mathbf{k}}) \bar{\psi}^*(\hat{\mathbf{k}}_1) \delta_{0-\hat{0}-\hat{1}} d\hat{\mathbf{k}}_1 - \\ & \frac{1}{4\pi^2} \int \chi_{0,0,\hat{i},\hat{2}}^{(3)} \bar{\psi}^*(\hat{\mathbf{k}}_1) \bar{\zeta}^*(\hat{\mathbf{k}}_2) \delta_{0-\hat{0}-\hat{i}-\hat{2}} d\hat{\mathbf{k}}_1 d\hat{\mathbf{k}}_2. \end{aligned} \quad (36)$$

在式(33)~(36)中引入下述记号:

$$\begin{aligned} \bar{\chi}_0 &= \bar{\chi}(\hat{\mathbf{k}}, t), \\ \bar{\chi}_{0,0,\hat{i},\hat{2}}^{(3)} &= \bar{\chi}^{(3)}(\mathbf{k}, \hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{k}}_1, \hat{\mathbf{k}}_2), \\ \delta_{0,\hat{0},\hat{i}} &= \delta(\mathbf{k} - \hat{\mathbf{k}} - \hat{\mathbf{k}}_1), \\ \delta_{0,\hat{0},\hat{i},\hat{2}} &= \delta(\mathbf{k} - \hat{\mathbf{k}} - \hat{\mathbf{k}}_1 - \hat{\mathbf{k}}_2). \end{aligned}$$

如前所述, 基于式(11)的 Taylor 近似适用于  $|\mathbf{k}|\zeta$  很小的弱非线性情形, 其对应的约化 Hamilton 方程参见 Krasitskii<sup>[9]</sup> 以及稍后给出的式(37)、(38). 基于 Chebyshev 逼近式(14)、(15)的新约化 Hamilton 方程式(33)~(36)适用于更广泛情形. 下面说明对  $|\mathbf{k}|\zeta$  很小的弱非线性情形, 所导出的新方程式(37)、(38)将给出弱非线性情形的相同形式结果, 从而将后者纳入特殊情形.

事实上, 将式(35)、(36)代入式(33)、(34), 略去 3 阶以上高阶项并经合并以及对称化步骤后, 最终可获得弱非线性情形的约化 Hamilton 方程如下:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta_0^*}{\partial t} - \frac{1}{2\pi} q_0 \psi_0^* = & \\ & 2 \int \tilde{K}_{-0,1,2}^{(3)} \psi_1^* \zeta_2^* \delta_{0-1-2} d\mathbf{k}_{12} + 2 \int \tilde{K}_{-0,1,2,3}^{(4)} \psi_1^* \zeta_2^* \zeta_3^* \delta_{0-1-2-3} d\mathbf{k}_{123}, \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_0^*}{\partial t} + \frac{1}{2\pi} P_0^{(1)} \zeta_0^* = & \\ & - \int \tilde{K}_{1,2,-0}^{(3)} \psi_1^* \psi_2^* \delta_{0-1-2} d\mathbf{k}_{12} - 2 \int \tilde{K}_{1,2,3,-0}^{(4)} \psi_1^* \psi_2^* \zeta_3^* \delta_{0-1-2-3} d\mathbf{k}_{123} - \\ & 4 \int P_{1,2,3,-0}^{(4)} \zeta_1^* \zeta_2^* \zeta_3^* \delta_{0-1-2-3} d\mathbf{k}_{123}, \end{aligned} \quad (38)$$

其中

$$\tilde{K}_{0,1,2}^{(3)} = -\frac{a_1}{2(2\pi)^2} [(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_1) + q_0 q_1], \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{0,1,2,3}^{(4)} = & -\frac{1}{2(2\pi)^3} [2a_2 |\mathbf{k}_1|^2 q_0 - a_1^2 (q_{0+2} + q_{0+3}) q_0 q_1] - \\ & \frac{a_2}{2(2\pi)^3} [(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_1) q_0 - |\mathbf{k}_1|^2 q_0 + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_1) q_1 - |\mathbf{k}|^2 q_1] + \\ & \frac{a_1^2}{8(2\pi)^3} [-2|\mathbf{k}|^2 q_1 + 2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_1) q_1 - 2|\mathbf{k}_1|^2 q_0 + \\ & 2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_1) q_0 - (q_{1+2} + q_{1+3} + q_{0+2} + q_{0+3}) q_0 q_1]. \end{aligned} \quad (40)$$

方程式(37)、(38)与现有结果一致<sup>[9]</sup>. 另一方面, 将正则共轭变量对  $\zeta^*$  和  $\psi^*$  组合成 1 个复变

量,则上述共轭方程对可进一步表示为关于该复变量的单个 Hamilton 方程,其中的 Hamilton 量为该量及其复共轭的多项式形式泛函。

上述分析表明,新约化 Hamilton 方程适用于更广泛情形,且当  $|k|\zeta$  很小时,给出与已有弱非线性情形相同的结果.对超出弱非线性范围之情形,即当  $|k|\zeta$  不必很小时,从新方程式 (33) ~ (36) 将导出包含不可忽略非线性效应的新结果.进一步的考察需就某些典型的非线性波问题导出新方程的数值结果并与实验数据相比较.由于所涉及的强非线性复杂性,这一重要方面本身需专题探讨,有赖于发展有效的相应数值计算方案,相关结果将另文给出。

### 3 误差分析与适用范围

新结果的适用范围取决于式 (14)、(15) 和 (26) 给出的 Chebyshev 逼近的精度。

考虑下述逼近误差:

$$Q_1 = 1 + (\cosh 0.9 - 1)(\omega/0.9)^2 - \cosh \omega, \quad (41)$$

$$Q_2 = \frac{\sinh 0.9}{0.9} \omega - \sinh \omega, \quad (42)$$

$$Q_0 = 1 + 0.25(\sqrt{5} + 1)\omega^2 [(\sqrt{2} - 1)(2\omega^2 - 3 + \sqrt{5}) + (1 + \sqrt{5} - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}})(\omega^2 - 1)] - \sqrt{1 + \omega^2}. \quad (43)$$

图 1 示出上述 3 个逼近误差函数在区间  $[0, 1.035]$  的图像。

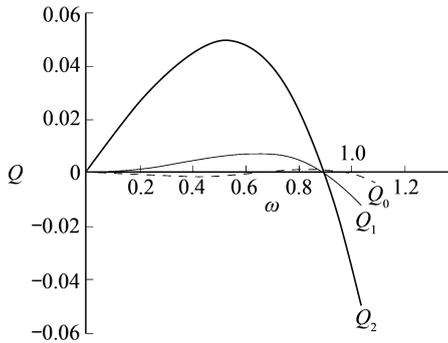


图 1 Chebyshev 多项式逼近的误差

Fig. 1 The Chebyshev polynomial approximation errors

如图 1 所示,最大误差由  $Q_2$  给出,在区间  $[0, 1.035]$  上逼近误差极值由函数  $Q_2$  在右端  $\omega = 1.035$  和  $\omega = \operatorname{arccosh}(\sinh 0.9/0.9)$  达到,分别为 0.049 45 和 0.049 35.此外,在所讨论区间范围内,逼近误差  $Q_1$  的最大值在  $\omega = 1.035$  达到,约为 1%,而逼近误差  $Q_0$  接近于 0.作为比较,函数  $\sinh \omega$  的一阶 Taylor 逼近误差为  $\omega - \sinh \omega$ ,其在  $\omega = 1.035$  的误差约为 20%。

上述分析表明,对  $|\omega| \leq 1.035$ , Chebyshev 逼近式 (15) 的误差不超过 5%,而逼近式 (14) 和 (26) 具有更高精度.特别,当  $\omega = 0.9$  时,误差为 0。

由此可推断,所导出的新约化方程适用于积  $|k|\zeta$  的值直至 1.035 的非线性范围,在此范围内误差不超过 5%,特别,当此积邻近于 0.9 时,给出精确结果。

### 4 结 论

在海岸工程中,对海上表面波尤其极端波的准确描述是设计固定及浮动结构体的关键之一,给出一个充分反映实际海洋表面波的演化方程显得尤为重要.本文基于 Chebyshev 多项式

逼近的新简化途径,构建了有限波陡的非线性海洋表面波的约化 Hamilton 方程,将关于弱非线性情形的经典结果推广到  $|k|\zeta$  值直至约 1.035 的有限波陡的非线性情形,首次将适用范围具体化,以更实际地反映波浪演化状况.预期所给出结果有助于进一步开展波-流混合与海洋工程结构物作用问题的计算机模拟研究,从而为海洋工程安全设计奠定更有效的基础.

**致谢** 作者衷心感谢上海大学研究创新基金(A.10-0401-12-001)对本文的资助.

## 参考文献(References):

- [1] Bouscasse B, Colagrossi A, Marrone S, Antuono M. Nonlinear water wave interaction with floating bodies in SPH[J]. *Journal of Fluid and Structures*, 2013, **42**: 112-129.
- [2] Belibassakis K A, Athanassoulis G A. A coupled-mode system with application to nonlinear water waves propagating in finite water depth and in variable bathymetry regions[J]. *Coastal Engineering*, 2011, **58**(4): 337-350.
- [3] TAO Long-bin, SONG Hao, Chakrabarti S. Nonlinear progressive waves in water of finite depth—an analytic approximation[J]. *Coastal Engineering*, 2007, **54**(11): 825-834.
- [4] LI Bin. A mathematical model for weakly nonlinear water wave propagation[J]. *Wave Motion*, 2010, **47**(5): 265-278.
- [5] Bateman W J D, Katsardi V, Swan C. Extreme ocean waves—part I: the practical application of fully nonlinear wave modeling[J]. *Applied Ocean Research*, 2012, **34**: 209-224.
- [6] Zakharov V. Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid[J]. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1968, **9**(2): 190-198.
- [7] Zakharov V E, Kharitonov V G. Instability of monochromatic waves on the surface of a liquid of arbitrary depth[J]. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1970, **11**(5): 741-751.
- [8] Miles J W. On Hamilton's principle for surface waves[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1977, **83**: 153-158.
- [9] Krasitskii V P. Canonical transformations in a theory of weakly nonlinear waves with a nondecay dispersion law[J]. *Soviet Physics JETP*, 1990, **71**(5): 921-927.
- [10] Krasitskii V P. On reduced equations in the Hamiltonian theory of weakly nonlinear surface waves[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1994, **272**: 1-20.
- [11] Stiassnie M, Shemer L. On modifications of the Zakharov equation for surface gravity waves[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1984, **143**: 47-67.
- [12] Zakharov V E, Musher S L, Rubenchick A M. Hamiltonian approach to the description of nonlinear plasma phenomena[J]. *Physics Reports*, 1985, **129**(5): 285-366.
- [13] Janssen P A E M. On some consequences of the canonical transformation in the Hamiltonian theory of water waves[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2009, **637**: 1-44.
- [14] Benney D J, Roskes G J. Wave instabilities[J]. *Studies in Applied Mathematics*, 1969, **48**: 377-385.
- [15] Chu V H, Mei C C. On slowly-varying Stokes waves[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1970, **41**(4): 873-887.
- [16] Davey A, Stewartson K. On three-dimensional packets of surface waves[J]. *Proceedings of the Royal Society of London (Series A: Mathematical and Physical Sciences)*, 1974, **338**(1613): 101-110.
- [17] Lavrova O T. On the lateral instability of waves on the surface of a finite-depth fluid[J]. *Iz-*

- vestiya Atmospheric and Oceanic Physics*, 1983, **19**: 807-810.
- [18] Newell A C, Rumpf B. Wave turbulence[J]. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 2011, **43**: 59-78.
- [19] Tanaka M. Verification of Hasselmann's energy transfer among surface gravity waves by direct numerical simulations of primitive equations[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2001, **444**: 199-221.
- [20] Annenkov S Y, Shrira V I. Numerical modelling of water-wave evolution based on the Zakharov equation[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2001, **449**: 341-371.
- [21] 黄虎. 近海波-流相互作用的缓坡方程理论体系[J]. 物理学报, 2010, **59**(2): 740-743. (HUANG Hu. A theoretical hierarchy of the mild-slope equations for wave-current interactions in coastal waters[J]. *Acta Physica Sinica*, 2010, **59**(2): 740-743. (in Chinese))

## A New Development of Reduced Hamiltonian Equations for Ocean Surface Waves: an Extension From Small to Finite Amplitude

WANG Zhao-ling<sup>1,2</sup>, XIAO Heng<sup>2,3</sup>

(1. *School of Mathematics and Information Sciences*,

*Weifang University, Weifang, Shandong 261061, P.R.China*;

2. *The State Key Laboratory of Advanced Special Steel(Shanghai University)*,  
*Shanghai 200444, P.R.China*;

3. *Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics*,  
*Shanghai University, Shanghai 200072, P.R.China*)

**Abstract:** The reduced 3-wave and 4-wave Hamiltonian equations for ocean surface waves were widely used for the simplified structure with symmetric polynomial kernels and for the conservation of energy, etc. However, according to the related assumption for approximation in derivation, the range of applicability was limited to weakly nonlinear waves of small amplitude. Here the following issue was further studied: for nonlinear waves of finite amplitude within a certain range, was it also possible to obtain reduced Hamiltonian equations with symmetric polynomial kernels in a sense of sufficient accuracy? Because of complicated strongly nonlinear coupling, few development in this significant respect had been made as yet. A new approach was proposed based on the Chebyshev polynomials to best approximate the primitive water wave equations in the exact sense of strongly nonlinear coupling and derive new reduced Hamiltonian equations with symmetric polynomial kernels. The new results exhibit an extension from a weakly nonlinear case in which the product of the wave number and the wave steepness is small to a nonlinear case in which this product goes up to about 1.035. Moreover, within this range, the approximation errors are lower than 5%, and in particular, the new results prove exact whenever the said product lies close to 0.9.

**Key words:** ocean surface wave; finite amplitude; new approach for reduction; new reduced Hamiltonian equation

**Foundation item:** The National Natural Science Foundation of China(11372172)