文章编号:1000-0887(2015)11-1178-13

功率型变分原理和功能型拟变分原理及其应用*

冯晓九[1], 梁立孚[2]

(1. 常州大学 环境与安全工程学院, 江苏 常州 213164;
2. 哈尔滨工程大学, 哈尔滨 150001)

摘要: 自钱伟长建立了功率型变分原理以来,功率型变分原理和功能型变分原理在理论方面和应用方面有什么区别和联系,成为学术界关注的课题.应用变积方法,根据 Jourdain 原理和 d' Alembert 原理,建立了不可压缩黏性流体力学的功率型变分原理和功能型拟变分原理,推导了不可压缩黏性流体力学的功率型变分原理的驻值条件和功能型拟变分原理的拟驻值条件.研究了不可压缩黏性流体力学的功率型变分原理在有限元素法中的应用.研究表明,功率型变分原理与 Jourdain 原理相吻合,功能型变分原理与 d' Alembert 原理相吻合.功率型变分原理直接在状态空间中研究问题,不仅在建立变分原理的过程中可以省略在时域空间中的一些变换,而且给动力学问题有限元素法的数值建模带来方便.

关 键 词: 不可压缩流体; Jourdain 原理; d' Alembert 原理; 功率型变分原理; 功能型拟变分原理; 变积方法

中图分类号: O302 **文献标志码:** A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2015.11.006

引 言

文献[1]指出,世界上有两个学术中心变分原理的研究工作引起各国学者的注意,一个是美国麻省理工学院的 Reissner[2], Washizu[3], Pian[4] 等人,另一个就是钱伟长[5]、Hu(胡海昌)[6]等中国学者.

1984 年文献[5]从流体力学的基本方程出发,对内流、外流等一般的黏性流动建立了更为普遍的变分原理,对不可压缩黏性流体和可压缩黏性流体分别建立了最大功率消耗原理.许多学者已经注意到,与以往诸多学者建立的功能型变分原理不同,文献[5]建立的是功率型变分原理.功率型变分原理和功能型变分原理在理论方面和应用方面有什么区别和联系,成为学术界关注的课题.梁立孚等应用变积方法推导流体动力学功率型变分原理,得到钱伟长先生的亲自推荐[7],进而建立了不可压缩黏性流体力学卷积型的功率型变分原理[8].作为这类研究的继

* **收稿日期:** 2015-05-18; **修订日期:** 2015-09-09
基金项目: 国家自然科学基金(10272034)
作者简介: 冯晓九(1964—),男,吉林人,教授,博士,硕士生导师(E-mail: fengxiaojiu999@126.com);
梁立孚(1939—),男,河北人,教授,博士生导师(通讯作者. E-mail: lianglifu@hrbeu.edu.cn).

续,近年来又研究了功能型拟变分原理[9-10].

本文作者通过长期的研究发现,功率型变分原理与 Jourdain 原理相吻合,功能型变分原理与 d' Alembert 原理相吻合.如所周知 Jourdain 原理和 d' Alembert 原理都是力学中的基本原理,只不过 Jourdain 原理是在状态空间研究问题,而 d' Alembert 原理是在位形空间研究问题.

本文以不可压缩黏性流体力学为例,分别从 Jourdain 原理和 d' Alembert 原理出发,对比推导出功率型变分原理和功能型拟变分原理,分别推导了它们的驻值条件和拟驻值条件.研究了不可压缩黏性流体力学的功率型变分原理在有限元素法中的应用.最后,尝试性地说明了功率型变分原理的特点.

Jourdain 原理和 d' Alembert 原理是分析力学中的两个最基本的原理.

对于由任意个质点 $m_i(i=1,2,\cdots)$ 组成的质点系,可以列出 Jourdain 形式的动力学普遍定理:

$$\sum_{i}^{n}(m_i\dot{\boldsymbol{v}}_i-\boldsymbol{f}_i)\cdot\delta\boldsymbol{v}_i=0, \tag{a}$$

其中,$\boldsymbol{v}_i$ 为质点 m_i 的速度,$\boldsymbol{f}_i$ 为作用于 m_i 的主动力,$\delta\boldsymbol{v}_i$ 为 m_i 的 Jourdain 速度变分.方程(a)可解释为:对于系统内各质点在约束条件允许下的 Jourdain 速度变分,其主动力及惯性力的总虚功率为 0,因此亦称为虚功率原理.根据虚功率原理可以进一步推导出系统的功率型变分原理.

对于由任意个质点 $m_i(i=1,2,\cdots)$ 组成的质点系,可以列出 d' Alembert 形式的动力学普遍定理:

$$\sum_{i}^{n}(m_i\dot{\boldsymbol{v}}_i-\boldsymbol{f}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0, \tag{b}$$

其中,$\boldsymbol{r}_i$ 为质点 m_i 相对惯性空间的矢径,$\boldsymbol{f}_i$ 为作用于 m_i 的主动力,$\delta\boldsymbol{r}_i$ 为 m_i 的 d' Alembert 矢径变分.方程(b)可解释为:对于系统内各质点在约束条件允许下的 d' Alembert 矢径变分,其主动力及惯性力的总虚功为 0,因此亦称为虚功原理.根据虚功原理可以进一步推导出系统的功能型变分原理.

1　不可压缩黏性流体力学的功率型变分原理

1984 年,钱伟长[5]从流体力学的基本方程出发,对内流、外流等一般的黏性流动建立了更为普遍的变分原理.参照钱伟长的工作,我们应用变积方法建立不可压缩黏性流体力学的功率型变分原理.

参考文献[5,11-12],不可压缩黏性流体力学的控制方程为

动力学方程

$$-\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}+\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}+\boldsymbol{f}=\boldsymbol{0}; \tag{1}$$

连续性方程

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0; \tag{2}$$

本构关系

$$\boldsymbol{\tau}=-\left(p+\frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\boldsymbol{v}\right)\boldsymbol{I}+\mu(\nabla\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\nabla). \tag{3}$$

边界条件 $S=S_{\mathrm{w}}+S_{\mathrm{f}}$,

在力学边界 S_{f} 上

$$\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{n}-\boldsymbol{T}=\mathbf{0};\tag{4}$$

在速度边界 S_{w} 上

$$\boldsymbol{v}=\bar{\boldsymbol{v}}.\tag{5}$$

为了书写简洁以及推导方便,上面的方程式采用实体张量记号书写.ρ 是密度,为 0 阶张量(标量);$\boldsymbol{v}$ 为速度矢量(1 阶张量);$\boldsymbol{f}$ 为单位体积流体所受的体积力矢量;$\boldsymbol{\tau}$ 为应力 2 阶张量;μ 为黏性系数标量;$\boldsymbol{I}$ 为 2 阶单位张量;$\boldsymbol{n}$ 为单位外法向矢量;p 为静水压强,为 0 阶张量(标量);∇ 为梯度算子(又称 Hamilton 算子).S_{w} 为速度边界面,这里速度 $\bar{\boldsymbol{v}}$ 为确定的函数;S_{f} 为力学边界面,这里单位面积流体所受的面积力矢量 $\boldsymbol{T}$ 为确定的函数.

将式(1)和式(4)分别点乘以 $\delta\boldsymbol{v}$, 然后积分,并代数相加,考虑到

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot(\nabla\boldsymbol{v}),$$

可得

$$\iiint_V\left[-\rho\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}-\rho\boldsymbol{v}\cdot(\nabla\boldsymbol{v})+\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}+\boldsymbol{f}\right]\cdot\delta\boldsymbol{v}\mathrm{d}V-\iint_{S_{\mathrm{f}}}(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{n}-\boldsymbol{T})\cdot\delta\boldsymbol{v}\mathrm{d}S=0.\tag{6}$$

应用 Green 定理

$$\iiint_V\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}\cdot\delta\boldsymbol{v}\mathrm{d}V=\iint_{S_{\mathrm{w}}+S_{\mathrm{f}}}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{n}\cdot\delta\boldsymbol{v}\mathrm{d}S-\iiint_V\boldsymbol{\tau}:\delta\nabla\boldsymbol{v}\mathrm{d}V.\tag{7}$$

将式(7)代入式(6),可得

$$\iiint_V\left[-\rho\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}\cdot\delta\boldsymbol{v}-\rho\boldsymbol{v}\cdot(\nabla\boldsymbol{v})\cdot\delta\boldsymbol{v}-\boldsymbol{\tau}:\delta\nabla\boldsymbol{v}+\boldsymbol{f}\cdot\delta\boldsymbol{v}\right]\mathrm{d}V+\iint_{S_{\mathrm{f}}}\boldsymbol{T}\cdot\delta\boldsymbol{v}\mathrm{d}S+\iint_{S_{\mathrm{w}}}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{n}\cdot\delta\boldsymbol{v}\mathrm{d}S=0.\tag{8}$$

这就是流体力学中的虚功率原理,由以上推导过程可以发现,无论材料的本构关系如何,虚功率原理都成立.

将式(3)代入式(8),可得

$$\iiint_V\left[-\rho\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}\cdot\delta\boldsymbol{v}-\rho\boldsymbol{v}\cdot(\nabla\boldsymbol{v})\cdot\delta\boldsymbol{v}+\left(p+\frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\boldsymbol{v}\right)\boldsymbol{I}:\delta\nabla\boldsymbol{v}-\mu(\nabla\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\nabla):\delta\nabla\boldsymbol{v}+\boldsymbol{f}\cdot\delta\boldsymbol{v}\right]\mathrm{d}V+\iint_{S_{\mathrm{f}}}\boldsymbol{T}\cdot\delta\boldsymbol{v}\mathrm{d}S+\iint_{S_{\mathrm{w}}}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{n}\cdot\delta\boldsymbol{v}\mathrm{d}S=0.\tag{9}$$

引入先决条件式(2)和式(5),可得

$$\iiint_V\left[-\rho\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}\cdot\delta\boldsymbol{v}-\rho\boldsymbol{v}\cdot(\nabla\boldsymbol{v})\cdot\delta\boldsymbol{v}+p\boldsymbol{I}:\delta\nabla\boldsymbol{v}-\mu(\nabla\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\nabla):\delta\nabla\boldsymbol{v}+\boldsymbol{f}\cdot\delta\boldsymbol{v}\right]\mathrm{d}V+\iint_{S_{\mathrm{f}}}\boldsymbol{T}\cdot\delta\boldsymbol{v}\mathrm{d}S=0.\tag{10}$$

考虑到 $\nabla\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\nabla$的对称性,上式可以处理为一个泛函的驻值问题

$$\pi_1=\iiint_V\left[p\boldsymbol{I}:\nabla\boldsymbol{v}-\frac{1}{4}\mu(\nabla\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\nabla):(\nabla\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\nabla)+\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\right]\mathrm{d}V+$$

$$\iint_{S_f} \boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}S - \pi_0. \tag{11}$$

其先决条件为式(2)和式(5).

这便是不可压缩黏性流体力学的功率型变分原理.按照钱伟长先生的论述,

$$\delta\pi_0 = \iiint_V \left[\rho\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} + \rho\boldsymbol{v}\cdot(\nabla\boldsymbol{v})\right]\cdot\delta\boldsymbol{v}\mathrm{d}V,$$

明显可见, π_0 是单位时间内流体储存的总动能,即动能的变化率,亦即功率的量纲. $\iiint_V \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}V$ 是体积力的功率, $\iint_{S_f}\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}S$ 是面积力的功率.

以下推导这个变分原理的驻值条件.

将 π_1 变分,并令 $\delta\pi_1 = 0$, 可得

$$\delta\pi_1 = \iiint_V \Big[-\rho\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}\cdot\delta\boldsymbol{v} - \rho\boldsymbol{v}\cdot(\nabla\boldsymbol{v})\cdot\delta\boldsymbol{v} + p\boldsymbol{I}:\delta\nabla\boldsymbol{v} - \mu(\nabla\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\nabla):\delta\nabla\boldsymbol{v} + \boldsymbol{f}\cdot\delta\boldsymbol{v}\Big]\mathrm{d}V + \iint_{S_f}\boldsymbol{T}\cdot\delta\boldsymbol{v}\mathrm{d}S = 0. \tag{12}$$

采用加零变换法[12],将式(2)乘上 $2\mu\boldsymbol{I}\delta\nabla\boldsymbol{v}/3$ 纳入泛函式(12)中,可得

$$\delta\pi_1 = \iiint_V \left[-\rho\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}\cdot\delta\boldsymbol{v} - \rho\boldsymbol{v}\cdot(\nabla\boldsymbol{v})\cdot\delta\boldsymbol{v} + p\boldsymbol{I}:\delta\nabla\boldsymbol{v} + \frac{2}{3}\mu(\nabla\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{I}:\delta\nabla\boldsymbol{v} - \mu(\nabla\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\nabla):\delta\nabla\boldsymbol{v} + \boldsymbol{f}\cdot\delta\boldsymbol{v}\right]\mathrm{d}V + \iint_{S_f}\boldsymbol{T}\cdot\delta\boldsymbol{v}\mathrm{d}S = 0. \tag{13}$$

应用 Green 定理

$$\iiint_V \left[\left(p + \frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\boldsymbol{v}\right)\boldsymbol{I} - \mu(\nabla\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\nabla)\right]:\delta\nabla\boldsymbol{v}\mathrm{d}V = \iint_{S_w+S_f}\left[\left(p + \frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\boldsymbol{v}\right)\boldsymbol{I} - \mu(\nabla\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\nabla)\right]\cdot\boldsymbol{n}\cdot\delta\boldsymbol{v}\mathrm{d}S - \iiint_V \nabla\cdot\left[\left(p + \frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\boldsymbol{v}\right)\boldsymbol{I} + \mu(\nabla\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\nabla)\right]\cdot\delta\boldsymbol{v}\mathrm{d}V. \tag{14}$$

将式(14)代入式(13),考虑到在速度边界 S_w 上 $\delta\boldsymbol{v} = 0$, 可得

$$\delta\pi_1 = \iiint_V \left[-\rho\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} - \rho\boldsymbol{v}\cdot(\nabla\boldsymbol{v}) - \nabla\cdot\left(p + \frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\boldsymbol{v}\right)\boldsymbol{I} + \nabla\cdot\mu(\nabla\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\nabla) + \boldsymbol{f}\right]\cdot\delta\boldsymbol{v}\mathrm{d}V - \iint_{S_f}\left[-\left(p + \frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\boldsymbol{v}\right)\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{n} + \mu(\nabla\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\nabla)\cdot\boldsymbol{n} - \boldsymbol{T}\right]\delta\boldsymbol{v}\mathrm{d}S = 0. \tag{15}$$

由于 $\delta\boldsymbol{v}$ 的任意性,由式(15)可得

$$-\left[\rho\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} + \rho\boldsymbol{v}\cdot(\nabla\boldsymbol{v})\right] + \nabla\cdot\left[-\left(p + \frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\boldsymbol{v}\right)\boldsymbol{I} + \mu(\nabla\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\nabla)\right] + \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}, \tag{16}$$

$$-\left(p + \frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\boldsymbol{v}\right)\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{n} + \mu(\nabla\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\nabla)\cdot\boldsymbol{n} - \boldsymbol{T} = \boldsymbol{0}. \tag{17}$$

这就是不可压缩黏性流体力学功率型变分原理的驻值条件.

应用对合变换[13],式(16)和式(17)可以变换为

$$-\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}+\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}+\boldsymbol{f}=\boldsymbol{0},\tag{18}$$

$$\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{n}-\boldsymbol{T}=\boldsymbol{0}.\tag{19}$$

这便说明,式(16)和式(17)正是将应力表达式代入动力学方程和力学边界条件的结果.

2 不可压缩黏性流体力学的功能型拟变分原理

不可压缩黏性流体力学的控制方程为

动力学方程

$$-\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}+\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}+\boldsymbol{f}=\boldsymbol{0};\tag{20}$$

连续性方程

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0;\tag{21}$$

本构关系

$$\boldsymbol{\tau}=-\left(p+\frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\boldsymbol{v}\right)\boldsymbol{I}+\mu(\nabla\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\nabla);\tag{22}$$

运动学关系

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}.\tag{23}$$

边界条件为 $S=S_{\mathrm{w}}+S_{\mathrm{f}}$:

在位移边界 S_{w} 上

$$\boldsymbol{u}=\bar{\boldsymbol{u}};\tag{24}$$

在力学边界 S_{f} 上

$$\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{n}-\boldsymbol{T}=\boldsymbol{0},\tag{25}$$

其中,ρ 是密度,为 0 阶张量(标量);$\boldsymbol{u}$ 为位移矢量(1 阶张量);$\boldsymbol{v}$ 为速度矢量;$\boldsymbol{f}$ 为单位体积流体所受的体积力矢量;$\boldsymbol{\tau}$ 为应力 2 阶张量;μ 为黏性系数标量;$\boldsymbol{I}$ 为 2 阶单位张量;$\boldsymbol{n}$ 为单位外法向矢量;p 为静水压强,为 0 阶张量(标量);∇为梯度算子(又称 Hamilton 算子).S_{w} 为位移边界面,这里位移 $\bar{\boldsymbol{u}}$ 为确定的函数;S_{f} 为力学边界面,这里单位面积流体所受的面积力矢量 $\boldsymbol{T}$ 为确定的函数.

将式(20)和式(25)分别点乘以 $\delta\boldsymbol{u}$, 然后积分,并代数相加,可得

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{\iiint_V\left(-\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}+\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}+\boldsymbol{f}\right)\cdot\delta\boldsymbol{u}\mathrm{d}V-\iint_{S_{\mathrm{f}}}(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{n}-\boldsymbol{T})\cdot\delta\boldsymbol{u}\mathrm{d}S\right\}\mathrm{d}t=0.\tag{26}$$

应用 Green 定理,

$$\iiint_V\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{u}\mathrm{d}V=\iint_{S_{\mathrm{w}}+S_{\mathrm{f}}}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{n}\cdot\delta\boldsymbol{u}\mathrm{d}S-\iiint_V\boldsymbol{\tau}:\delta\nabla\boldsymbol{u}\mathrm{d}V.\tag{27}$$

将式(27)代入式(26),可得

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{\iiint_V\left[-\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\delta\boldsymbol{u}-\boldsymbol{\tau}:\delta\nabla\boldsymbol{v}+\boldsymbol{f}\cdot\delta\boldsymbol{u}\right]\mathrm{d}V+\iint_{S_{\mathrm{f}}}\boldsymbol{T}\cdot\delta\boldsymbol{u}\mathrm{d}S+\iint_{S_{\mathrm{w}}}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{n}\cdot\delta\boldsymbol{u}\mathrm{d}S\right\}\mathrm{d}t=0.\tag{28}$$

这就是流体力学中的虚功原理,由以上推导过程可以发现,无论材料的本构关系如何,虚功原理都成立.

将式(22)代入式(28),可得

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{\iiint_V\left[-\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\delta\boldsymbol{u}+\left(p+\frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\boldsymbol{v}\right)\boldsymbol{I}:\delta\nabla\boldsymbol{u}-\mu(\nabla\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\nabla):\delta\nabla\boldsymbol{u}+\boldsymbol{f}\cdot\delta\boldsymbol{u}\right]\mathrm{d}V+\iint_{S_\mathrm{f}}\boldsymbol{T}\cdot\delta\boldsymbol{u}\mathrm{d}S+\iint_{S_\mathrm{w}}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{n}\cdot\delta\boldsymbol{u}\mathrm{d}S\right\}\mathrm{d}t=0. \tag{29}$$

引入先决条件式(21)和式(24),可得

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{\iiint_V\left[-\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\delta\boldsymbol{u}+p\boldsymbol{I}:\delta\nabla\boldsymbol{u}-\mu(\nabla\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\nabla):\delta\nabla\boldsymbol{u}+\boldsymbol{f}\cdot\delta\boldsymbol{u}\right]\mathrm{d}V+\iint_{S_\mathrm{f}}\boldsymbol{T}\cdot\delta\boldsymbol{u}\mathrm{d}S\right\}\mathrm{d}t=0. \tag{30}$$

进行分部积分:

$$-\int_{t_0}^{t_1}\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\delta\boldsymbol{u}\mathrm{d}t=-\rho\boldsymbol{v}\cdot\delta\boldsymbol{u}\Big|_{t_0}^{t_1}+\int_{t_0}^{t_1}\rho\boldsymbol{v}\cdot\delta\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t. \tag{31}$$

如果除了黏性阻尼之外,认为体积力 $\boldsymbol{f}$ 和面积力 $\boldsymbol{T}$ 为非保守伴生力,将式(31)代入式(30),按惯例在时域边界 $t=t_0$ 和 $t=t_1$ 处取 $\delta\boldsymbol{u}$ 等于0,并且考虑到运动学关系式(23),上式可以变换为

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\left\{\iiint_V\left[\frac{1}{2}\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}+p\boldsymbol{I}:\nabla\boldsymbol{u}-\mu(\nabla\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\nabla):\nabla\boldsymbol{u}+\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{u}\right]\mathrm{d}V+\iint_{S_\mathrm{f}}\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{u}\mathrm{d}S\right\}\mathrm{d}t+\int_{t_0}^{t_1}\left\{\iiint_V[\nabla\boldsymbol{u}:\delta\mu(\nabla\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\nabla)-\boldsymbol{u}\cdot\delta\boldsymbol{f}]\mathrm{d}V-\iint_{S_\mathrm{f}}\boldsymbol{u}\cdot\delta\boldsymbol{T}\mathrm{d}S\right\}\mathrm{d}t=0. \tag{32}$$

上式可以进一步写为

$$\delta\Pi_1+\delta Q=0, \tag{33}$$

其中

$$\Pi_1=\int_{t_0}^{t_1}\left\{\iiint_V\left[\frac{1}{2}\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}+p\boldsymbol{I}:\nabla\boldsymbol{u}-\mu(\nabla\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\nabla):\nabla\boldsymbol{u}+\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{u}\right]\mathrm{d}V+\iint_{S_\mathrm{f}}\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{u}\mathrm{d}S\right\}\mathrm{d}t, \tag{34}$$

$$\delta Q=\int_{t_0}^{t_1}\left\{\iiint_V[\nabla\boldsymbol{u}:\delta\mu(\nabla\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\nabla)-\boldsymbol{u}\cdot\delta\boldsymbol{f}]\mathrm{d}V-\iint_{S_\mathrm{f}}\boldsymbol{u}\cdot\delta\boldsymbol{T}\mathrm{d}S\right\}\mathrm{d}t. \tag{35}$$

其先决条件为式(21)、(23)及式(24).

以下推导这个拟变分原理的拟驻值条件.

为此,将式(33)写成展开形式

$$\delta\Pi_1+\delta Q=\delta\int_{t_0}^{t_1}\left\{\iiint_V\left[\frac{1}{2}\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}+p\boldsymbol{I}:\nabla\boldsymbol{u}-\mu(\nabla\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\nabla):\nabla\boldsymbol{u}+\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{u}\right]\mathrm{d}V+\iint_{S_\mathrm{f}}\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{u}\mathrm{d}S\right\}\mathrm{d}t+\int_{t_0}^{t_1}\left\{\iiint_V[\nabla\boldsymbol{u}:\delta\mu(\nabla\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\nabla)-\boldsymbol{u}\cdot\delta\boldsymbol{f}]\mathrm{d}V-\iint_{S_\mathrm{f}}\boldsymbol{u}\cdot\delta\boldsymbol{T}\mathrm{d}S\right\}\mathrm{d}t=0. \tag{36}$$

考虑到运动学关系式(23),并且进行分部积分,可得

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\frac{1}{2}\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}t=\int_{t_0}^{t_1}\rho\boldsymbol{v}\cdot\delta\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=\rho\boldsymbol{v}\cdot\delta\boldsymbol{u}\Big|_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1}\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\delta\boldsymbol{u}\mathrm{d}t. \tag{37}$$

将式(37)代入式(36),并且按惯例在时域边界 $t=t_0$ 和 $t=t_1$ 处取 $\delta\boldsymbol{u}$ 等于0,式(36)可以变换为

$$\delta\Pi_1+\delta Q=\int_{t_0}^{t_1}\Big\{\iiint_V\Big[-\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\delta\boldsymbol{u}+p\boldsymbol{I}:\delta\nabla\boldsymbol{u}-\mu(\nabla\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\nabla):\delta\nabla\boldsymbol{u}+\boldsymbol{f}\cdot\delta\boldsymbol{u}\Big]\mathrm{d}V+\iint_{S_\mathrm{f}}\boldsymbol{T}\cdot\delta\boldsymbol{u}\mathrm{d}S\Big\}\mathrm{d}t=0. \tag{38}$$

采用加零变换法[12],将式(2)乘上 $(2/3)\mu\boldsymbol{I}:\delta\nabla\boldsymbol{v}$ 加入泛函式(38)中,可得

$$\delta\Pi_1+\delta Q=\int_{t_0}^{t_1}\Big\{\iiint_V\Big[-\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\delta\boldsymbol{u}+p\boldsymbol{I}:\delta\nabla\boldsymbol{u}+\frac{2}{3}\mu(\nabla\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{I}:\delta\nabla\boldsymbol{u}-\mu(\nabla\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\nabla):\delta\nabla\boldsymbol{u}+\boldsymbol{f}\cdot\delta\boldsymbol{u}\Big]\mathrm{d}V+\iint_{S_\mathrm{f}}\boldsymbol{T}\cdot\delta\boldsymbol{u}\mathrm{d}S\Big\}\mathrm{d}t=0. \tag{39}$$

应用 Green 定理

$$\begin{aligned}&\iiint_V\Big[\Big(p+\frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\boldsymbol{v}\Big)\boldsymbol{I}-\mu(\nabla\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\nabla)\Big]:\delta\nabla\boldsymbol{u}\mathrm{d}V=\\&\iint_{S_\mathrm{w}+S_\mathrm{f}}\Big[\Big(p+\frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\boldsymbol{v}\Big)\boldsymbol{I}-\mu(\nabla\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\nabla)\Big]\cdot\boldsymbol{n}\cdot\delta\boldsymbol{u}\mathrm{d}S-\\&\iiint_V\nabla\cdot\Big[\Big(p+\frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\boldsymbol{v}\Big)\boldsymbol{I}-\mu(\nabla\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\nabla)\Big]\cdot\delta\boldsymbol{u}\mathrm{d}V.\end{aligned} \tag{40}$$

将式(40)代入式(39),考虑到在位移边界 S_w 上 $\delta\boldsymbol{u}=0$, 可得

$$\begin{aligned}&\delta\Pi_1+\delta Q=\\&\int_{t_0}^{t_1}\Big\{\iiint_V\Big[-\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}-\nabla\cdot\Big(p+\frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\boldsymbol{v}\Big)\boldsymbol{I}+\nabla\cdot\mu(\nabla\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\nabla)+\boldsymbol{f}\Big]\cdot\delta\boldsymbol{u}\mathrm{d}V-\\&\iint_{S_\mathrm{f}}\Big[-\Big(p+\frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\boldsymbol{v}\Big)\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{n}+\mu(\nabla\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\nabla)\cdot\boldsymbol{n}-\boldsymbol{T}\Big]\cdot\delta\boldsymbol{u}\mathrm{d}S\Big\}\mathrm{d}t=0.\end{aligned} \tag{41}$$

由于 $\delta\boldsymbol{u}$ 的任意性,由式(41)可得

$$-\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}+\nabla\cdot\Big[-\Big(p+\frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\boldsymbol{v}\Big)\boldsymbol{I}+\mu(\nabla\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\nabla)\Big]+\boldsymbol{f}=\boldsymbol{0}, \tag{42}$$

$$-\Big(p+\frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\boldsymbol{v}\Big)\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{n}+\mu(\nabla\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\nabla)\cdot\boldsymbol{n}-\boldsymbol{T}=\boldsymbol{0}. \tag{43}$$

这就是不可压缩黏性流体力学的拟变分原理的拟驻值条件.可见,拟驻值条件和先决条件一起构成封闭的微分方程组

$$\begin{cases}-\rho\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}+\nabla\cdot\Big[-\Big(p+\dfrac{2}{3}\mu\nabla\cdot\boldsymbol{v}\Big)\boldsymbol{I}+\mu(\nabla\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\nabla)\Big]+\boldsymbol{f}=\boldsymbol{0},\\-\Big(p+\dfrac{2}{3}\mu\nabla\cdot\boldsymbol{v}\Big)\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{n}+\mu(\nabla\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\nabla)\cdot\boldsymbol{n}-\boldsymbol{T}=\boldsymbol{0},\\\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0,\\\boldsymbol{v}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t},\\\boldsymbol{u}=\bar{\boldsymbol{u}}\qquad(\text{on }S_\mathrm{w}).\end{cases} \tag{44}$$

应用对合变换[13],式(42)和式(43)可以变换为

$$-\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}+\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}+\boldsymbol{f}=\boldsymbol{0}, \tag{45}$$

$$\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{n}-\boldsymbol{T}=\boldsymbol{0}. \tag{46}$$

这便说明,式(42)和式(43)正是将应力表达式代入动力学方程和力学边界条件的结果.

将运动学条件 $\boldsymbol{v}=\mathrm{d}\boldsymbol{u}/\mathrm{d}t$ 代入功能型变分原理的泛函式(33)中, 可得一类变量的拟变分原理:

$$\delta\Pi_1+\delta Q=0, \tag{47}$$

其中

$$\begin{aligned}\Pi_1=\int_{t_0}^{t_1}\Bigg\{\iiint_V\Bigg[&\frac{1}{2}\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}+p\boldsymbol{I}:\nabla\boldsymbol{u}-\\&\mu\left(\nabla\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}\nabla\right):\nabla\boldsymbol{u}+\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{u}\Bigg]\mathrm{d}V+\iint_{S_\mathrm{f}}\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{u}\mathrm{d}S\Bigg\}\mathrm{d}t,\end{aligned} \tag{48}$$

$$\delta Q=\int_{t_0}^{t_1}\left\{\iiint_V\left[\nabla\boldsymbol{u}:\delta\mu\left(\nabla\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}\nabla\right)-\boldsymbol{u}\cdot\delta\boldsymbol{f}\right]\mathrm{d}V-\iint_{S_\mathrm{f}}\boldsymbol{u}\cdot\delta\boldsymbol{T}\mathrm{d}S\right\}\mathrm{d}t. \tag{49}$$

3　功率型变分原理在有限元素法中的应用

关于流体力学的数值建模和近似计算,一直是学术界关注的研究课题[12,14-17],对于流体力学变分原理及其有限元法研究的进展,文献[14]已经做了较为详细的论述,不赘述.

这里说明一下,为了书写简洁以及推导方便,以上采用实体张量书写.但是,在如下的有限元素法的研究中,采用指标张量书写更为方便.

文献[12]以弹性力学的变分原理和广义变分原理为例,研究了变分原理在有限元素法中的应用.本节将文献[12]的研究推广应用于不可压缩黏性流体力学中,研究功率型变分原理在有限元素法中的应用.

3.1　适用于有限元计算的流体力学功率型变分原理

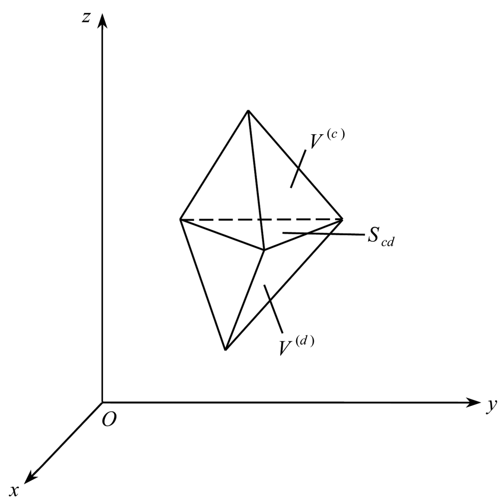

图 1　两个相邻的元素

Fig. 1　2 adjacent elements

假设将连续体划分为 N 个元素，各个元素的体积分别为 $V^{(1)},V^{(2)},\cdots,V^{(c)},V^{(d)},\cdots,V^{(N)}$；任意两个相邻的元素 c,d 之间的界面为 S_{cd}，有时用 S_{cd}^* 特指属于元素 c 的界面，用 S_{dc}^* 特指属于 d 元素的界面，如图 1 所示。

对于流体动力学的功率型变分原理，各个元素满足：

1）在元素中 $v_i^{(c)}$ 满足必要的连续条件；

2）在无际边界 S_{cd} 上

$$v_i^{(c)}=v_i^{(d)}; \tag{DQ}$$

3）在边界 S_w 上

$$v_i=\bar{v}_i. \tag{dq}$$

流体力学功率型变分原理可以表示为

$$\pi_1=\sum_{c=1}^{N}\left\{\iiint_{V(c)}\left[p\delta_{ij}v_{i,j}^{(c)}-\frac{1}{4}\mu(v_{i,j}^{(c)}+v_{j,i}^{(c)})(v_{i,j}^{(c)}+v_{j,i}^{(c)})+f_i^{(c)}v_i^{(c)}\right]\mathrm{d}V+\iint_{S_f^{(c)}}T_iv_i^{(c)}\mathrm{d}S-\pi_0\right\}. \tag{50}$$

按照钱伟长先生的论述

$$\delta\pi_0=\sum_{c=1}^{N}\left\{\iiint_{V(c)}\left[\rho\frac{\partial v_i^{(c)}}{\partial t}+\rho v_i^{(c)}v_{i,j}^{(c)}\right]\delta v_j^{(c)}\mathrm{d}V\right\}, \tag{51}$$

其先决条件为式(dq)和(DQ)。其中，ρ 是密度，为 0 阶张量（标量）；$v_i^{(c)}$ 为元素 c 中的速度矢量（1 阶张量）；$f_i^{(c)}$ 为元素 c 中的单位体积流体所受的体积力矢量；μ 为黏性系数标量；δ_{ij} 为 2 阶单位张量；n_j 为边界面的单位外法向矢量；p 为静水压强，为 0 阶张量（标量）；$v_{i,j}^{(c)}$ 中“,”表对 $v_i^{(c)}$ 求导；S_w 为速度边界面，$\bar{v}_i$ 为边界处的速度矢量；S_f 为力学边界面，T_i 为边界处的面力矢量。

这便是适于有限元计算的流体力学功率型变分原理，它提供了速度协调元模型。

3.2 修正的流体力学功率型变分原理

一般是应用 Lagrange 乘子法，将无际边界条件和边界条件纳入泛函中，通过对泛函求驻值，进而识别 Lagrange 乘子，即将 Lagrange 乘子用泛函中原有的变量来表示，然后将已经识别的 Lagrange 乘子代入泛函中，进而得到修正的变分原理。

应用 Lagrange 乘子法，引入 Lagrange 乘子，在元素 c 的界面上为 $\lambda_i^{(c)},\zeta_i^{(c)}$，若在元素 d 的界面上则为 $\lambda_i^{(d)},\zeta_i^{(d)}$，将式(DQ)和(dq)纳入泛函中，则修正的流体力学功率型变分原理表示为

$$\pi_{m1}=\pi_1+\sum_{c=1}^{N}\left[\iint_{S_{cd}}(v_i^{(c)}-v_i^{(d)})\lambda_i^{(c)}\mathrm{d}S+\iint_{S_w^{(c)}}(v_i^{(c)}-\bar{v}_i^{(c)})\zeta_i^{(c)}\mathrm{d}S\right]. \tag{52}$$

通过对泛函求驻值，经推导和整理可得

$$\begin{aligned}\delta\pi_{m1}=\sum_{c=1}^{N}\Big\{&\iiint_{V(c)}[\rho\dot{v}_i^{(c)}+p\delta_{ij,j}-\\&\mu(v_{i,j}^{(c)}+v_{j,i}^{(c)})_{,j}+f_i^{(c)}]\delta v_i^{(c)}\mathrm{d}V+\iint_{S_f}T_i\delta_{ij}n_j\delta v_i^{(c)}\mathrm{d}S-\\&\iint_{S_{cd}^*}[-p\delta_{ij}n_j^{(c)}+\mu(v_{i,j}^{(c)}+v_{j,i}^{(c)})n_j^{(c)}-\lambda_i^{(c)}]\delta v_i^{(c)}\mathrm{d}S-\\&\iint_{S_{dc}^*}[-p\delta_{ij}n_j^{(d)}+\mu(v_{i,j}^{(d)}+v_{j,i}^{(d)})n_j^{(d)}+\lambda_i^{(d)}]\delta v_i^{(d)}\mathrm{d}S-\\&\iint_{S_f^{(c)}}[-p\delta_{ij}n_j^{(c)}+\mu(v_{i,j}^{(c)}+v_{j.i}^{(c)})n_j^{(c)}-T_i]\delta v_i^{(c)}\mathrm{d}S-\end{aligned}$$

$$\iint_{S_w^{(c)}} [-p\delta_{ij}n_j^{(c)} + \mu(v_{i,j}^{(c)} + v_{j,i}^{(c)})n_j^{(c)} - \zeta_i^{(c)}]\delta v_i^{(c)}\mathrm{d}S +$$

$$\iint_{S_w^{(c)}} (v_i^{(c)} - \bar{v}_i^{(c)})\delta\zeta_i^{(c)}\mathrm{d}S + \iint_{S_{cd}} (v_i^{(c)} - v_i^{(d)})\delta\lambda_i^{(c)}\mathrm{d}S\Big\} = 0. \tag{53}$$

由式(53)解得(即识别 Lagrange 乘子)

$$\lambda_i^{(c)} = -p\delta_{ij}n_j^{(c)} + \mu(v_{i,j}^{(c)} + v_{j,i}^{(c)})n_j^{(c)}, \tag{54}$$

$$\lambda_i^{(d)} = p\delta_{ij}n_j^{(d)} - \mu(v_{i,j}^{(d)} + v_{j,i}^{(d)})n_j^{(d)}, \tag{55}$$

$$\zeta_i^{(c)} = -p\delta_{ij}n_j^{(c)} + \mu(v_{i,j}^{(c)} + v_{j,i}^{(c)})n_j^{(c)}. \tag{56}$$

将已经识别的 Lagrange 乘子式(54)和式(56)代入式(52),可得

$$\pi_{m1} = \sum_{c=1}^{N}\Big\{\iiint_{V(c)} [p\delta_{ij}v_{i,j}^{(c)} - \mu(v_{i,j}^{(c)} + v_{j,i}^{(c)})v_{i,j}^{(c)} +$$

$$f_i^{(c)}v_i^{(c)}]\mathrm{d}V + \iint_{S_f^{(c)}} T_i v_i^{(c)}\mathrm{d}S + \pi_0 +$$

$$\iint_{S_{cd}} [-p\delta_{ij}n_j^{(c)} + \mu(v_{i,j}^{(c)} + v_{j,i}^{(c)})]n_j^{(c)}(v_i^{(c)} - v_i^{(d)})\mathrm{d}S +$$

$$\iint_{S_w^{(c)}} [-p\delta_{ij}n_j^{(c)} + \mu(v_{i,j}^{(c)} + v_{j,i}^{(c)})]n_j^{(c)}(v_i^{(c)} - \bar{v}_i^{(c)})\mathrm{d}S\Big\}, \tag{57}$$

$$\delta\pi_0 = \sum_{c=1}^{N}\left\{\iiint_{V(c)}\left[\rho\frac{\partial v_i^{(c)}}{\partial t} + \rho v_i^{(c)}v_{i,j}^{(c)}\right]\cdot\delta v_j^{(c)}\mathrm{d}V\right\}. \tag{58}$$

这就是修正的流体力学功率型变分原理,它提供了速度杂交元模型.

所谓速度杂交是指,在无际边界 S_{cd} 上,放松了对条件(DQ)的要求,即原来要求精确满足无际边界条件(DQ),现在只要求近似满足无际边界条件(DQ).

4 功率型变分原理的特点

我国学术界对功能型变分原理进行了充分的研究[18-20],不赘述.以下,尝试性地说明功率型变分原理的特点.

比较以上两种类型的变分原理的研究可看出:

1) 在研究流体力学的单场问题中, 推导功能型拟变分原理时出现时域中的变换式(31)和式(37), 这种现象在功率型变分理的推导中不出现.在研究多场耦合的问题时, 这种差别就会更多地出现.这便说明, 在建立功率型变分原理的过程中, 可以省略在时域空间中的一些变换.

2) 在不可压缩黏性流体力学问题中,由于黏性的存在,将会引起能量的耗散,很明显的是非保守系统的力学问题.文献[5]在应用功率型变分原理研究黏性流体力学时,巧妙地引入 π_0 的举措,使得人们可以将保守和非保守系统的力学问题按照统一的模式处理.

3) 如前所述,功率型变分原理的理论基础是 Jourdain 原理,功能型变分原理的理论基础是 d' Alembert 原理,如所周知,Jourdain 原理和 d' Alembert 原理都是力学基本原理,这便说明功率型变分原理和功能型拟变分原理都是以力学基本原理为依据的,都是正确的.

4) 变分原理作为有限元素法和其它近似计算方法的理论基础,随着高速数字电子计算机的发展,越来越受到学术界的重视.文献[12]以弹性力学的变分原理和广义变分原理为例,详细阐述了建立有限元素法的协调元、杂交元和混合元的原理,提出了无际边界的概念,所谓无际边界是指,本来这里并没有边界,而是人为地划分出来的边界.

本文第 3 节,将文献[12]论述的协调元和杂交元的理论推广应用于不可压缩黏性流体力学中,进而说明功率型变分原理在有限元素法中应用的特点.

在第 3 节中,应用功率型变分原理进行数值建模,成功地应用泛函式(11)建立了速度协调元和杂交元模型,由于该泛函的基本变量是速度,在进行数值计算时,求得的结果是用数值表达的速度场,这是比较方便的.

另一方面,如果应用功能型拟变分原理来进行数值建模,可以应用泛函式(48)建立位移协调元和杂交元模型.由于该泛函的变量是位移,在进行数值计算时,求得的结果是用数值表达的位移场,而流体力学中一般希望得到数值的速度场,可以想见,数值表达的位移场转换为数值表达的速度场是不方便的.我们发现泛函式(34)中包含速度和位移两类变量,是否可以应用泛函式(34)进行数值建模,进而求得数值的速度场和位移场呢? 回答是否定的:泛函式(34)中虽然包含速度和位移两类变量,但是,其基本变量是位移,速度变量是受到速度-位移关系式约束的.因此,应用泛函式(34)进行数值建模,不能同时求得用数值表达的速度场和位移场.这就是本文不再详细研究功能型拟变分原理在有限元素法中的应用的原因.

总之,本文作者的长期研究表明,功率型变分原理直接在状态空间中研究问题,不仅在建立变分原理的过程中可以省略在时域空间中的一些变换,而且给动力学问题的数值建模带来方便.特别是在流体动力学中,广泛地采用 Euler(欧拉)方法[21-22],建立功率型变分原理比较方便.功率型变分原理有着广阔的研究前景,这就是本文作者致力于应用和推广功率型变分原理的原因.

参考文献(References):

[1] 程昌钧. 钱伟长先生对力学和应用数学的贡献[J]. 力学进展, 2010, **40**(9): 480-494.(CHENG Chang-jun. Mr QIAN Wei-chang's contribution to the mechanics and applied mathematics[J]. *Advances in Mechanics*, 2010, **40**(9): 480-494.(in Chinese))

[2] Reissner E. On a variational theorem in elasticity[J]. *Journal of Mathematics and Physics*, 1950, **29**(2): 90-98.

[3] Washizu K. *Variational Method in Elasticity and Plastisity*[M]. New York: Pergamon Press, 1982.

[4] Pian Theodore H H. Derivation of element stiffness matrices by assumed stress distributions [J]. *AIAA Journal*, 1964, **2**(7): 1333-1336.

[5] 钱伟长. 粘性流体力学的变分原理和广义变分原理[J]. 应用数学和力学, 1984, **5**(3): 305-322. (CHIEN Wei-zang. Variational principles and generalized variational principles in hydrodynamics of viscous fluids[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1984, **5**(3): 305-322.(in Chinese))

[6] HU Hai-chang. On some variational principles in the theory of elasticity and the theory of plasticity[J]. *Scientia Sinica*, 1955, **4**(1): 33-42.

[7] 梁立孚, 石志飞. 关于变分学中逆问题的研究[J]. 应用数学和力学, 1994, **15**(9): 775-788.(LIANG Li-fu, SHI Zhi-fei. On the inverse problem in calculus of variations[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1994, **15**(9): 775-788.(in Chinese))

[8] 梁立孚, 石志飞. 粘性流体力学的变分原理及其广义变分原理[J]. 应用力学学报, 1993, **10**(1): 119-123.(LIANG Li-fu, SHI Zhi-fei. Quasi-variational principles of incompressible viscous fluids[J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 1993, **10**(1): 119-123.(in Chinese))

[9] 郝名望, 梁立孚, 叶正寅. 不可压粘性流体力学的边值问题的拟变分原理及其广义拟变分原理

[J]. 空气动力学学报, 2010, **28**(3): 297-301.(HAO Ming-wang, LIANG Li-fu, YE Zheng-yin. Quasi-variational principle and general quasi-variational principle for incompressible flow boundary value problems[J]. *Acta Aerodynamica Sinica*, 2010, **28**(3): 297-301.(in Chinese))

[10] 郝名望, 梁立孚, 叶正寅. 不可压粘性流体力学初值问题的拟变分原理及广义变分原理[J]. 空气动力学学报, 2011, **29**(3): 317-324.(HAO Ming-wang, LIANG Li-fu, YE Zheng-yin. Quasi-variational principle and general quasi-variational principle for incompressible flow initial value problems[J]. *Acta Aerodynamica Sinica*, 2011, **29**(3): 317-324.(in Chinese))

[11] 陈波, 李孝伟, 刘高联. 一个关于流动能量耗散率的 minimax 变分原理[J]. 应用数学和力学, 2010, **31**(7): 772-780.(CHEN Bo, LI Xiao-wei, LIU Gao-lian. Minimax principle on energy dissipation of incompressible shear flow[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2010, **31**(7): 772-780.(in Chinese))

[12] 钱伟长. 广义变分原理[M]. 上海: 知识出版社, 1985.(CHIEN Wei-zang. *Generalized Variational Principles*[M]. Shanghai: Affairs Press, 1985.(in Chinese))

[13] 钱伟长. 对合变换和薄板弯曲问题的多变量变分原理[J]. 应用数学和力学, 1985, **6**(1): 25-40.(CHIEN Wei-zang. Involutory transformations and variational principles with multivariables in thin plate bending problems[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1985, **6**(1): 25-40.(in Chinese))

[14] 刘高联. 流体力学变分原理及其有限元法研究的进展[J]. 上海力学, 1989, **10**(3): 73-80.(LIU Gao-lian. The progress of fluid mechanics variational principles and finite element method[J]. *Shanghai Mechanical*, 1989, **10**(3): 73-80.(in Chinese))

[15] 沈孝明. 粘性流体动力学的混合协调元和混合杂交非协调元变分法[J]. 应用数学和力学, 1992, **15**(6): 529-537.(SHEN Xiao-ming. Hybrid coordinate elements and the hybrid coordinate elements variational method of viscous fluid dynamics[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1992, **15**(6): 529-537.(in Chinese))

[16] 罗振东, 朱江. 定常的 Navier-Stokes 方程的非线性 Galerkin 混合元法及其后验估计[J]. 应用数学和力学, 2002, **23**(10): 1061-1072.(LUO Zhen-dong, ZHU Jiang. A nonlinear Galerkin mixed element method and a posteriori error estimator for the stationary Navier-Stokes equations[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2002, **23**(10): 1061-1072.(in Chinese))

[17] 余云龙, 林忠, 王瑞利, 刘全, 陈星玎. 辐射流体力学 Lagrange 方程组一类人为解构造方法[J]. 应用数学和力学, 2015, **36**(1): 110-118.(YU Yun-long, LIN Zhong, WANG Rui-li, LIU Quan, CHEN Xing-ding. A method of manufacturing solutions for verification of Lagrangian radiation hydrodynamic codes[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, **36**(1): 110-118.(in Chinese))

[18] 钱伟长. 变分法及有限元[M]. 北京: 科学出版社, 1980.(CHIEN Wei-zang. *Variational Method and Finite Element Method*[M]. Beijing: Science Press, 1980.(in Chinese))

[19] HU Hai-chang. *Variational Principles of Theory of Elasticity With Applications*[M]. Beijing: Science Press; New York: Gordon and Breach, Science Publishers Inc, 1984.

[20] 梁立孚, 宋海燕, 樊涛, 刘宗民. 非保守系统的拟变分原理及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2015.(LIANG Li-fu, SONG Hai-yan, FAN Tao, LIU Zong-min. *Quasi-Variational Principles of Non-Conservative Systems With Applications*[M]. Beijing: Science Press, 2015.(in Chinese))

[21] 吴望一. 流体力学[M]. 北京: 北京大学出版社, 2004.(WU Wang-yi. *Fluid Mechanics*[M]. Beijing: Peking University Press, 2004.(in Chinese))

[22] Acheson D J. *Elementary Fluid Dynamics*[M]. New York: Oxford University Press Inc, 2009.

Power Type Variational Principles and Work-Energy Type Quasi-Variational Principles and Their Applications

FENG Xiao-jiu[1], LIANG Li-fu[2]

(1. *School of Environmental and Safety Engineering*, *Changzhou University*, *Changzhou*, *Jiangsu* 213164, *P.R.China*;
2. *Harbin Engineering University*, *Harbin* 150001, *P.R.China*)

Abstract: Since the power type variational principle was established by CHIEN Wei-zang, the differences and relations between the power type variational principles and the work-energy type quasi-variational principles in theory and practice have been a hot topic in the academic circle. According to the Jourdain principle and the d'Alembert principle, the power type variational principles and the work-energy type quasi-variational principles were established for the incompressible viscous flow in liquid-filled systems with the variational integral operation method, so as to deduce their stationary condition and quasi-stationary condition, respectively. The applications of the power type variational principles and the work-energy type quasi-variational principles in the finite element method were studied. It shows that the work-energy type quasi-variational principles coincide with the d'Alembert principle and the power type variational principles do with the Jourdain principle. The power type variational principles directly work in the state space so that they not only omit some transforms in the time space during the building of the related variational principles, but also make it convenient to build numerical models for dynamic problems.

Key words: incompressible viscous fluid; Jourdain principle; d'Alembert principle; power type variational principle; work-energy type quasi-variational principle; variational integral operation

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(10272034)