

水波的界带有限元*

吴 锋, 钟万勰

(工业装备结构分析国家重点实验室(大连理工大学), 辽宁 大连 116023)

(本刊编委钟万勰来稿)

摘要: 研究了水波计算的位移法,采用物质坐标,以位移为基本未知量,考虑小变形条件,引入流函数满足不可压缩条件,于是,分析力学的变分原理可以运用了,界带有限元、正则变换、保辛积分等有效手段可使数值求解方便得多。

关键词: 水波; 位移法; 界带有限元

中图分类号: O353.2 **文献标志码:** A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2015.12.001

引 言

流体力学方程,一般是在空间 Euler 坐标下描述的;也有 Lagrange 坐标下的描述^[1]。其实,各有优点,Euler 坐标已占主流,主要的程序系统绝大多数是采用 Euler 坐标描述的,Lagrange 坐标描述的体系,已经很少提到了。

然而,孤立浅水波也可在 Lagrange 坐标下求解^[2-3]。不过当水深 h 比较大时,KdV 方程的基本假定不可用^[4-5],此时的数值求解方法也应深入研究,一般总是在 Euler 坐标下表述,本文考虑在 Lagrange 坐标下进行求解,简单些,考虑二维水波问题。

对在 Euler 坐标下的水波,文献[4]第7章指出, $A/h \ll 1$ 的要求对于许多海岸问题往往不能满足,这带来了许多问题,从而有 Zakharov 等推导了非线性 Schrödinger 方程来求解(见文献[4]),对非线性 Schrödinger 方程的数值求解,有许多文章按几何数值积分(geometric numerical integration)^[6]进行,本文将从位移法角度分析。

固体力学通常是在 Lagrange 坐标下求解的,文献[7-8]给出了求解不可压缩固体材料的界带有限元法,并进行了初步研究,水也是不可压缩的,其差别在于固体总有变形能产生能量,而水是没有变形能的;不过孤立波是水动力学问题,需要对时间积分,对此,考虑二维水波问题采用流函数简单些,以往假定单层水的浅水波的速度分布与 z 无关;现在考虑对于多层水有限元分析,与 z 无关的假定不再成立。

1 位移法 Lagrange 坐标

考虑如图 1 所示一个深为 H ,长为 L 的水池,其中虚线是水面,实线表示水面静止时的形

* 收稿日期: 2015-09-01; 修订日期: 2015-10-11

基金项目: 国家自然科学基金(面上项目)(11472067)

作者简介: 吴锋(1985—),男,江苏靖江人,博士(通讯作者, E-mail: wufeng_chn@163.com);

钟万勰(1934—),男,浙江德清人,教授,院士(E-mail: zwoffice@dlut.edu.cn)。

状.静止时水中各个质点的坐标为 (x_0, z_0) .

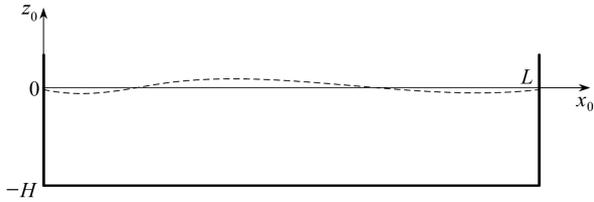


图 1 水池

Fig. 1 The pool

利用位移法分析水波动力问题,需要建立系统的 Lagrange 函数.根据动力学 Lagrange 体系,水波动时的基本未知量用水的质点位移来描述.本文仅考虑二维水波问题,假定在 y_0 方向没有位移,则时间 t 的位置可表示为

$$x(x_0, z_0, t) = x_0 + q_x(x_0, z_0, t), \quad z(x_0, z_0, t) = z_0 + q_z(x_0, z_0, t), \quad (1)$$

其中 q_x, q_z 分别代表质点在 x_0, z_0 方向的位移.而速度就是 $\dot{q}_x(x_0, z_0, t), \dot{q}_z(x_0, z_0, t)$, 字母上面一点代表对时间的偏微商,是大位移问题.在小变形大位移的框架下,水变形的不可压缩条件可表达为

$$\partial q_x(x_0, z_0, t) / \partial x_0 + \partial q_z(x_0, z_0, t) / \partial z_0 = 0. \quad (2)$$

两个方向的位移要求满足上式,为此可引入流函数 $\psi(x_0, z_0, t)$, 使得

$$\begin{cases} q_x(x_0, z_0, t) = \partial \psi(x_0, z_0, t) / \partial z_0, \\ q_z(x_0, z_0, t) = -\partial \psi(x_0, z_0, t) / \partial x_0. \end{cases} \quad (3)$$

这样,速度就是

$$\begin{cases} \dot{q}_x(x_0, z_0, t) = \partial \dot{\psi}(x_0, z_0, t) / \partial z_0, \\ \dot{q}_z(x_0, z_0, t) = -\partial \dot{\psi}(x_0, z_0, t) / \partial x_0. \end{cases} \quad (4)$$

根据上式,速度也用流函数表达了.根据速度即可计算动能,假定 y_0 方向取单位长度,动能为

$$T = \int_0^L \int_{-H}^0 \frac{1}{2} \rho (\dot{\psi}_z^2 + \dot{\psi}_x^2) dz_0 dx_0. \quad (5)$$

势能其实就是重力产生的,只要有了位移,计算是不困难的.假设变形后的水面为 $\eta(x, t)$, 可表示为

$$\eta(x) = q_z(x_0, 0, t) = -\psi_{x_0}(x_0, 0, t). \quad (6)$$

根据文献[3],则势能可表示为

$$U = \int_0^L \frac{\rho g}{2} [\psi_{x_0}^2(x_0, 0, t) - H^2] \left(1 + \frac{\partial q_x(x_0, 0, t)}{\partial x_0} \right) dx_0. \quad (7)$$

根据动能和势能,就可以建立 Lagrange 函数.在时间 $[0, t]$ 内的作用量为

$$S = \int_0^t \int_0^L \int_{-H}^0 \frac{1}{2} \rho (\dot{\psi}_z^2 + \dot{\psi}_x^2) dz_0 dx_0 dt - \int_0^t \int_0^L \frac{\rho g}{2} [\psi_{x_0}^2(x_0, 0, t) - H^2] \left(1 + \frac{\partial^2 \psi(x_0, 0, t)}{\partial z_0 \partial x_0} \right) dx_0 dt. \quad (8)$$

根据最小作用量原理,利用 Hamilton 变分,便可推导出一组非线性的微分方程组.但该非线性微分方程组,即便是利用辛 Lie 群、辛几何等工具,也难以分析求解,而且工程师很难接受

高深理论.如果离散分析,在 Hamilton 体系下,时间坐标均可以采用时间有限元离散,从而进入辛代数^[8-9]的思路进行推导,辛 Lie 群变换到传递辛矩阵群,就变得简单,也易于为工程师接受.水波分析的质点空间坐标描述的是连续介质,无穷多未知数,比有限未知数的情况复杂得多.但可以先在空间坐标内用有限元离散,变成有限未知数的动力学问题,然后进入分析动力学的轨道.这样就可利用成熟的经典力学的成果,进行数值计算.

2 界带有限元离散

仍以图 1 所示 (x_0, z_0) 平面的正规长方形水池为例进行分析.由于被离散的函数是流函数 $\psi(x_0, z_0, t)$,流函数本身没有物理意义,但其偏微商是位移,需要数值微商,因此在水深方向离散最起码应当有 2 层.底层是 $z_0 = -H$,而上层是 $z_0 = 0$ 的水面.因为位移是流函数 $\psi(x_0, z_0, t)$ 的一阶偏导,因此 $\psi(x_0, z_0, t)$ 可任意加 1 个常数,所以可选择在 $(x_0 = 0, z_0 = -H)$ 处 $\psi(0, z_0 = -H, t) = 0$,这样一来边界条件就十分容易.在水底层,垂直位移为 0,即 $\partial\psi(x_0, z_0 = -H, t)/\partial x_0 = 0$,积分有 $\psi(x_0, z_0 = -H, t) = 0$,同理可推得在左右两边 $\psi(0, z_0, t) = \psi(L, z_0, t) = 0$,因此只有在水面是未知函数.

因为流函数本身没有物理意义,但其偏导则代表了位移,这意味着对流函数近似的形函数必须高阶可导,如果采用传统的有限单元,形函数高阶可导往往意味着在单元上增加节点个数,这会导致自由度数目的增加.

毕竟,流函数不是直接的物理量,要关注的是位移.位移应当是连续的,这要求 $\psi(x_0, z_0, t)$ 的有限元法插值函数至少是 2 次以上多项式.文献[7]对于不可压缩材料分析给出的界带有限元理论正好可用于当前情况.与传统有限单元不同在于,界带有限单元在构造高阶可导的形函数时,不是在单元内部增加节点,而是借助了周边单元的节点,从而生成高阶可导的形函数.

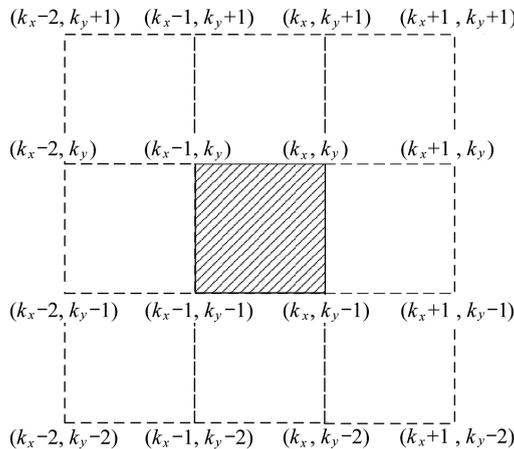


图 2 16 节点界带单元

Fig. 2 A rectangular inter-belt element with 16 nodes

图 2 所示为 16 节点的矩形界带单元,其中,实线所围阴影部分为单元本体,虚线所围为单元的界带.当在本体单元上构造高阶可导形函数时,向外层拓展的 12 个点,联合单元本体的 4 个节点,共 16 个节点值,此时流函数可以直接通过 Lagrange 多项式插值.

$$\psi(x_0, z_0) = \sum_{i=k_x-2}^{k_x+1} \sum_{j=k_y-2}^{k_y+1} L_i(x_0) L_j(z_0) \psi_{ij}, \quad (9)$$

式中, $L_i(x_0), L_j(z_0)$ 分别为 x_0 和 z_0 方向的 Lagrange 多项式, ψ_{ij} 为相应节点的流函数值. 当采用界带有限单元离散时, 流函数可以写成

$$\psi(x_0, z_0) = \mathbf{N}^T(x_0, z_0) \mathbf{a}, \quad (10)$$

其中 $\mathbf{N}(x_0, z_0)$ 表示形函数向量, \mathbf{a} 表示流函数在各节点的值. 把式(10)代入式(8), 并进行变分, 则有

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{K}\mathbf{a} + \mathbf{F}(\mathbf{a}) = \mathbf{0}, \quad (11)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{M} &= \int_0^L \int_{-H}^0 \rho (N_z N_z^T + N_x N_x^T) dz_0 dx_0, \\ \mathbf{K} &= \int_0^L \rho g N_x(x_0, 0) N_x^T(x_0, 0) dx, \\ \mathbf{F}(\mathbf{a}) &= \int_0^L \rho g N_x(x_0, 0) N_x^T(x_0, 0) [N_{xz}^T(x_0, 0) \mathbf{a}] dx_0 \mathbf{a} + \\ &\quad \int_0^L \frac{\rho g}{2} N_{xz}(x_0, 0) [\mathbf{a}^T N_x(x_0, 0) N_x^T(x_0, 0) \mathbf{a} - H^2] dx_0, \end{aligned} \right. \quad (12)$$

其中, \mathbf{M} 是离散的质量矩阵, \mathbf{K} 是线性刚度矩阵, $\mathbf{F}(\mathbf{a})$ 是非线性恢复力, 当水位移较小时, 非线性恢复力 $\mathbf{F}(\mathbf{a})$ 可以忽略, 此时方程便退化为线性动力方程. 实际上, 质量也可采用振动理论的有限元方法中的集中质量法, 全部质量分布集中在各个节点上, 计算无需对全域积分, 如果采用集中质量矩阵, 则动能可表达为

$$\left\{ \begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i [\dot{q}_{x,i}^2 + \dot{q}_{z,i}^2] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i [\dot{\psi}_{z,i}^2 + \dot{\psi}_{x,i}^2] = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{a}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{a}}, \\ \mathbf{M} &= \sum_{i=1}^N m_i [N_{z,i} N_{z,i}^T + N_{x,i} N_{x,i}^T], \end{aligned} \right. \quad (13)$$

其中 m_i 表示第 i 个节点的质量, $\dot{q}_{x,i}, \dot{q}_{z,i}$ 分别表示第 i 个节点在 x_0 和 z_0 方向的位移, $N_{x,i}, N_{z,i}$ 分别表示第 i 个节点的形函数对 x_0 和 z_0 的偏导数. 对于式(11)的求解, 还需要考虑保辛要求, 需采用保辛算法积分^[3,9-11].

水波分析, 很重要的是水面. 从拓扑学知, 没有破碎的连续体, 在开始时处于水面的点, 以后总也处于水面, 这便是自由水面的运动学条件. 各个水面点有自己的运动轨迹, 而水面形状则是这些点的轨迹的包络线, 也即水波. 所以轨迹与水波形状不是同一回事. 它们是相关的, 即是包络线的关系. 水波可传播到无穷远处, 而质点则总在初始位置附近转圈子. 自由水面的运动学条件在采用 Euler 法描述时, 十分复杂, 涉及到微分方程, 还需要把水面包络线看做是一个单独的未知函数. 而在 Lagrange 法描述下则相对简单, 用位移法直接积分, 是从动力学的角度出发, 有限元法积分可直接得到各个节点的位移, 而水面形状则不过就是各水面点轨道的包络线而已, 无需放在求解的未知函数之中, 因此基于 Lagrange 法描述的水波动力学问题结合有限元分析很有发展潜力.

3 数值算例

本文方法是在文献[2]基础上的深化研究. 文献[2]考虑的浅水波问题, 浅水波假定水的位移与竖向坐标无关, 本文在小变形假定下, 考虑水的位移与竖向坐标相关. 虽然本文采用位移处理水波问题, 且考虑水底不规则, 没有解析解可以比较, 但是考虑到是小变形假定, 因此也可用于线性深水域的计算, 而线性问题是有解的, 因此本文首先通过考察一个关于水箱内水的自由晃动问题的计算, 来验证本文界带有限元的可靠性. 本文第 2 个算例分析一个浅水波动问

题,分析两种不同水底形状,一种为平面规则水底,第二种为不规则水底.由于基于位移法采用有限元计算,对于不规则水底的模拟很方便.

3.1 算例 1

考虑矩形水箱中,水面的自由晃动,分析水面的晃动频率.矩形水域的高度为 $H = 3 \text{ m}$,长度为 $L = 6 \text{ m}$ 和 60 m 两种,第一种为深水水箱,第二种则可以看做是浅水水箱.重力加速度为 $g = 10 \text{ m/s}^2$.根据 Euler 坐标描述的流体力学方程,可以得到线性情况下,矩形域水面自由晃动的自由频率解析表达式:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g\lambda_n(e^{\lambda_n H} - e^{-\lambda_n H})}{(e^{\lambda_n H} + e^{-\lambda_n H})}}, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{L}. \quad (14)$$

对于浅水晃动问题,按文献[2]中基于位移法推导的线性浅水波方程,也可以给出晃动的自由频率为

$$\omega_n = \sqrt{gH} \frac{n\pi}{L}. \quad (15)$$

采用本文界带有限元计算,分别采用不同网格计算,得到的前 5 阶频率以及采用基于位移法线性浅水波方程计算的前 5 阶频率和采用 Euler 坐标描述的线性流体力学方程计算的前 5 阶频率的计算结果列于表 1.

表 1 前 5 阶频率及相对误差
Table 1 The first 5 frequencies and relative errors

	$L = 6 \text{ m}$				$L = 60 \text{ m}$				
	8×16	16×32	eq.(15)	eq.(14)	3×120	12×480	eq.(15)	eq.(14)	
frequency	1	2.215 1	2.207 7	2.867 9	2.191 4	0.145 5	0.144 1	0.143 4	0.143 2
	2	3.241 3	3.259 1	5.735 7	3.230 0	0.289 9	0.287 4	0.286 8	0.285 6
	3	3.905 3	3.992 3	8.603 6	3.963 0	0.432 5	0.428 9	0.430 2	0.426 3
	4	4.372 6	4.589 4	11.471 5	4.576 4	0.572 3	0.568 0	0.573 6	0.564 4
	5	4.599 0	5.094 5	14.339 3	5.116 6	0.708 5	0.703 9	0.717 0	0.699 4
$\omega_n / (\text{rad/s})$	relative error $E_r / \%$								
	1	1.08	0.74	-	-	1.54	0.62	-	-
	2	0.35	0.90	-	-	1.51	0.63	-	-
	3	1.46	0.74	-	-	1.46	0.63	-	-
	4	4.45	0.28	-	-	1.39	0.63	-	-
	5	10.12	0.43	-	-	1.30	0.64	-	-

表 1 中最后 5 行是计算到的前 5 阶自振频率的相对误差,其中参考解取式(14)的计算值.由表 1 可见,无论是深水池,还是浅水池,当网格趋密时,界带有限元的解均收敛到解析解.同时注意到,在浅水池中,按文献[2]中基于位移法推导的线性浅水波方程计算得到的自由振动频率,与本文界带有限元计算得到的振动频率,以及采用 Euler 坐标理论计算得到的自由振动频率互相吻合,这也证明基于位移法分析水波是合理的.

3.2 算例 2

考虑浅水波传播问题.分别考虑两种不同水池.水池 1 为矩形浅水池,深度为 $H = 3 \text{ m}$,长度为 $L = 200 \text{ m}$;水池 2 的浅水池长度也是 $L = 200 \text{ m}$,但水的深度是变化的,可以表达为

$$H(x) = \begin{cases} 1.5 \text{ m}, & 0 \text{ m} \leq x < 150 \text{ m}, \\ x/100, & 150 \text{ m} \leq x < 300 \text{ m}, \\ 3 \text{ m}, & 300 \text{ m} \leq x \leq 600 \text{ m}. \end{cases} \quad (16)$$

在初始时刻,认为初始速度为 0,初始时刻的位移分布必须满足边界条件,同时还需要满足体积不变.静水状态下, y_0 方向取单位长度,水的体积为 $\int_0^L H(x) dx$. 如果假设初始时刻,水面形状为 $\eta(x)$, 则体积为 $\int_0^L \eta(x) dx = 0$. 现假定初始时刻的水面表达式(参见图 3)为

$$\eta(x, 0) = a \operatorname{sech}^2\left(\frac{aL}{2} - ax\right) - \frac{2}{L} \tanh\left(\frac{aL}{2}\right), \quad a = 0.05. \quad (17)$$

可以验证,上式满足体积不变要求.根据水面表达式,还需要进一步构造水中各质点的初始位移,由于本文引入流函数来表示位移,因此构造满足边界位移和水面表达式的初始流函数.首先对水底平坦情况,构造流函数,需要满足

$$\psi(0, z, 0) = \psi(L, z, 0) = \psi(x, -H, 0) = 0 \quad (18)$$

和

$$\psi_x(x, 0, 0) = -\eta(x). \quad (19)$$

根据上式可知

$$\psi(x, 0, 0) = -\int_0^x \eta(x) dx = \frac{2x \tanh(0.5aL)}{L} - \tanh\left(ax - \frac{aL}{2}\right) - \tanh\left(\frac{aL}{2}\right). \quad (20)$$

进一步选择流函数在竖向为线性分布,因此初始时刻流函数可以取:

$$\psi(x, z, 0) = \left[\frac{z + H(x)}{H(x)} \right] \left[\frac{2x \tanh(0.5aL)}{L} - \tanh\left(ax - \frac{aL}{2}\right) - \tanh\left(\frac{aL}{2}\right) \right], \quad (21)$$

显然上式构造的流函数满足体积不变条件和位移边界条件.

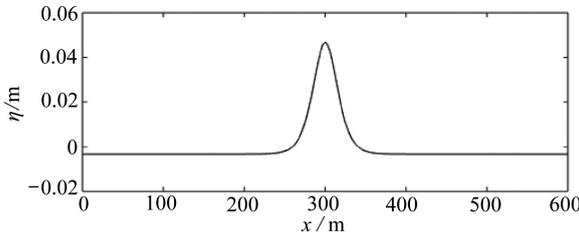
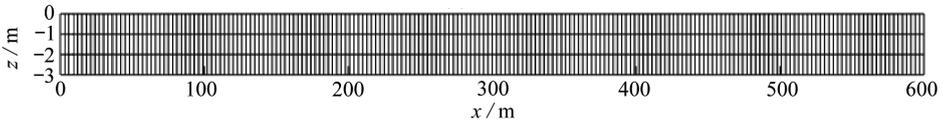


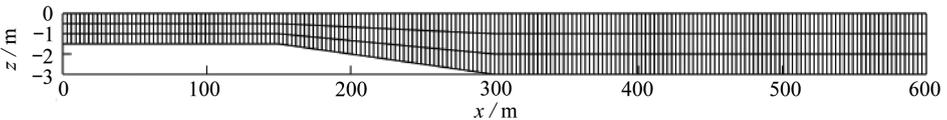
图 3 $t = 0$ 时的水面

Fig. 3 Water surface at $t = 0$



(a) 水池 1

(a) Pool 1



(b) 水池 2

(b) Pool 2

图 4 界带有限元模型网格

Fig. 4 The inter-belt finite element model meshes

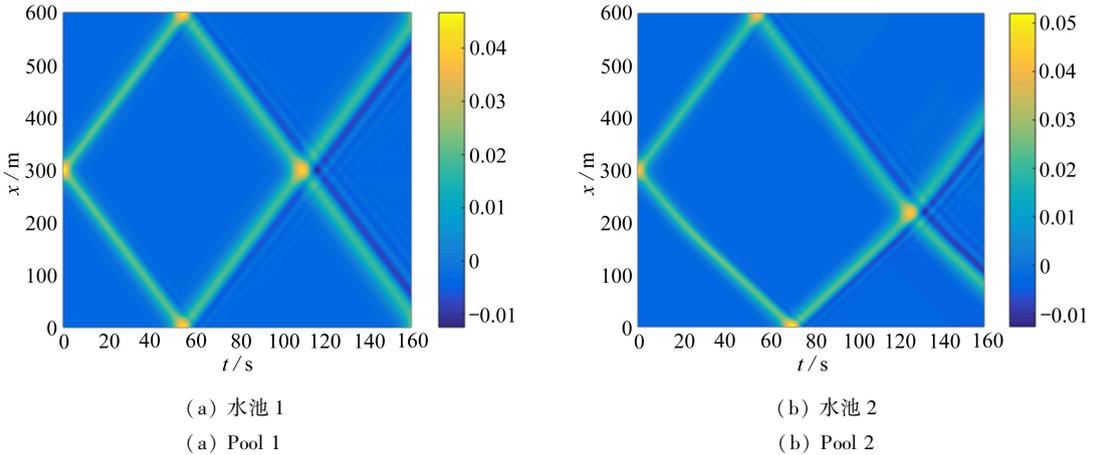


图 5 水面变形云图

Fig. 5 Water surface deformation nephogram

界带有限元网格剖分如图 4 所示,采用保辛算法积分,积分步长为 0.2 s ,积分区间为 $[0, 160]\text{ s}$,计算结果如图 5~7 所示。

图 5 描述的是水面变形随时间的演化云图,其中左图对应于水池 1,也即水底规则水池;右图对应于水池 2,水底不规则。由图 5 可见,对于水池 1,水底规则,左右对称,波向左右两边对称传播,而水池 2 的左边比右边浅,因此波向左传播速度要慢于向右传播的速度。

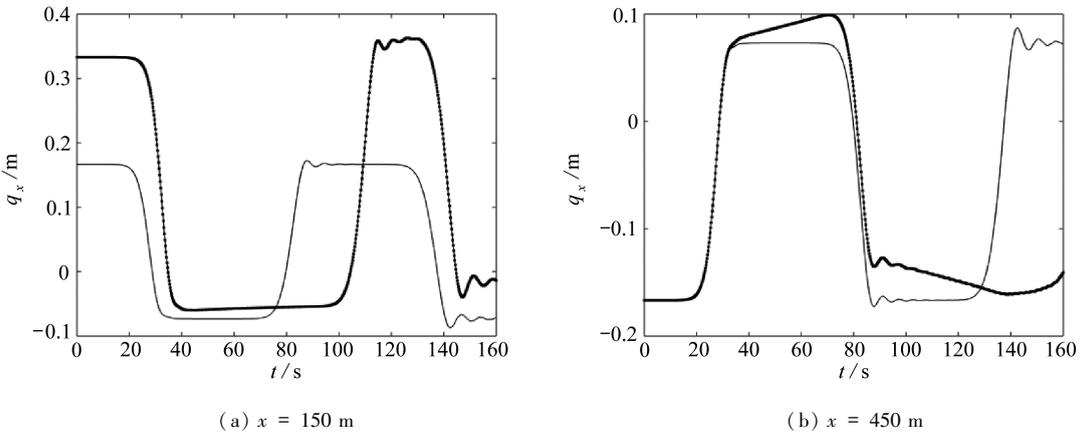


图 6 水面不同质点的水平位移响应(水池 1 为实线,水池 2 为点线)

Fig. 6 The horizontal displacements at 2 different points(pool 1, solid line; pool 2, dotted line)

图 6(a)和(b)分别绘制了水面两个不同位置处质点的水平位移响应。这两个位置分别是 $x = 150\text{ m}$ 和 $x = 450\text{ m}$,两点关于水池中点 $x = 300\text{ m}$ 对称。图 6(a)表明,两个水池在 $x = 150\text{ m}$ 处水面的水平位移在初始时刻即不相同,这是由于两者水底高度不同所致;水池 2 的水底高度只有水池 1 的水底高度一半,因此初始时刻水池 2 的水平位移几乎是水池 1 的水平位移的一倍。在最初一段时间内,两个水池的水平位移没有变化。大约在 $t = 20\text{ s}$ 时,水池 1 的位移首先开始变化,随后水池 2 的位移方才发生变化。这是由于水池 2 的左边水底浅于水池 1 的水底,因此水波在水池 1 的传播速度更快,从而导致水池 2 左边水面的水平位移开始产生变化的时间要落后于水池 1 相同位置处水面的水平位移开始产生变化的时间。图 6(b)表明,两个水池在 $x = 450\text{ m}$ 处水面的水平位移在最初的一段时间内没有变化,大约在 $t = 20\text{ s}$ 时,两个水池的位移

几乎同时开始变化,这是因为两个水池的右边水底深度相同,水波速度也相同。

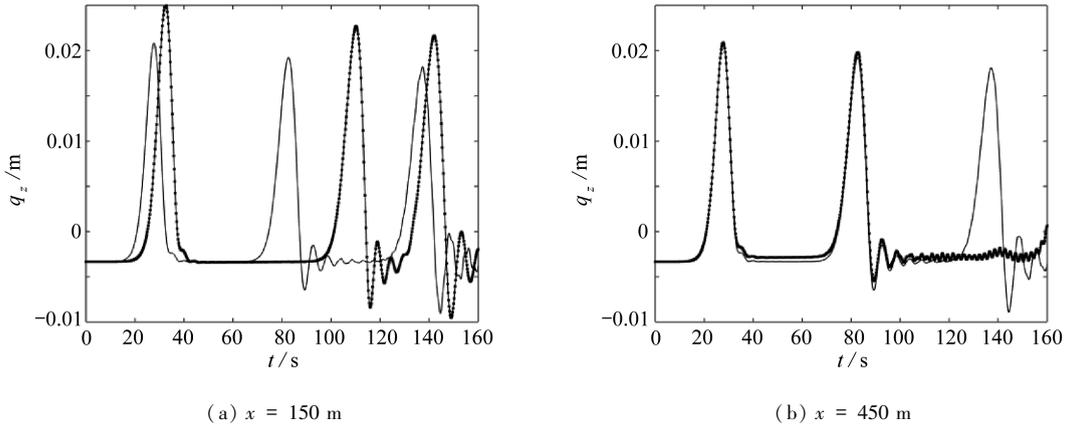


图7 水面不同质点的竖向位移响应(水池1为黑实线,水池2为黑点线)

Fig. 7 The vertical displacements at 2 different points(pool 1, solid line; pool 2, dotted line)

图7(a)和(b)分别绘制了水面两个不同位置处质点的竖向位移响应.这两个位置分别是 $x = 150\text{ m}$ 和 $x = 450\text{ m}$, 两点关于水池中点 $x = 300\text{ m}$ 对称.图7(a)表明,两个水池在 $x = 150\text{ m}$ 处水面的竖向位移在最初的一段时间内没有变化,大约在 $t = 20\text{ s}$ 时,水池1的位移先于水池2,首先开始发生变化.这种差异也是因水池2的左边水底浅于水池1而形成的.图7(b)表明,两个水池在 $x = 450\text{ m}$ 处水面的水平位移在最初的一段时间内没有变化,大约在 $t = 20\text{ s}$ 时,两个水池的位移几乎同时开始变化,这是因为两个水池的右边水底深度相同,水波速度也相同.随着时间的增长,在 $t = 140\text{ s}$,水池1的右边出现了第3次波峰.这个波峰是最初向左的波碰壁反弹后又向右传播,大约在 $t = 140\text{ s}$ 时,向右传播到 $x = 450\text{ m}$ 处所带来的波峰.而水池2的左边水底浅于水池1的左边水底,因此导致在 $t = 140\text{ s}$,水池2的右边没有出现第3次波峰.

4 结 论

水波计算分析是实用的重要课题,本文走的是完全与以往不同的道路,其时间积分进入了保辛体系.本文在小变形假定下,考虑水的位移与竖向坐标相关.由于是小变形假定,因此也可用于线性深水域的计算.以往分析采用 Euler 法描述时,自由水面的运动学条件十分复杂,涉及到微分方程,还需要把水面包络线看做是一个单独的未知函数.而本文采用 Lagrange 法描述,用位移法直接积分,是从动力学的角度出发,有限元法积分可直接得到各个节点的位移,而水面形状则不过就是水面点轨道的包络线而已,无需放在求解的未知函数之中,因此基于 Lagrange 法描述的水波动力学问题结合有限元分析很有发展潜力.

参考文献(References):

- [1] 兰姆 H. 理论流体动力学[M]. 游镇雄, 牛家玉, 译. 北京: 科学出版社, 1990. (Lamb H. *Hydrodynamics*[M]. YOU Zhen-xiong, NIU Jia-yu, transl. Beijing: Science Press, 1990. (Chinese version))
- [2] 钟万颢, 姚征. 位移法浅水孤立波[J]. 大连理工大学学报, 2006, 46(1): 151-156. (ZHONG Wan-xie, YAO Zheng. Shallow water solitary waves based on displacement method[J]. *Journal of Dalian University of Technology*, 2006, 46(1): 151-156. (in Chinese))
- [3] 钟万颢. 应用力学的辛数学方法[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006. (ZHONG Wan-xie. *Symplectic Solution Methodology in Applied Mechanics*[M]. Beijing: Higher Education Press,

- 2006.(in Chinese))
- [4] 梅强中. 水波动力学[M]. 北京: 科学出版社, 1984.(MEI Qiang-zhong. *Dynamics of Water Wave*[M]. Beijing: Science Press, 1984.(in Chinese))
- [5] Remoissenet M. *Waves Called Solitons*[M]. Berlin: Springer, 1996.
- [6] Hairer E, Lubich Ch, Wanner G. *Geometric-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations*[M]. Berlin: Springer, 2006.
- [7] 吴锋, 孙雁, 钟万勰. 不可压缩材料分析的界带有限元法[J]. 应用数学和力学, 2013, 34(1): 1-9.(WU Feng, SUN Yan, ZHONG Wan-xie. Inter-belt finite element for the analysis of incompressible material problems[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2013, 34(1): 1-9.(in Chinese))
- [8] 钟万勰, 高强. 辛破茧[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 2011.(ZHONG Wan-xie, GAO Qiang. *Break the Limitions of Symplectics*[M]. Dalian: Dalian University of Technology Press, 2011.(in Chinese))
- [9] 钟万勰, 高强, 彭海军. 经典力学辛讲[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 2013.(ZHONG Wan-xie, GAO Qiang, PENG Hai-jun. *Classical Mechanics—Its Symplectic Description*[M]. Dalian: Dalian University of Technology Press, 2013.(in Chinese))
- [10] 钟万勰, 高强. 约束动力系统的分析结构力学积分[J]. 动力学与控制学报, 2006, 4(3): 193-200.(ZHONG Wan-xie, GAO Qiang. Integration of constrained dynamical system via analytical structural mechanics[J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2006, 4(3): 193-200.(in Chinese))
- [11] 高强, 钟万勰. Hamilton 系统的保辛-守恒积分算法[J]. 动力学与控制学报, 2009, 7(3): 193-199.(GAO Qiang, ZHONG Wan-xie. The symplectic and energy preserving method for the integration of Hamilton system[J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2009, 7(3): 193-199.(in Chinese))

Simulation of Water Waves Based on the Inter-Belt Finite Element Method

WU Feng, ZHONG Wan-xie

(State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment
(Dalian University of Technology), Dalian, Liaoning 116023, P.R.China)

(Contributed by ZHONG Wan-xie, M. AMM Editorial Board)

Abstract: Here the displacement method for the simulation of water waves was studied. Under the physical coordinate system, the displacements were taken as the unknown variables. Under the assumption of small deformation, the water incompressibility was satisfied through introduction of the flow function. Hence the variational principle of the analytic mechanics can be applied and the numerical results can be more conveniently got by efficient means of the inter-belt finite element method, the canonical transformation and the symplectic conservation integration. 2 numerical examples show the correctness and potential of the proposed method.

Key words: water wave; displacement method; inter-belt finite element

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (General Program)
(11472067)