

# 分析复合材料层合板弯曲和振动的一种有效无网格方法\*

王伟<sup>1,3</sup>, 伊士超<sup>2</sup>, 姚林泉<sup>3</sup>

- (1. 苏州大学 数学科学学院, 江苏 苏州 215006;
2. 江苏科技大学 数理学院, 江苏 镇江 212003;
3. 苏州大学 城市轨道交通学院, 江苏 苏州 215131)

(本刊编委苟晓凡推荐)

**摘要:** 基于高阶剪切法向变形板理论(HOSNDPT)利用无网格方法对层合板弯曲和振动问题进行数值分析.在通常的径向点插值法(RPIM)中对每个 Gauss(高斯)点或计算点需要求矩阵的逆,且受到影响域半径大小的限制.而在加权节点径向点插值法(WN-RPIM)近似中,求解系统矩阵的逆的数量等于问题域中的节点数量,它远远小于 Gauss 点的数目,可以大大减少矩阵求逆的计算量,且克服了 RPIM 中影响域半径大小的限制.首先,将三维板位移分解成厚度和面内位移的乘积,在厚度方向使用正交 Legendre 多项式作为基函数,在板的面内使用 WN-RPIM 来构造形函数.然后,通过对层合板的弯曲问题进行数值计算表明 WN-RPIM 的计算精度和稳定性.最后,将该方法推广到对不同边界条件、不同厚跨比、不同铺设方式的层合板振动问题的数值计算,数值结果表明了本文提供方法的适用性和有效性.

**关键词:** 复合材料层合板; 振动; 高阶剪切和法向变形板理论(HOSNDPT); 径向点插值法; 加权节点的径向点插值无网格法(WN-RPIM)

**中图分类号:** O343.8 **文献标志码:** A

**doi:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2015.12.006

## 引言

层合板壳结构在工程结构中应用非常广泛,对该类结构的数值分析一直是关注的重点.对于这类结构的分析,关键点之一是对横向剪切形变的处理.目前常见的分析理论是基于 Kirchhoff 假设的经典薄板理论,以及适用于中厚板的一阶剪切理论(FSDT)和高阶剪切理论<sup>[1]</sup>.通常的高阶剪切理论中考虑了横向剪切应变的影响而对横向正应变没有考虑,最常用的有:Reddy<sup>[1]</sup>提出的一般多项式、Soldatos 和 Watson<sup>[2]</sup>使用的指数函数、Lee 等<sup>[3]</sup>提出的三角函数、Mindlin 等<sup>[4]</sup>提出的 Legendre 多项式等等.而高阶剪切和法向变形理论(HOSNDPT)<sup>[5-6]</sup>不仅考虑了横向剪切应变而且还考虑了横向正应变.

\* 收稿日期: 2015-09-23; 修订日期: 2015-10-23

基金项目: 国家自然科学基金(11172192;11572210)

作者简介: 王伟(1981—),女,江苏大丰人,博士生,讲师(E-mail: wangw@suda.edu.cn);

伊士超(1983—),男,江苏淮安人,博士(通讯作者. E-mail: shichaoyi@just.edu.cn).

Sze 和 Yao 等<sup>[7-8]</sup>从三维理论出发,同时考虑横向剪切和法向正应力,利用杂交应力有限元法对压电层合结构进行了数值分析,取得了很好的效果.Yin 和 Cao 等<sup>[9]</sup>利用加权点径向点插值的无网格方法对二维平面问题进行了分析和计算,得到了非常好的计算精度.近年来人们在利用无网格分析层合板壳结构方面也取得了不少成果.Cao 和 Yao 等<sup>[10]</sup>基于 EFG 无网格方法从三维理论出发对薄板和厚板的静态变形进行了分析.Xiao 等<sup>[11]</sup>利用径向基函数近似的 MLPG 法以及高阶剪切和正应变理论分析了厚层合板的静态变形.Ferreira 等<sup>[12]</sup>采用径向基函数配点法等理论分析了层合梁、板问题.文献[13]中采用基于一阶剪切理论的无网格 Kriging 法分析层合板的振动问题.文献[14]探讨了径向点插值法(RPIM)在功能梯度材料中的应用.文献[15]将 RPIM 用于粘结缺陷复合材料层合板的敏感性分析等等.

本文基于 HOSNDPT 从三维位移出发对各向异性层合板的弯曲和振动问题进行数值分析.将三维板位移分解成厚度和面内位移的乘积,在厚度方向使用正交 Legendre 多项式作为基函数,在板的面内使用 WN-RPIM 来构造形函数,并通过数值算例验证了本文方法的精度、稳定性和有效性.

## 1 无网格形函数的构造

### 1.1 径向点插值法(radial points interpolation method, RPIM)

考虑二维问题,定义在域  $\Omega$  上的场函数  $u(\mathbf{X})$ ,在域  $\Omega$  内及其边界上任意分布若干个节点,利用点  $\mathbf{X}$  支撑域内  $n$  个节点的函数值  $u_i(i=1,2,\dots,n)$  构造近似场函数:

$$u^h(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n R_i(\mathbf{X})a_i + \sum_{j=1}^m P_j(\mathbf{X})b_j = \mathbf{R}^T(\mathbf{X})\mathbf{a} + \mathbf{P}^T(\mathbf{X})\mathbf{b}, \quad (1)$$

式中,  $R_i(\mathbf{X})$  是径向基函数,  $P_j(\mathbf{X})$  是多项式基函数,  $a_i, b_j$  分别是待定系数,  $m$  是多项式基函数的项数.为保证取得插值的精度及其稳定性,通常取  $m < n$ .在 2D 问题中,常采用线性基  $\mathbf{P}^T(\mathbf{X}) = [1, x, y]$ , 此时  $m = 3, \mathbf{X}^T = [x, y]$ .本文采用的径向基函数(RBF)为

$$\text{multi-quadric (MQ): } R_i(\mathbf{X}) = (r_i^2 + c^2)^q, \quad (2)$$

其中,  $r_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}$ ,  $c, q$  均为参数.方程(1)中的系数  $a_i, b_j$  通过方程(1)满足影响域内  $n$  个离散点插值得到,因此有

$$\mathbf{U}_s = \mathbf{R}\mathbf{a} + \mathbf{P}\mathbf{b}, \quad (3)$$

其中

$$\mathbf{U}_s = [u_1, u_2, \dots, u_n]^T, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_1(\mathbf{X}_1) & R_2(\mathbf{X}_1) & \cdots & R_n(\mathbf{X}_1) \\ R_1(\mathbf{X}_2) & R_2(\mathbf{X}_2) & \cdots & R_n(\mathbf{X}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_1(\mathbf{X}_n) & R_2(\mathbf{X}_n) & \cdots & R_n(\mathbf{X}_n) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix}.$$

式(3)中共有  $n + m$  个未知量,却只有  $n$  个方程,求解上述方程组需增加  $m$  个约束条件

$$\mathbf{P}^T\mathbf{a} = \mathbf{0}. \quad (4)$$

将式(3)和约束条件(4)组合一起可写成

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{U}_s \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{P} \\ \mathbf{P}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix} \triangleq \mathbf{G} \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix}. \quad (5)$$

代入式(1),得

$$u^h(\mathbf{X}) = \mathbf{R}^T(\mathbf{X})\mathbf{a} + \mathbf{P}^T(\mathbf{X})\mathbf{b} = [\mathbf{R}^T(\mathbf{X}) \quad \mathbf{P}^T(\mathbf{X})] \mathbf{G}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_s \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \tilde{\Phi}^T \begin{bmatrix} \mathbf{U}_s \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

其中  $\tilde{\Phi}^T$  为 RPIM 形函数, 可表示为

$$\tilde{\Phi}^T = [\phi_1(\mathbf{X}) \quad \phi_2(\mathbf{X}) \quad \cdots \quad \phi_n(\mathbf{X}) \quad \phi_{n+1}(\mathbf{X}) \quad \cdots \quad \phi_{n+m}(\mathbf{X})].$$

这里, 前  $n$  个分量为与节点相关的形函数, 记为

$$\Phi^T = [\phi_1(\mathbf{X}) \quad \phi_2(\mathbf{X}) \quad \cdots \quad \phi_n(\mathbf{X})], \quad (7)$$

此时的形函数满足  $\delta$  函数性质:

$$\phi_i(\mathbf{X}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

## 1.2 加权节点径向点插值法 (WN-RPIM)

虽然径向点插值法 (RPIM) 是无网格方法中比较常用且有效的方法之一, 但该方法对每个 Gauss 点或计算点需要求矩阵的逆, 而且求逆矩阵受到影响域半径大小的限制. 当影响域半径过小, 域里节点过少, 插值效果不佳. 反之, 影响域半径过大, 矩阵的条件数就会过高. 利用 WN-RPIM 近似可以克服 RPIM 中影响域半径大小的限制, 而且求系统矩阵的逆的数量等于问题域中的节点数量, 可以大大减少矩阵求逆的计算量. 构造 WN-RPIM 形状函数主要分为 3 个步骤: 1) 搜索域  $\Omega$  内及其边界上每个节点  $I$  支撑域内的其它多个节点; 2) 根据式 (6) 结合节点  $I$  支撑域内的节点计算节点  $I$  的位移参数; 3) 找出每个 Gauss 点影响域内的节点, 给出各个节点参数相应的权重, 得到每个 Gauss 点的 WN-RPIM 形函数.

对于影响域内一个节点  $I$ , 根据式 (6) 有

$$u_i^h(\mathbf{X}) = [\mathbf{R}_I^T(\mathbf{X}) \quad \mathbf{P}_I^T(\mathbf{X})] \mathbf{G}_I^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_s \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = [\mathbf{R}_I^T(\mathbf{X}) \quad \mathbf{P}_I^T(\mathbf{X})] \begin{bmatrix} \mathbf{a}(\mathbf{X}_I) \\ \mathbf{b}(\mathbf{X}_I) \end{bmatrix}, \quad (8)$$

其中

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}(\mathbf{X}_I) \\ \mathbf{b}(\mathbf{X}_I) \end{bmatrix} = \mathbf{G}_I^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_s \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_I & \mathbf{P}_I \\ \mathbf{P}_I^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_s \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{G}_I^{-1} \tilde{\mathbf{U}}_s,$$

$\mathbf{G}_I$  是第  $I$  个节点对应的矩阵.

假设一个特定的计算点  $\mathbf{X}$  支持域内有  $k$  个节点, 这  $k$  个节点对应的节点参数由权函数  $w(\mathbf{X})$  给出权重, 最终得到区域值

$$u^h(\mathbf{X}) = \frac{\sum_{I=1}^k w_I(\mathbf{X}) u_i^h(\mathbf{X})}{\sum_{I=1}^k w_I(\mathbf{X})} = \frac{\sum_{I=1}^k w_I(\mathbf{X}) [\mathbf{R}_I^T(\mathbf{X}) \quad \mathbf{P}_I^T(\mathbf{X})] [\mathbf{a}^T(\mathbf{X}_I) \quad \mathbf{b}^T(\mathbf{X}_I)]^T}{\sum_{I=1}^k w_I(\mathbf{X})} = \Phi^{\text{WN-RPIM}}(\mathbf{X}) \tilde{\mathbf{U}}_s, \quad (9)$$

其中

$$\Phi^{\text{WN-RPIM}}(\mathbf{X}) =$$

$$\frac{\sum_{l=1}^k w_l(\mathbf{X}) [\mathbf{R}_l^T(\mathbf{X}) \quad \mathbf{P}_l^T(\mathbf{X})] \mathbf{G}_l^{-1}}{\sum_{l=1}^k w_l(\mathbf{X})} = [\phi_1(\mathbf{X}), \phi_2(\mathbf{X}), \dots, \phi_{\hat{n}}(\mathbf{X})], \quad (10)$$

这里  $\hat{n}$  是用来构造形函数的节点总数, 由计算点  $\mathbf{X}$  支持域内的节点和该节点影响域内的节点总和确定. 由于  $\mathbf{G}_l^{-1}$  是常数矩阵, 所以很容易得到 WN-RPIM 形函数的导数.

对于 WN-RPIM 中的权函数, 通常可取以下两种:

3 次样条权函数

$$w_i(\mathbf{X}) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4\left(\frac{d_i}{r_w}\right)^2 + 4\left(\frac{d_i}{r_w}\right)^3, & d_i \leq 0.5r_w, \\ \frac{4}{3} - 4\left(\frac{d_i}{r_w}\right) + 4\left(\frac{d_i}{r_w}\right)^2 - \frac{4}{3}\left(\frac{d_i}{r_w}\right)^3, & 0.5r_w < d_i \leq r_w, \\ 0, & d_i > r_w; \end{cases} \quad (11)$$

4 阶样条权函数

$$w_i(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 - 6\left(\frac{d_i}{r_w}\right)^2 + 8\left(\frac{d_i}{r_w}\right)^3 - 3\left(\frac{d_i}{r_w}\right)^4, & d_i \leq r_w, \\ 0, & d_i > r_w; \end{cases} \quad (12)$$

其中,  $d_i = |\mathbf{X} - \mathbf{X}_i|$ ,  $r_w$  为权函数支持域的尺寸.

## 2 高阶剪切和法向变形板理论

### 2.1 Legendre 多项式

对于在区间  $[-h/2, h/2]$  上的 Legendre 多项式, 经标准化后可得到第  $i$  阶标准正交 Legendre 多项式  $L_i(z)$ . 其中, 前 7 阶正交 Legendre 多项式为

$$\left\{ \begin{aligned} L_0(z) &= \frac{1}{\sqrt{h}}, \quad L_1(z) = 2\sqrt{\frac{3}{h}} \frac{z}{h}, \quad L_2(z) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{h}} \left( 12\left(\frac{z}{h}\right)^2 - 1 \right), \\ L_3(z) &= \sqrt{\frac{7}{h}} \left( 20\left(\frac{z}{h}\right)^3 - 3\left(\frac{z}{h}\right) \right), \\ L_4(z) &= \sqrt{\frac{9}{h}} \left( 70\left(\frac{z}{h}\right)^4 - 15\left(\frac{z}{h}\right)^2 + \frac{3}{8} \right), \\ L_5(z) &= \sqrt{\frac{11}{h}} \left( 252\left(\frac{z}{h}\right)^5 - 70\left(\frac{z}{h}\right)^3 + \frac{15}{4}\frac{z}{h} \right), \\ L_6(z) &= \sqrt{\frac{13}{h}} \left( 924\left(\frac{z}{h}\right)^6 - 315\left(\frac{z}{h}\right)^4 + \frac{105}{4}\left(\frac{z}{h}\right)^2 - \frac{5}{16} \right), \\ L_7(z) &= \sqrt{\frac{15}{h}} \left( 3432\left(\frac{z}{h}\right)^7 - 1386\left(\frac{z}{h}\right)^5 + \frac{315}{2}\left(\frac{z}{h}\right)^3 - \frac{35}{8}\frac{z}{h} \right), \end{aligned} \right. \quad (13)$$

其具有以下性质:

$$\int_{-h/2}^{h/2} L_i(z) L_j(z) dz = \delta_{ij}, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots \quad (14)$$

第  $i$  个 Legendre 多项式的导数可以表示为前  $i-1$  个 Legendre 多项式的线性组合, 即

$$L'_i(z) = \sum_{j=0}^K d_{ij} L_j(z), \quad (15)$$

其中  $d_{ij}$  为常数, 对于  $K = 7$  有

$$[d_{ij}] = \frac{2}{h} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{7} & 0 & \sqrt{35} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3\sqrt{3} & 0 & 3\sqrt{7} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{11} & 0 & \sqrt{55} & 0 & 3\sqrt{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{39} & 0 & \sqrt{91} & 0 & \sqrt{143} & 0 & 0 \\ \sqrt{15} & 0 & 5\sqrt{3} & 0 & 3\sqrt{15} & 0 & \sqrt{195} & 0 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

## 2.2 高阶剪切和法向变形板理论 (HOSNDPT)

对于 1 个受横向载荷  $q$  的层合板, 建立相应的三维坐标系  $O-xyz$ , 板的区域可表示为  $\Omega = \{0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, -h/2 \leq z \leq h/2\}$ .

三维位移函数可以在平面和厚度方向进行变量分离, 并且厚度方向采用正交 Legendre 多项式, 则位移可表示为

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \begin{Bmatrix} u(x, y, z, t) \\ v(x, y, z, t) \\ w(x, y, z, t) \end{Bmatrix} = \sum_{i=0}^K \begin{Bmatrix} u_i(x, y, t) \\ v_i(x, y, t) \\ w_i(x, y, t) \end{Bmatrix} L_i(z), \quad (17)$$

其中  $K$  是 Legendre 多项式的阶数, 也是板理论的阶数, 当  $K > 1$  时, 称为高阶剪切板理论.

## 2.3 应变和应力

根据几何方程, 并运用位移 HOSNDPT 的位移式 (17), 则应变-位移关系为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{i=0}^K \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_i(x, y)}{\partial x} \\ \frac{\partial v_i(x, y)}{\partial y} \\ \sum_{j=0}^K w_j(x, y) d_{ji} \\ \frac{\partial w_i(x, y)}{\partial y} + \sum_{j=0}^K v_j(x, y) d_{ji} \\ \frac{\partial w_i(x, y)}{\partial x} + \sum_{j=0}^K u_j(x, y) d_{ji} \\ \frac{\partial v_i(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial u_i(x, y)}{\partial y} \end{array} \right\} L_i(z) = \sum_{i=0}^K \boldsymbol{\eta}_i L_i(z), \quad (18)$$

其中  $\boldsymbol{\eta}_i$  为  $6 \times 1$  阶向量.

对于单层正交各向异性材料, 在问题坐标系下的本构关系为

$$\boldsymbol{\sigma} = \bar{\mathbf{C}} \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (19)$$

其中,  $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \tau_{yz} \ \tau_{zx} \ \tau_{xy}\}^T$  和  $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_z \ \gamma_{yz} \ \gamma_{zx} \ \gamma_{xy}\}^T$  分别为应力

向量和应变向量,  $\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{TCT}^T$  为问题坐标系下的刚度矩阵,  $\mathbf{C}$  为材料坐标系下的刚度矩阵,  $\mathbf{T}$  为材料坐标系与问题坐标系之间的转换矩阵, 由下式给出:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 0 & 0 & 0 & -\sin(2\theta) \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 0 & 0 & 0 & \sin(2\theta) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ \frac{1}{2}\sin(2\theta) & -\frac{1}{2}\sin(2\theta) & 0 & 0 & 0 & \cos(2\theta) \end{bmatrix},$$

$$c_{11} = \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{E_2E_3\Delta}, c_{22} = \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1E_3\Delta}, c_{33} = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{E_1E_2\Delta}, c_{12} = \frac{\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23}}{E_2E_3\Delta},$$

$$c_{13} = \frac{\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}}{E_2E_3\Delta}, c_{23} = \frac{\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31}}{E_1E_3\Delta}, \Delta = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{E_1E_2E_3},$$

$$c_{44} = G_{23}, c_{55} = G_{31}, c_{66} = G_{12},$$

$E_i$  为弹性模量,  $\nu_{ij}$  为 Poisson(泊松) 比,  $\theta$  为相应层问题坐标系与材料坐标系间的夹角.

### 3 系统方程的离散

基于最小势能原理可以得到板振动问题的 Galerkin(伽辽金)弱形式:

$$\int_{\Omega} \delta \mathbf{e}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_i} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma_i + \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \zeta \dot{\mathbf{u}} d\Omega + \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \boldsymbol{\rho} \ddot{\mathbf{u}} d\Omega = \mathbf{0}. \quad (20)$$

由于体力可以等效地化为表面力, 所以在此忽略体力项. 利用式(9) WN-RPIM 近似函数的结果来近似式(20)中的位移  $\mathbf{u}$  可以得到

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{\hat{n}} \begin{bmatrix} \phi_i & 0 & 0 \\ 0 & \phi_i & 0 \\ 0 & 0 & \phi_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{\hat{n}} \boldsymbol{\Phi}_i \mathbf{U}_i. \quad (21)$$

将式(18)、(19)和(21)代入式(20)得到矩阵表示的总势能等式:

$$\delta \mathbf{U}_i^T [\mathbf{K} \mathbf{U}_i + \mathbf{C} \dot{\mathbf{U}}_i + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}}_i - \mathbf{F}] = \mathbf{0}. \quad (22)$$

由于  $\delta \mathbf{U}_i^T$  的任意性, 可得

$$\mathbf{K} \mathbf{U}_i + \mathbf{C} \dot{\mathbf{U}}_i + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}}_i - \mathbf{F} = \mathbf{0}. \quad (23)$$

自由振动方程的一般解可写成

$$\mathbf{U} = \mathbf{W} \cdot \mathbf{e}^{i\omega t}, \quad (24)$$

其中,  $i$  为虚数单位,  $t$  表示时间,  $\mathbf{W}$  为特征向量,  $\omega$  是自然频率. 将式(24)代入式(23), 并取  $\mathbf{C} = \mathbf{0}, \mathbf{F} = \mathbf{0}$ , 可得到特征方程

$$(K - \omega^2 M) W = 0, \quad (25)$$

通过求解特征方程可以得到系统自由振动的自然频率  $\omega$  和板的振型.对于结构动力响应问题,通常采用直接积分方案,本文采用 Newmark 积分方法<sup>[16]</sup>.

## 4 数值算例

### 4.1 静态弯曲

设简支正交异性单层方板受均匀分布载荷  $q = 100 \text{ kN/m}^2$  作用.边长  $a = 20 \text{ cm}$ ,厚跨比  $h/a = 0.1$ ,简支边的边界条件为: $x = 0, a$  时  $w = v = 0$ ;  $y = 0, a$  时  $w = u = 0$ .材料参数值,  $E_1 : E_2 : E_3 = 25 : 1 : 1$ ,  $E_2 = 1 \text{ GPa}$ ,  $\nu_{12} = \nu_{23} = \nu_{13} = 0.25$ ,  $G_{12} = G_{13} = 0.5E_2$ ,  $G_{23} = 0.2E_2$ .引入无量纲化挠度和应力:

$$\bar{w} = \frac{100t^3}{qa^4} w \Big|_{x=a/2, y=b/2, z=0}, \quad \bar{\sigma}_{xx} = \frac{t^2}{qa^2} \sigma_{xx} \Big|_{x=a/2, y=b/2, z=-h/2}, \quad \bar{\tau}_{zx} = \frac{t^2}{qa^2} \tau_{zx} \Big|_{x=a, y=b, z=-h/(2N)},$$

这里  $N$  表示层合板总层数.

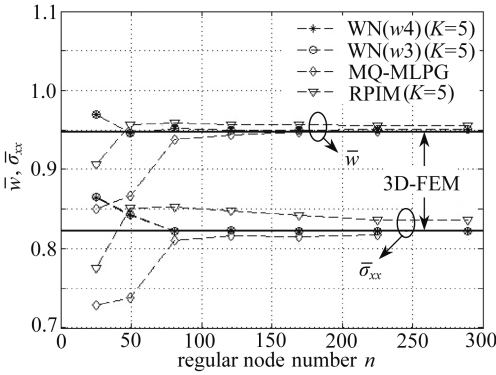


图1 5种计算方法7种节点密度下板中心点挠度  $\bar{w}$  以及下表面中心点应力  $\bar{\sigma}_{xx}$  比较

Fig. 1 Deflections  $\bar{w}$  at the plate center point and stresses  $\bar{\sigma}_{xx}$  at the lower surface center point with 5 calculation methods for 7 kinds of node densities

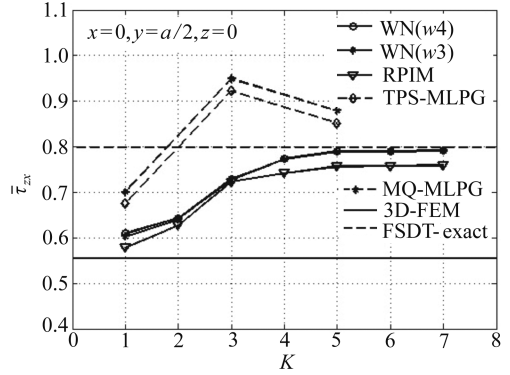


图2 均匀载荷下厚跨比  $h/a = 0.1$  层合板 ( $0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$ ) 的横向剪切应力  $\bar{\tau}_{zx}$

Fig. 2 Transverse shear stresses  $\bar{\tau}_{zx}$  of the ( $0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$ ) laminated plate under uniform loading for  $h/a = 0.1$

图1给出了  $WN(w3)(K=5)$ ,  $WN(w4)(K=5)$  (这里  $w3, w4$  分别表示权函数取3次样条和4次样条),  $MQ-MLPG$ <sup>[11]</sup>,  $3D-FEM$ <sup>[11]</sup> 和  $RPIM(K=5)$  5种不同算法对于7种不同节点密度  $5 \times 5(25)$ ,  $7 \times 7(49)$ ,  $9 \times 9(81)$ ,  $11 \times 11(121)$ ,  $13 \times 13(169)$ ,  $15 \times 15(225)$ ,  $17 \times 17(289)$  的计算结果.图1中实线代表三维有限元计算解(3D-FEM),图中上部分的线代表各计算方法得到的板中心点无量纲挠度  $\bar{w}$ ,下部分的线代表板下表面中心点无量纲应力  $\bar{\sigma}_{xx}$ .由图1结果可以看出,  $WN(w3)(K=5)$ ,  $WN(w4)(K=5)$  两种算法结果非常接近,在  $9 \times 9(81)$  节点密度下就已经收敛并非常接近 3D-FEM 解;虽然  $MQ-MLPG$  解也在  $9 \times 9(81)$  节点密度下就开始收敛,但是显然没有两种  $WN(K=5)$  的收敛性好;而  $RPIM(K=5)$  解与 3D-FEM 解相比较,收敛性和精度都不是很好.因此,由图1可知两种  $WN(K=5)$  较之  $RPIM(K=5)$  和  $MQ-MLPG$  有更好的收敛性和精度.图2给出了  $K = 1 \sim 7$  时  $WN(w3)$ ,  $WN(w4)$ ,  $RPIM$ ,  $TPS-MLPG$ <sup>[11]</sup>,  $MQ-MLPG$ ,  $3D-FEM$ ,  $FSDT-exact$ <sup>[11]</sup> 7种方法得到的无量纲横向剪切应力  $\bar{\tau}_{zx}$  结果的比较.由图1,2

可见 WN ( $w3$ ) 和 WN ( $w4$ ) 结果几乎相同, 并与 RPIM 解都介于 3D-FEM 解和 FSDT-exact 解之间, 随着  $K$  的增加而逐渐从接近 3D-FEM 解递增到接近 FSDT-exact 解, 变化越来越平缓. 而 TPS-MLPG 和 MQ-MLPG 的解在  $K$  取 1, 3, 5 时波动较大. 由此也可发现, WN-RPIM 较之 TPS-MLPG 和 MQ-MLPG 的解对于  $K$  的变化有着更好的稳定性和精度.

## 4.2 自由振动

下面通过几个算例来验证本文方法对振动问题的适用性和有效性. 设无量纲固有频率为

$$\bar{\omega} = \frac{\omega b^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}}.$$

### 4.2.1 悬臂板的振动分析

表 1 给出了材料 1 的两层正交悬臂板 ( $h/a = 0.1, 0^\circ/90^\circ$ ) 在不同长宽比和 6 种数值方案下用 WN-RPIM (9×9 网格) 计算出的无量纲固有频率与 CLPT 方法<sup>[1]</sup>、FSDT 方法<sup>[1]</sup>、TSDT 方法<sup>[1]</sup>得到的解析解结果进行比较. 各向异性材料的参数为  $E_1 : E_2 : E_3 = 25 : 1 : 1, \nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.25, G_{12} = G_{13} = 0.5E_2, G_{23} = 0.2E_2, \rho = 1 \text{ g/cm}^3$ .

数值结果显示在板比较方 ( $b/a = 1$ ) 时固有频率相对较小, WN-RPIM 的计算结果与其它几种方法的结果误差比较明显 (与 FSDT 方法的误差约 18%); 当板比较长 ( $b/a = 3$ ) 时, 板固有频率相对较大, WN-RPIM 的计算结果与 FSDT 方法的误差约 2%, 与 TSDT 方法的误差约 3%, 与 CLPT 方法的误差约 21%. 因此在板比较长时该方法计算的结果更接近于 FSDT 方法. 同时发现两种权函数计算出来的结果几乎没有差别, 误差小于 0.01%. 故以下部分将只考虑  $w3$  的情况.

表 1 WN-RPIM 计算出的悬臂板 ( $h/a = 0.1, 0^\circ/90^\circ$ ) 的无量纲固有频率

Table 1 The WN-RPIM solutions of non-dimensional natural frequencies for the cantilever plate ( $h/a = 0.1, 0^\circ/90^\circ$ )

$b/a$	CLPT	FSDT	TSDT	WN ( $w3$ )			WN ( $w4$ )		
				$K = 1$	$K = 3$	$K = 5$	$K = 1$	$K = 3$	$K = 5$
1	2.625 0	2.533 4	2.561 0	2.140 5	2.134 2	2.131 0	2.134 5	2.134 2	2.131 0
2	10.458 8	9.350 1	9.598 8	8.559 4	8.534 1	8.520 9	8.559 4	8.534 1	8.520 9
3	23.377 5	18.849 1	19.832 5	19.256 4	19.199 1	19.169 5	19.256 4	19.199 1	19.169 5

### 4.2.2 不同层合结构和不同厚跨比下层合板的无量纲固有频率分析

表 2 给出 WN-RPIM (9×9 网格) 计算出的在 3 种层合方案 ( $0^\circ, 0^\circ/90^\circ/0^\circ, 0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ$ ) 和 3 种厚跨比 ( $h/a = 0.2, 0.1, 0.01$ ) 下层合板的无量纲固有频率与 CLPT 法<sup>[1]</sup> 和 FSDT 法<sup>[1]</sup> 计算结果的比较. 材料参数与悬臂板相同. 表 2 数据表明, 在板比较薄的情况下, 几种方法得到的结果都比较接近; 当板比较厚的时候, WN-RPIM 计算的结果与 FSDT 方法很接近, CLPT 的结果偏离较远 (因为 CLPT 只适用于薄板情况). 可见 WN-RPIM 适用于各种厚度以及不同层合方式的板.

### 4.2.3 不同边界条件和不同厚跨比下层合板的无量纲固有频率分析

表 3 给出了 WN-RPIM (9×9 网格) 计算的不同厚跨比, 在不同的边界条件 (边界条件中 “S” 表示简支, “C” 表示固支, “F” 表示自由) 下的无量纲固有频率与 FSDT 法<sup>[1]</sup>、CLPT 法<sup>[1]</sup>、TSDT 法<sup>[1]</sup> 的解析解比较. 材料参数为  $E_1 : E_2 : E_3 = 40 : 1 : 1, \nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.25, G_{12} = G_{13} = 0.6E_2, G_{23} = 0.2E_2, \rho = 1 \text{ g/cm}^3$ . 数值结果显示板比较厚的时候 WN-RPIM 解与 FSDT 解和 TSDT 解比较接近, CLPT 的解误差较大. 说明了本文方法在不同边界条件、不同厚跨比下的适用性和有效性.



表2 WN-RPIM 计算的不同厚跨比和不同层合方案下的层合板的无量纲固有频率

Table 2 The WN-RPIM solutions of non-dimensional natural frequencies under different schemes for the laminated plates

$h/a$	method	$0^\circ$	$0^\circ/90^\circ/0^\circ$	$0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ$
0.2	FSDT	8.909	8.766	9.215
	CLPT	14.750	14.750	14.750
	WN ( $w_3$ ) ( $K = 1$ )	9.405 0	9.089 5	9.631 9
	WN ( $w_3$ ) ( $K = 3$ )	8.963 4	8.215 3	8.992 6
	WN ( $w_3$ ) ( $K = 5$ )	8.959 3	8.127 2	8.831 4
0.1	FSDT	12.452	12.227	12.633
	CLPT	15.104	15.104	15.104
	WN ( $w_3$ ) ( $K = 1$ )	12.793 7	12.525 6	12.892 7
	WN ( $w_3$ ) ( $K = 3$ )	12.462 1	11.747 2	12.475 6
	WN ( $w_3$ ) ( $K = 5$ )	12.461 8	11.617 0	12.374 8
0.01	FSDT	15.190	15.184	15.192
	CLPT	15.227	15.227	15.227
	WN ( $w_3$ ) ( $K = 1$ )	15.217 2	15.211 6	15.218 7
	WN ( $w_3$ ) ( $K = 3$ )	15.210 9	15.194 2	15.211 0
	WN ( $w_3$ ) ( $K = 5$ )	15.210 9	15.190 3	15.209 2

表3 WN-RPIM 计算的不同边界条件下( $0^\circ/90^\circ$ )铺设的层合板的无量纲固有频率Table 3 The WN-RPIM solutions of non-dimensional natural frequencies under different boundary conditions for the laminated plates( $0^\circ/90^\circ$ )

$h/a$	method	SSSS	SSSC	SSSF	SCSC
0.1	FSDT	10.473	12.610	7.215	15.152
	CLPT	11.154	14.223	7.636	18.543
	TSDT	10.568	12.870	7.277	15.709
	WN ( $w_3$ ) ( $K = 1$ )	10.573 2	12.843 3	7.283 0	15.604 3
	WN ( $w_3$ ) ( $K = 3$ )	10.419 7	12.513 5	7.173 2	15.604 3
	WN ( $w_3$ ) ( $K = 5$ )	10.331 5	12.336 1	7.106 3	14.706 3
	0.2	FSDT	8.833	9.882	6.213
CLPT		10.721	13.627	7.450	17.741
TSDT		9.087	10.393	6.387	11.890
WN ( $w_3$ ) ( $K = 1$ )		9.080 9	10.224 6	6.077 3	11.470 6
WN ( $w_3$ ) ( $K = 3$ )		8.708 1	9.658 7	6.073 3	10.714 1
WN ( $w_3$ ) ( $K = 5$ )		8.521 7	9.423 9	5.954 1	10.449 2

## 5 结 论

本文将高阶剪切和法向变形理论与无网格方法相结合,数值计算层合板的弯曲和振动响应问题.在板的厚度方向采用正交 Legendre 多项式作为基函数,在板的面内采用 WN-RPIM 近似,克服了 RPIM 中影响域半径大小的限制.通过弯曲问题的分析,发现 WN-RPIM 较 RPIM 和 MQ-MLPG 有更好的精度和稳定性;通过计算和分析不同边界条件、不同层合结构、不同厚跨比等各种类型层合板的振动问题,用 WN-RPIM 数值解与其它近似方案的数值解比较来验证了 WN-RPIM 在大多情况下与 FSDT 方法比较接近,是分析各种层合板问题的有效方法.对于振动问题虽然也得到了比较满意的结果,但是当板比较方时仍存在较大的误差,需要进一步对

方法改进,同时需要考察计算时间效应,这是我们下一步需要完善的工作。

## 参考文献(References):

- [1] Reddy J N. *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*[M]. New York: CRC Press, 1997.
- [2] Soldatos K P, Watson P. Accurate stress analysis of laminated plates combining a two-dimensional theory with the exact three-dimensional solution for simply supported edges[J]. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 1997, **2**(4): 459-489.
- [3] Lee P C Y, Syngellakis S, Hou J P. A two-dimensional theory for high-frequency vibrations of piezoelectric crystal plates with or without electrodes[J]. *Journal of Applied Physics*, 1987, **26**(4): 1249-1262.
- [4] Mindlin R C, Medlick M A. Extensional vibrations of elastic plates[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1959, **26**(2): 145-151.
- [5] Batra R C, Vidoli S. Higher-order piezoelectric plate theory derived from a three-dimensional variational principle[J]. *AIAA Journal*, 2012, **40**(1): 91-104.
- [6] Batra R C, Aimmanee S. Vibrations of thick isotropic plates with higher order shear and normal deformable plate theories[J]. *Computers & Structures*, 2005, **83**(12/13): 934-955.
- [7] Sze K Y, Yao L Q, Pian T H H. An eighteen-node hybrid-stress solid-shell for homogenous and laminated structures[J]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2002, **38**(4): 353-374.
- [8] YAO Lin-quan, Sze K Y. A hybrid-stress solid-shell element for non-linear analysis of piezoelectric structures[J]. *Science in China Series E: Technological Sciences*, 2009, **52**(3): 575-583.
- [9] YIN Yu, YAO Lin-quan, CAO Yang. A 3D shell-like approach using element-free Galerkin method for analysis of thin and thick plate structures[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2013, **29**(1): 85-98.
- [10] CAO Yang, YAO Lin-quan, YI Shi-chao. A weighted nodal-radial point interpolation meshless method for 2D solid problems[J]. *Engineering Analysis With Boundary Elements*, 2014, **39**: 88-100.
- [11] Xiao J R, Gilhooley D F, Batra R C, Gillespie J J W, McCarthye M A. Analysis of thick composite laminates using a higher-order shear and normal deformable plate theory(HOSNDPT) and a meshless method[J]. *Composites Part B: Engineering*, 2008, **39**(2): 414-427.
- [12] Ferreira A J M, Roque C M C, Martins P A L S. Radial basis functions and higher-order shear deformation theories in the analysis of laminated composite beams and plates[J]. *Composite Structures*, 2004, **66**(1/4): 287-293.
- [13] 陈富军,魏春志,姚林泉. 基于局部移动 Kriging 无网格方法的层合板自由振动分析[J]. 计算力学学报, 2013, **30**(4): 559-564.(CHEN Fu-jun, WEI Cun-zhi, YAO Lin-quan. Free vibration analysis of laminated composite plates by local moving Kriging meshless method[J]. *Journal of Computational Mechanics*, 2013, **30**(4): 559-564. (in Chinese))
- [14] Bui T Q, Khosravifard A, Zhang C, Hematiyan M R, Golub M V. Dynamic analysis of sandwich beams with functionally graded core using a truly meshfree radial point interpolation method[J]. *Engineering Structures*, 2013, **47**: 90-104.
- [15] 李顶河,徐建新,卿光辉. Hamilton 体系下含弱粘接复合材料层合板的灵敏度分析研究[J]. 应用数学和力学, 2010, **31**(12): 1465-1475.(LI Ding-he, XU Jian-xin, QING Guang-hui. Sensitivity analysis of composite laminated plates with bonding imperfection in Hamilton system

- [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2010, **31**(12): 1465-1475. (in Chinese))
- [16] 王勖成. 有限单元法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2003. (WANG Xu-cheng. *Finite Element Method*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2003. (in Chinese))

## An Effective Meshfree Method for Bending and Vibration Analyses of Laminated Composite Plates

WANG Wei<sup>1,3</sup>, YI Shi-chao<sup>2</sup>, YAO Lin-quan<sup>3</sup>

(1. *School of Mathematical Sciences, Soochow University, Suzhou, Jiangsu 215006, P.R.China;*

2. *School of Mathematics and Physics, Jiangsu University of Science and Technology, Zhenjiang, Jiangsu 212003, P.R.China;*

3. *School of Urban Rail Transportation, Soochow University, Suzhou, Jiangsu 215131, P.R.China)*

(Recommended by GOU Xiao-fan, M. AMM Editorial Board)

**Abstract:** Numerical analysis of laminated plates' bending and vibration problems was presented based on the high order shear and normal deformation plate theory (HOSNDPT) with the meshless method. For the usual radial point interpolation method (RPIM), the inverses of the moment matrices are required for each Gauss point or calculation point, and are limited by the radius of the domain. For the weighted node radial point interpolation method (WN-RPIM), the number of the inverses of the system matrices is equal to the number of nodes in the problem domain, which is far less than the number of Gauss points, so the WN-RPIM can greatly reduce the computation complexity of the moment matrices and overcome the limitations on the RPIM. First, the 3D plate displacement was decomposed into the product of the thickness-direction and in-plane displacements, and the orthogonal Legendre polynomials were used as basis functions in the thickness direction, the WN-RPIM was employed in plane to construct the shape functions. Then, the numerical calculation of the bending problems of laminated plates verified the accuracy and stability of the WN-RPIM. At last, the proposed method was extended to the numerical calculation of the vibration problems of laminated plates with different boundary conditions, different thickness-to-span ratios and different laying patterns. The numerical results show the applicability and effectiveness of the proposed method.

**Key words:** laminated composite plate; vibration; high order shear and normal deformation plate theory (HOSNDPT); radial point interpolation method (RPIM); weighted node radial point interpolation meshless method (WN-RPIM)

**Foundation item:** The National Natural Science Foundation of China(11172192;11572210)