文章编号: 1000-0887(2007) 12-1502-11

捕食者具脉冲扰动与食饵具有化学控制的阶段结构时滞捕食-食饵模型*

焦建军[1,2], 陈兰荪[2]

(1. 贵州财经学院 数学与统计学院, 贵阳 550004;
2. 大连理工大学 应用数学系, 辽宁 大连 116024)

(郭兴明推荐)

摘要: 讨论了与害虫治理相关的一类捕食者具脉冲扰动与食饵具有化学控制的阶段结构时滞捕食-食饵模型, 得到了害虫灭绝周期解的全局吸引和系统持久的充分条件, 也证明了系统的所有解的一致完全有界· 得出的结论为现实的害虫治理提供了可靠的策略依据·

关 键 词: 阶段结构; 时滞; 脉冲; 全局吸引; 一致持久; 害虫灭绝
中图分类号: O175.2; O175.6 文献标识码: A

引 言

根据世界粮农组织的报道, 人类和害虫之间的"战争"持续了数千年· 随着社会的发展和科学技术的进步, 人类已经采用了许多先进的现代武器来对付害虫, 例如: 化学农药, 生物农药, 遥感和遥测, 计算机技术, 原子能技术等等· 也曾经取得过许多辉煌的"战果", 但是"战争"永远没有结束, 并且将继续下去· 各种各样的大量的农药被用来控制害虫· 总的来说农药是有用的, 因为它能够迅速地杀死大量的害虫· 在虫害猖獗的时候, 喷洒农药可能是唯一的挽回经济损失的方法· 然而, 农药污染对人类的健康和益虫的危害性也已经被人们所认识· 本文所研究的是把喷洒农药和生物控制结合起来的方法·

用天敌来控制害虫是一种重要的害虫治理方法· 利用生物代理来进行害虫防治的自然的控制策略称为生物防治[1-9]· 一般地说, 害虫都有自己的天敌· 生物防治在害虫治理中有着悠久的历史· 我国古代用蚂蚁来防治毛虫和甲虫, 1888 年美国引进澳洲瓢虫成功地防治吹棉蚧[10]· 在实践中, 我们可以人为地辅助饲养天敌并且通过周期性的释放以达到控制害虫的目的· 由于此方法对人类和其他动物无害, 不破坏环境, 且在害虫防治上具有高效性和低成本, 近年日益受到重视·

在自然界中, 有许多种群根据其大小、形状、行为特征, 分为幼年和成年两个阶段· 而在昆虫中犹为明显· 文献[11]研究了一个包含幼体和成体两个阶段结构增长的模型, 其中阶段结

* 收稿日期: 2007-03-15; 修订日期: 2007-09-06
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10471117); 贵州省重点学科资助项目
作者简介: 焦建军(1973—), 男, 湖南邵阳人, 讲师, 博士(联系人. Tel: +86-851-8193240; E-mail: jiaojianjun05@126.com).

构用一个常数时滞来表示. 还有许多作者[11-18]研究了含有时滞的模型. 基于上面的考虑, 我们研究了一类与害虫治理相关的一类捕食者具脉冲扰动与食饵具有化学控制的阶段结构时滞捕食-食饵模型, 此模型更能够反映出害虫治理的实际. 我们得到了害虫灭绝周期解的全局吸引和系统持久的充分条件, 也证明了系统的所有解的一致完全有界. 我们的结论为现实的害虫治理提供了可靠的策略依据.

1　模型的建立

有许多作者[12-13, 19-25]对阶段结构模型已经进行了分析研究. Aiello 和 Freedman 在文献[13]中研究了如下的单种群阶段结构模型的动力学性质:

$$\begin{cases} x'(t) = \beta y(t) - rx(t) - \beta e^{-r\tau} y(t-\tau), \\ y'(t) = \beta e^{-r\tau} y(t-\tau) - \eta_2 y^2(t), \end{cases} \tag{1}$$

其中 $x(t)$, $y(t)$ 分别表示幼体和成体的密度. 模型(1)的参数的生物意义可以见文献[13, 25].

也有许多作者[4, 13-18, 25-27]研究过捕食-食饵系统. 基本的模型是下面的 Lotka-Volterra 捕食-食饵系统

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t)(r - ax_1(t) - bx_2(t)), \\ x_2'(t) = x_2(t)(-d + cx_1(t)), \end{cases} \tag{2}$$

其中 $x_1(t)$、$x_2(t)$ 分别表示食饵和捕食者的种群密度, r 表示食饵的内禀增长率, a 表示食饵种群种内系数, b 表示每个捕食者捕获食饵的捕获率, d 表示捕食者的死亡率, c 表示捕食者所捕获的食饵转化为捕食者的转化率. 而文献[28]中考虑的是捕食者具有脉冲扰动的捕食-食饵模型

$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} x_1'(t) &= ax_1(t) - bx_1^2(t) - \frac{\beta x_1(t)x_2(t)}{1+wx_1(t)}, \\ x_2'(t) &= \frac{k\beta x_1(t)x_2(t)}{1+wx_1(t)} - dx_2(t), \end{aligned}\right\} & t \neq n\tau, \\ \left.\begin{aligned} \Delta x_1(t) &= 0, \\ \Delta x_2(t) &= \mu, \end{aligned}\right\}, & t = n\tau,\ n = 1, 2, \cdots, \end{cases} \tag{3}$$

其中 $x_1(t)$、$x_2(t)$ 分别表示食饵和捕食者的种群密度, a 表示食饵的内禀增长率, b 表示食饵种群种内系数, $\beta x_2(t)/(1+\alpha x_2(t))$ 表示 Holling II 功能性反应函数, d 表示捕食者的死亡率, k 表示捕食者所捕获的食饵转化为捕食者的转化率.

考虑到害虫治理的实际, 同时受式(1)和式(3)的启发, 建立如下的脉冲释放天敌来控制害虫的数学模型

$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} x_1'(t) &= rx_2(t) - re^{-w\tau_1}x_2(t-\tau_1) - wx_1(t), \\ x_2'(t) &= re^{-w\tau_1}x_2(t-\tau_1) - \frac{\beta x_2(t)x_3(t)}{1+\alpha x_2(t)} - \\ &\qquad d_3x_2(t) - d_4x_2^2(t) - Ex_2(t), \\ x_3'(t) &= \frac{k\beta x_2(t)x_3(t)}{1+\alpha x_2(t)} - dx_3(t), \end{aligned}\right\} & t \neq n\tau, \\ \left.\begin{aligned} \Delta x_1(t) &= 0, \\ \Delta x_2(t) &= 0, \\ \Delta x_3(t) &= \mu, \end{aligned}\right\} & t = n\tau,\ n = 1, 2, \cdots, \\ (\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta), \varphi_3(\zeta)) \in \mathbf{C}_+ = C([-\tau_1, 0], R_+^3), & \varphi_i(0) > 0,\ i = 1, 2, 3, \end{cases} \tag{4}$$

其中 $x_1(t)$、$x_2(t)$ 表示害虫幼体和害虫成体的密度，$x_3(t)$ 表示害虫天敌的密度。害虫的成长期是 τ_1，且 $r>0$，$w>0(w>d)$，$d_3>0$，$d_4>0$，$d>0$，$k>0$，$\beta>0$。$\Delta x_3(t)=x_3(t^+)-x_3(t)$，$\mu\geqslant 0$ 表示在时刻 $t=n\tau$，$n\in\mathbf{Z}_+$ $(\mathbf{Z}_+=\{1,2,\cdots\})$ 释放天敌的量，τ 表示脉冲释放天敌的周期，E 表示喷洒农药的效果。此模型的参数的生物意义具体可以参见文献[13, 25, 28]。

由于模型(4)的第2个和第3个方程都不含 $x_1(t)$，我们可以把模型(4)简化为

$$\begin{cases}\left.\begin{aligned}x_2'(t)&=r\mathrm{e}^{-w\tau_1}x_2(t-\tau_1)-\frac{\beta x_2(t)x_3(t)}{1+ax_2(t)}-\\&\qquad d_3x_2(t)-d_4x_2^2(t)-Ex_2(t),\\x_3'(t)&=\frac{k\beta x_2(t)x_3(t)}{1+ax_2(t)}-dx_3(t),\end{aligned}\right\}\quad t\neq n\tau,\\\left.\begin{aligned}\Delta x_2(t)&=0,\\\Delta x_3(t)&=\mu,\end{aligned}\right\}\quad t=n\tau,\ n=1,2,\cdots,\end{cases}\tag{5}$$

其初始条件是

$$(\varphi_2(\zeta),\varphi_3(\zeta))\in\mathbf{C}_+=C([-\tau_1,0],R_+^2),\qquad\varphi_i(0)>0,\quad i=2,3.\tag{6}$$

2　模型(4)的动力学行为

假设 $\boldsymbol{x}(t)=(x_1(t),x_2(t),x_3(t))^{\mathrm{T}}$ 是模型(4)的解，它是一个分段连续函数 $\boldsymbol{x}:\mathbf{R}_+\to R_+^3$，$\boldsymbol{x}(t)$ 在区间 $(n\tau,(n+1)\tau]$ 上是连续的，并且 $\boldsymbol{x}(n\tau^+)=\lim_{t\to n\tau^+}\boldsymbol{x}(t)$ 是存在的。显然，系统(4)的右边函数的光滑性保证了其解的全局存在和唯一性[29-30]。为了初始条件的连续性，我们需要下式成立

$$\varphi_1(0)=\int_{-\tau_1}^{0}r\mathrm{e}^{ws}\varphi_2(s)\,\mathrm{d}s.\tag{7}$$

在证明主要的结果之前，我们给出一些有用的引理。

引理1　假设 $(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\varphi_3(t))>0$，$-\tau_1<t<0$，那么模型(4)的所有解是严格正的。

证明　首先我们证明对所有 $t>0$ 有 $x_2(t)>0$。如果存在 t_0 使得 $x_2(t_0)=0$，假设 t_0 是第一个使得 $x_2(t)=0$ 的时刻，即

$$t_0=\inf\{t>0:x_2(t)=0\},$$

因此 $x_2'(t_0)=r\mathrm{e}^{-w\tau_1}x_2(t_0-\tau_1)>0$。所以对充分小的 $\varepsilon>0$ 使得 $x_2'(t_0-\varepsilon)>0$。而由 t_0 的定义，我们有 $x_2'(t_0-\varepsilon)\leqslant 0$。此矛盾表明对所有 $t>0$ 使得 $x_2(t)>0$。

由系统(4)的解的存在唯一性和当 $x_3(t)=0$，$t\neq n\tau$ 有 $x_3'(t)=0$，并且 $x_3(n\tau^+)=x_3(n\tau)+\mu$，$\mu\geqslant 0$。因此容易知道对所有 $t>0$ 有 $x_3(t)>0$。

最后，我们考虑下面的方程

$$s'(t)=-r\mathrm{e}^{-w\tau_1}x_2(t-\tau_1)-ws(t).\tag{8}$$

与系统(4)相比较，如果 $s(t)$ 是方程(8)的解，$x_1(t)$ 满足系统(4)，那么在 $0<t<\tau_1$ 上 $x_1(t)>s(t)$。由方程(8)可得

$$s(t)=\mathrm{e}^{-wt}\left[x_1(0)-\int_0^t r\mathrm{e}^{r(u-\tau_1)}x_2(u-\tau_1)\,\mathrm{d}u\right],$$

从式(7)可得

$$s(\tau_1)=e^{-w\tau_1}\left[\int_{-\tau_1}^{0} r e^{ws}\varphi_2(s)\mathrm{d}s-\int_0^{\tau_1} r e^{w(u-\tau_1)}x_2(u-\tau_1)\mathrm{d}u\right],$$

又 $x_2(t)=\varphi_2(t),\ t\in[-\tau_1,0]$，我们知道 $\int_{-\tau_1}^{0} r e^{ws}\varphi_2(s)\,\mathrm{d}s$ 和 $\int_0^{\tau_1} r e^{w(u-\tau_1)}x_2(u-\tau_1)\mathrm{d}u$ 是等价的。因此 $s(\tau_1)=0$，所以 $x_1(t)>0$。既然 $s(t)$ 是严减的，那么在 $t\in(0,\tau_1)$ 上有 $x_1(t)>s(t)>0$，即在 $0\leqslant t\leqslant\tau_1$ 上 $x_1(t)>0$。

由归纳法与参考文献[10]定理1的证明方法，我们容易知道对所有 $t\geqslant 0$ 有 $x_1(t)>0$ 成立。于是引理得证。

下面我们将得到系统(4)的解的一致完全有界。

引理2　存在一个常数 $M>0$，对于足够大的 t，使得系统(4)的任意解 $(x_1(t),x_2(t),x_3(t))$，有 $x_1(t)\leqslant M/k,\ x_2(t)\leqslant M/k,\ x_3(t)\leqslant M$。

证明　定义 $V(t)=kx_1(t)+kx_2(t)+x_3(t)$。所以 $t\neq n\tau$ 有

$$\begin{aligned}D^+V(t)+dV(t)&=-k(w-d)x_1+k(r+d-d_3-E)x_2(t)-kd_4x_2^2(t)\leqslant\\&k(r+d-d_3-E)x_2(t)-kd_4x_2^2(t)=\\&-kd_4\left(x_2(t)-\frac{r+d-d_3-E}{2d_4}\right)^2+\frac{k(r+d-d_3-E)^2}{4d_4}\leqslant M_0,\end{aligned}$$

其中 $M_0=k(r+d-d_3-E)^2/(4d_4)$。当 $t=n\tau$，$V(n\tau^+)=V(n\tau)+\mu$。由引理2.2(见文献[29])，对于 $(n\tau,(n+1)\tau]$，我们有

$$\begin{aligned}V(t)&\leqslant V(0)e^{-dt}+\int_0^t M_0e^{-d(t-s)}\mathrm{d}s+\sum_{0<n\tau<t}\mu e^{-d(t-n\tau)}=\\&V(0)e^{-dt}+\frac{M_0}{d}(1-e^{-dt})+\mu\frac{e^{-d(t-\tau)}-e^{-d(t-(n+1)\tau)}}{1-e^{d\tau}}<\\&V(0)e^{-dt}+\frac{M_0}{d}(1-e^{-dt})+\frac{\mu e^{-d(t-\tau)}}{1-e^{d\tau}}+\frac{\mu e^{d\tau}}{e^{d\tau}-1}\to\\&\frac{M_0}{d}+\frac{\mu e^{d\tau}}{e^{d\tau}-1},\qquad 当\ t\to\infty,\end{aligned}$$

所以 $V(t)$ 是一致完全有界的。由 $V(t)$ 的定义我们可以知道，对于足够大的 t，存在一个常数 $M>0$ 使得 $x_1(t)\leqslant M/k,\ x_2(t)\leqslant M/k,\ x_3(t)\leqslant M$。引理证明完毕。

注1　从引理2，很明显知道 $\limsup_{t\to\infty}V(t)<M_0/d+\mu e^{d\tau}/(e^{d\tau}-1)$。为了方便，我们作记号

$$M=\frac{M_0}{d}+\frac{\mu e^{d\tau}}{e^{d\tau}-1}.$$

引理3[26]　考虑下面的线性中立时滞方程

$$x'(t)+\lambda x'(t-\tau)+a_2x(t)-a_1x(t-\tau)=0,\tag{9}$$

如果 $|\lambda<1|$，$a_1^2<a_2^2$ 或 $-a_1=a_2$，那么 τ 的增性不会改变方程(9)的稳定性。

当 $\lambda=0$ 时，方程(9)变成了下面的方程

$$x'(t)=a_1x(t-\tau)-a_2x(t)=0,\tag{10}$$

对于 $-\tau\leqslant t\leqslant 0$，假设 $a_1,a_2,\tau>0$；$x(t)>0$。我们易得下面的引理。

引理4　对于方程(10)，假设 $a_1<a_2$，那么

$$\lim_{t\to\infty}x(t)=0.$$

引理5　考虑下面的脉冲系统:

$$\begin{cases} v'(t) = -dv(t), & t \neq n\tau, \\ v(n\tau^+) = v(n\tau) + \mu, & t = n\tau,\ n = 1,2,\cdots, \end{cases} \tag{11}$$

其中 $d,\mu > 0$. 那么系统(11)存在唯一的正的周期解

$$\widetilde{v(t)} = v^* \mathrm{e}^{-d(t-n\tau)}, \quad t \in (n\tau,(n+1)\tau],\ n \in \mathbf{Z}_+ \tag{12}$$

是全局渐进稳定的,其中 $v^* = \mu/(1-\mathrm{e}^{-d\tau})$.

对于系统(4),我们考虑下面的系统:

$$\begin{cases} x_3'(t) = -dx_3(t), & t \neq n\tau, \\ \Delta x_3(t) = \mu, & t = n\tau, n = 1,2,\cdots. \end{cases} \tag{13}$$

从式(12),我们知道系统(4)有一个害虫灭绝的周期解

$$(0,0,\widetilde{x_3(t)}) = (0,0,x_3^* \mathrm{e}^{-d(t-n\tau)}, \quad t \in (n\tau,(n+1)\tau],\ n \in \mathbf{Z}_+ \tag{14}$$

或者系统(5)有一个害虫灭绝的周期解

$$(0,\widetilde{x_3(t)}) = (0,x_3^* \mathrm{e}^{-d(t-n\tau)}, \quad t \in (n\tau,(n+1)\tau],\ n \in \mathbf{Z}_+ \tag{15}$$

是全局渐进稳定, $x_3^* = \mu/(1-\mathrm{e}^{-d\tau})$.

接着,我们讨论系统(4)的害虫灭绝周期解是全局吸引的.

定理 1 如果

$$\mu > \frac{k + aM}{k\beta}(r\mathrm{e}^{-w\tau_1} - d_3 - E)(1 - \mathrm{e}^{-d\tau})$$

成立,那么系统(4)的害虫灭绝的周期解 $(0,0,\widetilde{x_3(t)})$ 是全局吸引的.

证明 很明显系统(4)的害虫灭绝周期解 $(0,0,\widetilde{x_3(t)})$ 的全局吸引性,与系统(5)的害虫灭绝周期解 $(0,\widetilde{x_3(t)})$ 的全局吸引性是等价的. 所以我们只要考虑系统(5)的害虫灭绝周期解 $(0,\widetilde{x_3(t)})$ 的全局吸引性. 既然

$$\mu > \frac{k + aM}{k\beta}(r\mathrm{e}^{-w\tau_1} - d_3 - E)(1 - \mathrm{e}^{-d\tau}),$$

我们可以取充分小的 ε_0 使得

$$r\mathrm{e}^{-w\tau_1} < \frac{k\beta}{k + aM}\left(\frac{\mu}{1 - \mathrm{e}^{-d\tau}} - \varepsilon_0\right) + d_3 + E, \tag{16}$$

由系统(5)的第 2 个方程可得 $\mathrm{d}x_3(t)/\mathrm{d}t \geqslant -dx_3(t)$. 所以我们考虑下面的脉冲比较系统

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = -dx(t), & t \neq n\tau, \\ \Delta x(t) = \mu, & t = n\tau, \\ x(0^+) = x_3(0^+). \end{cases} \tag{17}$$

类似于系统(11),我们容易得到系统(17)的周期解

$$\widetilde{x(t)} = \widetilde{x_3(t)} = x_3^* \mathrm{e}^{-d(t-n\tau)}, \quad t \in (n\tau,(n+1)\tau], n \in \mathbf{Z}_+ \tag{18}$$

是全局渐进稳定的,其中 $x_3^* = \mu/(1-\mathrm{e}^{-d\tau})$. 由引理 5 和脉冲比较定理[30],当 $t \to \infty$ 时,我们可得 $x_3(t) \geqslant x(t)$ 和 $x(t) \to \widetilde{x_3(t)}$. 因此存在正整数 $k_2 > k_1, t > k_2$ 使得

$$x_3(t) \geqslant x(t) \geqslant \widetilde{x_3(t)} - \varepsilon_0, \quad n\tau < t \leqslant (n+1)\tau,\ n > k_2, \tag{19}$$

也就是

$$x_3(t) > \widetilde{x_3(t)} - \varepsilon_0 \geqslant \frac{\mu e^{-d\tau}}{1 - e^{-d\tau}} - \varepsilon_0 = \rho, \qquad n\tau < t \leqslant (n+1)\tau,\ n > k_2.$$

由式(5)和(19),我们可得

$$\frac{dx_2(t)}{dt} \leqslant re^{-w\tau_1}x_2(t-\tau_1) - \left(\frac{\beta\rho}{1 + aM/k} + d_3 + E\right)x_2(t), \qquad t > n\tau + \tau_1,\ n > k_2. \tag{20}$$

考虑下面的比较系统

$$\frac{dy(t)}{dt} = re^{-w\tau_1}y(t-\tau_1) - \left(\frac{\beta\rho}{1 + aM/k} + d_3 + E\right)y(t), \qquad t > n\tau + \tau_1,\ n > k_2. \tag{21}$$

由式(16),我们可得 $re^{-w\tau_1} < \beta\rho/(1 + aM/k) + d_3 + E$. 又由引理5,有 $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$. 设 $(x_2(t), x_3(t))$ 是系统(5)具初始条件(6)且 $x_2(\zeta) = \varphi_2(\zeta)(\zeta \in [-\tau_1, 0])$ 的解,$y(t)$ 是系统(21)具初始条件 $y(\zeta) = \varphi_2(\zeta)(\zeta \in [-\tau_1, 0])$ 的解. 由比较定理,易得 $\lim_{t\to\infty} x_2(t) < \lim_{t\to\infty} y(t) = 0$. 考虑到 $x_2(t)$ 的正性,我们得到

$$\lim_{t\to\infty} x_2(t) = 0. \tag{22}$$

因此,对充分小的 $\varepsilon_1 > 0$,存在一个正整数 $k_3(k_3\tau > k_2\tau + \tau_1)$ 对所有 $t > k_3\tau$ 使得 $x_2(t) < \varepsilon_1$. 由系统(5),可得

$$-dx_3(t) \leqslant \frac{dx_3(t)}{dt} \leqslant \left(-d + \frac{k\beta\varepsilon_1}{1 + a\varepsilon_1}\right)x_3(t). \tag{23}$$

因此,当 $t \to \infty$ 时,有 $z_1(t) \leqslant x_3(t) \leqslant z_2(t)$ 和 $z_1(t) \to \widetilde{x_3(t)}$, $z_2(t) \to \widetilde{x_3(t)}$,而 $z_1(t)$ 和 $z_2(t)$ 分别是

$$\begin{cases} \dfrac{dz_1(t)}{dt} = -dz_1(t), & t \neq n\tau, \\ z_1(t^+) = z_1(t) + \mu, & t = n\tau, \\ z_1(0^+) = x_3(0^+) \end{cases} \tag{24}$$

与

$$\begin{cases} \dfrac{dz_2(t)}{dt} = \left(-d + \dfrac{k\beta\varepsilon_1}{1 + a\varepsilon_1}\right)z_2(t), & t \neq n\tau, \\ z_2(t^+) = z_2(t) + \mu, & t = n\tau, \\ z_2(0^+) = x_3(0^+) \end{cases} \tag{25}$$

的解. 在 $n\tau < t \leqslant (n+1)\tau$ 上 $\widetilde{z_2(t)} = \mu\exp((-d + k\beta\varepsilon_1/(1 + a\varepsilon_1))(t - n\tau))/[1 - \exp((-d + (k\beta\varepsilon_1/(1 + a\varepsilon_1)))\tau)]$. 因此,对于任意小的 $\varepsilon_2 > 0$,存在整数 $k_4, n > k_4$ 使得

$$\widetilde{x_3(t)} - \varepsilon_2 < x_3(t) < \widetilde{z_2(t)} + \varepsilon_2.$$

由于 $\varepsilon_1 \to 0$, t 充分大,有

$$\widetilde{x_3(t)} - \varepsilon_2 < x_3(t) < \widetilde{x_3(t)} + \varepsilon_2,$$

所以当 $t \to \infty$ 时,我们可得 $x_3(t) \to \widetilde{x_3(t)}$. 定理证明完毕.

推论 1 如果

$$\mu > \frac{re^{-w\tau_1}(k + aM)}{k\beta}(1 - e^{-w\tau})$$

成立,那么系统(4)的害虫灭绝的周期解 $(0,0,\widetilde{x_3(t)})$ 是全局吸引的.

推论 2 如果

$$\tau < \frac{1}{w}\ln\frac{re^{-w\tau_1}}{re^{-w\tau_1} - (k\beta/(k + aM))\mu}$$

成立,那么系统(4)的害虫灭绝的周期解 $(0,0,\widetilde{x_3(t)})$ 是全局吸引的.

接下来,我们证明系统的持久性.在证明之前,我们先给出持久的定义.

定义 1 如果存在常数 $m,M > 0$(与初值无关)与有限时间 T_0,当 $t \geqslant T_0$ 时,使得系统(4)的所有解$(x_1(t),x_2(t),x_3(t))$(其中初值 $x_1(0^+) > 0,x_2(0^+) > 0,x_3(0^+) > 0$),有 $m \leqslant x_1(t) < M/k,m \leqslant x_2(t) \leqslant M/k,m \leqslant x_3(t) \leqslant M$ 成立,那么就称系统(4)是持久的.

定理 2 假设

$$\mu < \frac{1}{\beta}(re^{-w\tau_1} - d_3 - E - d_4M)(1 - e^{(k\beta x_2^* - d)\tau}),$$

那么存在一个正数 q,当 t 充分大时,使得系统(5) 的每一个正解$(x_2(t),x_3(t))$ 满足

$$x_2(t) \geqslant q,$$

其中 $$x_2^* = \frac{1}{k\beta}\left[d + \frac{1}{\tau}\ln\left(1 - \frac{\beta\mu}{re^{-w\tau_1} - d_3 - E - d_4M}\right)\right] > 0.$$

证明 系统(5)的第 1 个方程可以重新写成

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = \left[re^{-w\tau_1} - \frac{\beta x_3(t)}{1 + ax_2(t)} - d_3 - E - d_4x_2(t)\right]x_2(t) - re^{-w\tau_1}\frac{d}{dt}\int_{t-\tau_1}^{t}x_2(u)du, \tag{26}$$

因此定义 $V(t)$ 为

$$V(t) = x_2(t) + re^{-w\tau_1}\frac{d}{dt}\int_{t-\tau_1}^{t}x_2(u)du. \tag{27}$$

沿系统(5)的解,求 $V(t)$ 的导数得

$$\frac{dV(t)}{dt} = \left[re^{-w\tau_1} - \frac{\beta x_3(t)}{1 + ax_2(t)} - d_3 - E - d_4x_2(t)\right]x_2(t). \tag{28}$$

由引理 2,可得

$$\frac{dV(t)}{dt} > [re^{-w\tau_1} - \beta x_3(t) - d_3 - E - d_4M]x_2(t). \tag{29}$$

既然 $$\mu < \frac{1}{\beta}(re^{-w\tau_1} - d_3 - E - d_4M)(1 - e^{(k\beta x_2^* - d)\tau}),$$

于是存在充分小的 $\varepsilon > 0$, 使得

$$\frac{1}{\beta}(re^{-w\tau_1} - d_3 - E - d_4M) > \frac{\mu}{1 - e^{(k\beta x_2^* - d)\tau}} - \varepsilon. \tag{30}$$

所以我们断言:对任意 $t_0 > 0$,当 $t > t_0$ 时,$x_2(t) < x_2^*$ 是不可能成立的. 否则,存在一个 $t_0 > 0$,当 $t > t_0$ 时,$x_2(t) < x_2^*$ 成立. 由系统(5)的第 2 个方程可得

$$\frac{dx_3(t)}{dt} < (k\beta x_2^* - d)x_3(t). \tag{31}$$

对所有 $t > t_1$,我们考虑下面的脉冲比较系统:

$$\begin{cases}\dfrac{dv(t)}{dt} = (k\beta x_2^* - d)x_3(t), & t \neq n\tau,\\ \Delta v(t) = \mu, & t = n\tau.\end{cases} \tag{32}$$

由引理 1,可得 $\widetilde{v(t)} = v^* e^{(k\beta x_2^* - d)(t - n\tau)}$, $n\tau < t \leqslant (n+1)\tau$(其中 $v^* = \mu/(1 - e^{(k\beta x_2^* - d)\tau})$ 是系统(32)唯一正周期解,且其是全局渐进稳定的. 根据脉冲微分方程比较定理[29],可知存在 $t_1(> t_0 - \tau_1)$,当 $t \geqslant t_1$ 时,使得下面的不等式

$$x_3(t) \leqslant \widetilde{v(t)} + \varepsilon \tag{33}$$

成立. 因此,对所有 $t \geqslant t_1$,

$$x_3(t) \leqslant v^* + \varepsilon \tag{34}$$

成立. 为了方便,我们再作记号 $\sigma = v^* + \varepsilon$. 由式(30)可得

$$re^{-w\tau_1} > \beta\sigma + d_3 + E + d_4 M.$$

又由式(29)与式(34),对所有 $t > t_1$,有

$$V'(t) > x_2(t)(re^{-w\tau_1} - \beta\sigma - d_3 - E - d_4 M). \tag{35}$$

设

$$x_2^m = \min_{t \in [t_1, t_1 + \tau_1]} x_2(t),$$

对于 $t \geqslant t_2$,我们将得到 $x_2(t) \geqslant x_2^m$. 否则,存在某个 $T_0 > 0$,当 $t_1 \leqslant t \leqslant t_1 + \tau_1 + T_0$ 时,使得 $x_2(t) \geqslant x_2^m$, $x_2(t_1 + \tau_1 + T_0) = x_2^m$ 且 $x_2'(t_1 + \tau_1 + T_0) < 0$. 因此,由系统(5)的第 1 个方程与式(34)可得

$$\begin{aligned} x_2'(t_1 + \tau_1 + T_0) = {} & re^{-w\tau_1} x_2(t_1 + T_0) - \frac{\beta x_2(t_1 + \tau_1 + T_0) x_3(t_1 + \tau_1 + T_0)}{1 + \alpha x_2(t_1 + \tau_1 + T_0)} - \\ & (d_3 + E) x_2(t_1 + \tau_1 + T_0) - d_4 x_2^2(t_1 + \tau_1 + T_0)) \geqslant \\ & (re^{-w\tau_1} - \beta\sigma - d_3 - E - d_4 M) x_2^m > 0, \end{aligned} \tag{36}$$

这和 $x_2'(t_1 + \tau_1 + T_0) < 0$ 矛盾. 因此,对所有 $t > t_1$ 有 $x_2(t) \geqslant x_2^m$. 对于 $t > t_1$,由式(30)与(35)得到

$$V'(t) > x_2^m(re^{-w\tau_1} - \beta\sigma - d_3 - E - d_4 M) > 0, \tag{37}$$

这表明,当 $t \to \infty$ 时,有 $V(t) \to \infty$. 此与 $V(t) \leqslant M(1 + r\tau_1 e^{-w\tau_1})$ 矛盾. 所以,前面的断言是正确的.

根据此断言,我们只要考虑两种情形. 第 1 种情形是对所有充分大的 t 有 $x_2(t) \geqslant x_2^*$. 第 2 种情形是对充分大的 t 有 $x_2(t)$ 在 x_2^* 振动.

定义

$$q = \min\left\{\frac{x_2^*}{2}, q_1\right\}, \tag{38}$$

其中 $q_1 = x_2^* e^{-(\beta M + d_3 + E + d_4 M)\tau_1}$. 我们希望得到对于充分大的 t 有 $x_2(t) \geqslant q$. 此结论对于第 1 种情形是很明显的. 而对于第 2 种情形,对于所有 $t^* < t < t^* + \xi$,设 $t^* > 0$ 和 $\xi > 0$ 满足 $x_2(t^*) = x_2(t^* + \xi) = x_2^*$ 且 $x_2(t) < x_2^*$,其中 t^* 充分大使得

$$x_2(t) > \sigma, \qquad 当\ t^* < t < t^* + \xi,$$

$x_2(t)$ 是一致连续. 系统(5)的正解是一致有界且 $x_2(t)$ 并没有受脉冲的影响. 因此,存在某个 $T(0 < T < \tau_1$ 且 T 依赖于 $t^*)$ 使得 $x_2(t^*) > (x_2^*/2)$ $(t^* < t < t^* + T)$. 如果 $\xi < T$,结论非常明显. 我们只需要考虑 $T < \xi < \tau_1$ 情形. 既然 $x_2'(t) > -(\beta M + d_3 + E + d_4 M) x_2(t)$ 且 $x_2(t^*) = x_2^*$,那么对于 $t \in [t^*, t^* + \tau_1]$, $x_2(t) \geqslant q_1$ 成立. 因此上述证明

可以类似继续做下去。而对于 $t\in[t^*+\tau_1, t^*+\xi]$，我们可得 $x_2(t)\geqslant q_1$。因为此类区间 $t\in[t^*, t^*+\xi]$ 可以任意的选取(仅仅要求 t^* 足够大)。所以对于足够大的 t，可以得到结论 $x_2(t)\geqslant q$。在第 2 种情形中，类似上面的讨论，q 的选择不依赖系统(4) 的正解，因此，对于充分大的 t，可得系统(5) 任何正解满足 $x_2(t)\geqslant q$。定理证完。

定理 3　如果

$$\mu<\frac{1}{\beta}(re^{-w\tau_1}-d_3-E-d_4M)(1-e^{(k\beta x_2^*-d)\tau})$$

成立，那么系统(4) 是持久的。

证明　系统(4) 的任意解记作 $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$。由系统(4) 的第 2 个方程与定理 2，可得

$$\begin{cases}\dfrac{dx_3(t)}{dt}\geqslant x_3(t)\left(\dfrac{k\beta q}{1+aq}-d\right), & t\neq n\tau,\\ \Delta x_3=\mu, & t=n\tau.\end{cases}\tag{39}$$

类似定理 1 的证明过程，易得

$$\lim_{t\to\infty}x_3(t)\geqslant p,\tag{40}$$

其中　$p=\mu\exp((k\beta q/(1+aq)-d)\tau)/[1-\exp((k\beta q/(1+aq)-d)\tau)]-\varepsilon$。

参照定理 1 的证明，系统(4) 的第 1 个方程变成

$$\frac{dx_1(t)}{dt}\geqslant r(q-e^{-w\tau_1}M)-wx_1(t),\tag{41}$$

于是易得

$$\lim_{t\to\infty}x_1(t)\geqslant\delta,\tag{42}$$

其中 $\delta=r(q-e^{-w\tau_1}M)/w-\varepsilon$。由定理 2 和上面的讨论可知系统(4) 是持久的。定理证明完毕。

注 2　由定理 1 和定理 3，我们容易猜测到一定存在一个阈值 μ^*。如果 $\mu>\mu^*$，系统(4) 的害虫灭绝的边界周期解 $(0,0,\widetilde{x_3(t)})$ 是全局吸引的。如果 $\mu<\mu^*$，系统(4) 是持久的。

3　讨　　论

根据害虫治理的实际情况，本文讨论了一类食饵具脉冲效应与捕食者具化学控制的阶段结构时滞 Holling Ⅱ 捕食-食饵模模型，得到了系统的灭绝周期解的全局吸引和此系统持久的充分条件。此模型能够解释许多害虫治理的实际情况，比如，草原上蝗虫的卵不能够被它的天敌(某些鸟类) 所捕食，同时化学农药对这些鸟类的危害也比较小。通过分析此模型，我们有些新的有趣的问题：怎样优化天敌的释放量?怎样去根据害虫的状态确定释放天敌的脉冲时刻?脉冲释放天敌是怎样影响此系统的?而在现实的害虫治理中，虫害是季节性的，所以我们怎样在有限的时间段上去讨论脉冲释放天敌?怎样去得到害虫控制阈值?基于这些问题，我们今后将继续研究。

[参　考　文　献]

[1]　Barclay H J. Models for pest control using predator release, habitat management and pesticide release in combineation[J]. J Appl Ecol, 1982, **19**(2): 337-348.

[2]　Paneyya J C. A mathematical model of periodically pulse chemotherapy: tumor recurrence and

metastasis in a competition environment[J]. Bull Math Biol, 1996, **58**(3): 425-447.

[3] d́ Onofrio A. Stability properties of pulse vaccination strategy in SEIR epidemic model[J]. Math Biol, 2002, **179**(1): 57-72.

[4] Roberts M G, Kao R R. The dynamics of an infectious disease in a population with birth pulse[J]. Math Biol, 2002, **149**: 23-36.

[5] Hethcote H. The mathematics of infectious disease[J]. SIAM Review, 2002, **42**(4): 599-653.

[6] DeBach P. Biological Control of Insect Pests and Weeds[M]. New York: Rheinhold, 1964.

[7] DeBach P, Rosen D. Biological Control by Natural Enemies[M]. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.

[8] Freedman H J. Graphical stability, enrichment, and pest control by a natural enemy[J]. Math Biosci, 1976, **31**(3/4): 207-225.

[9] Grasman J, Van Herwaarden O A, et al. A two-component model of host-parasitoid interactions: determination of the size of inundative releases of parasitoids in biological pest control[J]. Math Biosci, 2001, **169**(2): 207-216.

[10] Caltagirone L E, Doutt R L. Global behavior of an SEIRS epidemic model with delays, the history of the vedalia beetle importation to California and its impact on the development of biological control[J]. Ann Rev Entomol, 1989, **34**: 1-16.

[11] Freedman H I, Gopalsamy K. Global stability in time-delayed single species dynamics[J]. Bull Math Biol, 1986, **48**(5/6): 485-492.

[12] Zaghrout A A S, Attalah S H. Analysis of a model of stage-structured population dynamics growth with time state-dependent time delay[J]. Appl Math Comput, 1996, **77**(2): 185-194.

[13] Aiello W G, Freedman H I. A time-delay model of single-species growth with stage-structure[J]. Math Biosci, 1990, **101**(2): 139-153.

[14] Aiello W G. The existence of nonoscillatory solutions to a generalized, nonautonomous, delay logistic equation[J]. J Math Anal Appl, 1990, **149**(1): 114-123.

[15] Rosen G. Time delays produced by essential nonlinearity in population growth models[J]. Bull Math Biol, 1987, **49**(2): 253-255.

[16] Wangersky P J, Cunningham W J. On time large equations of growth[J]. Proc Nat Acad Sci USA, 1956, **42**(9): 699-702.

[17] Fisher M E, Goh B S. Stability results for delay-recruitment models in population dynamics[J]. J Math Biol, 1984, **19**: 117.

[18] Wang W. Global behavior of an SEIRS epidemic model with delays[J]. Appl Math Letters, 2002, **15**(4): 423-428.

[19] Xiao Y N, Chen L S. A ratio-depengent predator-prey model with disease in the prey[J]. Appl Math Comput, 2002, **131**(2/3): 397-414.

[20] Xiao Y N, Chen L S. An SIS epidemic model with stage structure and a delay[J]. Acta Math Appl, English Series, 2002, **18**(4): 607-618.

[21] Xiao Y N, Chen L S, Bosh F V D. Dynamical behavior for stage-structured SIR infectious disease model[J]. Nonlinear Analysis: RWA, 2002, **3**(2): 175-190.

[22] Xiao Y N, Chen L S. On an SIS epidemic model with stage-structure[J]. J System Science and Complexity, 2003, **16**(2): 275-288.

[23] Lu Z H, Gang S J, Chen L S. Analysis of an SI epidemic with nonlinear transmission and stage structure[J]. Acta Math Science, 2003, **23**(4): 440-446.

[24] Aiello W G, Freedman H I, Wu J. Analysis of a model representing stage-structured population

growth with state dependent time delay[J]. SIAM, J Appl Math, 1992, **52**(3): 855-869.

[25] Murray J D. Mathematical Biology [M]. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1989.

[26] YANG Kuang. Delay Differential Equation With Application in Population Dynamics[M]. N Y: Academic Press, 1987, 67-70.

[27] Cull P. Global stability for population models[J]. Bull Math Biol, 1981, **43**(1): 47-58.

[28] LIU Xian-ning, CHEN Lan-sun. Compex dynamics of Holling type II Lotka-Volterra predator-prey system with impulsive perturbations on the predator[J]. Chaos, Soliton and Fractals, 2003, **16**(2): 311-320.

[29] Lakshmikantham V, Bainov D D, Simeonov P. Theory of Impulsive Differential Equations [M]. Singapor: World Scientific, 1989.

[30] Bainov D, Simeonov P. Impulsive Differential Equations: Periodic Solutions and Applications [M]. England: Longman, 1993.

Delayed Stage-Structured Predator-Prey Model With Impulsive Perturbations on Predator and Chemical Control on Prey

JIAO Jian-jun[1,2], CHEN Lan-sun[2]

(1. School of Mathematics and Statistics, Guizhou College of Finance & Economics, Guiyang 550004, P. R. China;

2. Department of Applied Mathematics, Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116024, P. R. China)

Abstract: A delayed stage-structured pest management predator-prey system with impulsive transmitting on predators and chemical on prey concern was considered. Sufficient conditions of the global attractivity of pest-extinction boundary periodic solution and permanence of the system were obtained. It was also proved that all solutions of the system are uniformly ultimately bounded. The results provide reliable tactical basis for the practical pest management.

Key words: stage-structured; delayed; impulsive; global attractivity; permanence; pest-extinction