

# PSE 在超音速边界层二次失稳 问题中的应用\*

张永明<sup>1</sup>, 周 恒<sup>1,2</sup>

(1. 天津大学 力学系, 天津 300072;

2. 南开大学 天津大学 刘徽应用数学中心, 天津 300072)

(我刊编委周恒来稿)

**摘要:** 用抛物化稳定性方程(PSE)研究超音速边界层中的二次失稳问题. 结果显示无论二维基本扰动是第一模态还是第二模态的 T-S 波, 二次失稳机制都起作用. 三维亚谐波的最大放大率随其展向波数和二维基本波幅值的变化关系与不可压缩边界层中所得类似. 但是, 即使二维波的幅值大到 2% 的量级, 三维亚谐波的最大放大率仍远小于最不稳定的第二模态二维 T-S 波的放大率. 因此, 二次失稳应该不是导致超音速边界层转捩的主要因素.

**关键词:** 抛物化稳定性方程; 二次失稳; 基本扰动; 亚谐波

**中图分类号:** O357.41      **文献标识码:** A

## 引 言

层流到湍流的转捩一直是人们感兴趣的问题. 对于不可压缩流来说, 转捩可以由二维小扰动的线性放大开始. 当二维扰动幅值大到一定程度, 非线性作用就会激发出三维扰动, 它开始对转捩起重要作用并最终导致流动变为湍流. Herbert<sup>[1-3]</sup> 所引入的二次失稳机制, 就是三维扰动得以被激发的可能原因之一. 用流动显示技术发现的  $\Lambda$  结构, 从实验<sup>[4]</sup> 上证实了该机制的存在. 此外, 还得到了三维亚谐波的放大率随其展向波数的变化关系<sup>[5-7]</sup>.

本文关心的问题是这一机制对超音速边界层是否起作用. 目前, 这方面的工作还很少. Maslov 所做的实验是其中之一, 他在转捩过程中发现了亚谐波, 但这只是用热线风速仪测量到了亚谐波信号, 很难确定它是由二次失稳产生的. 另一个就是董亚妮和周恒<sup>[8]</sup> 所作的数值研究. 他们通过直接数值模拟(DNS)证实了二次失稳机制存在, 并且找到了亚谐波的放大率随其展向波数和二维基本波幅值的变化关系. 但是 DNS 耗时太多, 研究的算例很有限, 所以董亚妮和周恒没有给出能产生不稳定亚谐波的基本波的门槛值.

\* 收稿日期: 2007-12-04; 修订日期: 2007-12-19

基金项目: 国家自然科学基金(重点)资助项目(10632050); 国家自然科学基金(重大)研究计划资助项目(90716007); 南开大学天津大学刘徽应用数学中心资助项目

作者简介: 张永明(1979—), 男, 云南人, 博士生(Tel: + 86-22-27403374; E-mail: yongmingzh@yahoo.com.cn);

周恒(联系人, Tel: + 86-22-27890533; Fax: + 86-22-27407025; E-mail: hzhou1@tju.edu.cn).

近年来发展出了 PSE 方法<sup>[9,11]</sup>, 此法所需计算时间要少得多. 张永明和周恒<sup>[12]</sup>检验了 PSE 方法在可压缩边界层中的有效性, 发现 PSE 的结果与 DNS 的结果相当一致. 因此, PSE 可以作为一种可靠的工具来研究超音速边界层中的扰动演化.

本文用 PSE 方法研究超音速边界层中的二次失稳.

## 1 控制方程

由完全的 Navier-Stokes(N-S) 方程出发, 先推出完全的扰动方程. 再针对扰动特点推出稳定性方程, 最后利用边界层厚度沿流向增长缓慢的性质将其抛物化而得到 PSE.

用上标\* 表示无量纲的量, 三维笛卡尔坐标系下的完全 N-S 方程为

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \dots \cdot (\rho^* \mathbf{V}^*) = 0, \\ \rho^* \left[ \frac{\partial \mathbf{V}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{V}^* \cdot \dots) \mathbf{V}^* \right] = \\ \quad - \dots p^* - \dots \times [\mu^* (\dots \times \mathbf{V}^*)] + \dots [(\lambda^* + 2\mu^*) \dots \cdot \mathbf{V}^*], \\ \rho^* c_p \left[ \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + (\mathbf{V}^* \cdot \dots) T^* \right] = \\ \quad \dots (k^* \dots T^*) + \frac{\partial p^*}{\partial t^*} + (\mathbf{V}^* \cdot \dots) p^* + \Phi^*, \\ p^* = \rho^* R^* T^*, \end{array} \right. \quad (1)$$

其中  $\mathbf{V}^* = (u^*, v^*, w^*)^T$  是速度矢量,  $t^*$  是时间,  $\rho^*$  是密度,  $p^*$  是压力,  $T^*$  是温度,  $c_p^*$  是比热,  $k^*$  是热传导系数,  $\mu^*$  是第 1 粘性系数,  $\lambda^*$  是第 2 粘性系数,  $R^*$  为普适气体常数.  $\Phi^*$  为粘性耗散函数, 表示为

$$\Phi^* = 2\mu^* \mathbf{S}^* : \mathbf{S}^* + \lambda^* (\dots \cdot \mathbf{V}^*)^*, \quad (2)$$

其中  $\mathbf{S}^*$  为应变率张量.

为了将方程无量纲化, 取特征长度  $l_0^* = \sqrt{\gamma_e^* x_0^* / \mu_e^*}$ , 其中  $x_0^*$  为平板前缘到计算域入口的距离,  $\gamma_e^*$  为运动粘性系数,  $\mu_e^*$  为自由来流速度, 下标 e 表示边界层外缘处之值. 其它的特征量有自由流速度  $u_e^*$  及自由流温度  $T_e^*$ . 平板前缘到计算域入口无量纲距离为  $x_0 = x_0^* / l_0^* = \sqrt{u_e^* x_0^* / \gamma_e^*}$ , 当地的 Reynolds 数为  $Re_0 = u_e^* l_0^* / \gamma_e^* = \sqrt{u_e^* x_0^* / \gamma_e^*} = x_0$ . 使用这些参考量就可以得到无量纲的 N-S 方程.

将瞬时量设为定常基本流与扰动量之和

$$\left\{ \begin{array}{l} u = u + u', \quad v = v + v', \quad w = w + w', \\ \rho = \rho + \rho', \quad T = T + T', \quad p = p + p', \\ \mu = \mu + \mu', \quad \lambda = \lambda + \lambda', \quad k = k + k', \end{array} \right. \quad (3)$$

其中上标表示基本流, 上角标' 表示扰动量. 将(3)式代入无量纲 N-S 方程, 并减去定常基本流满足的方程, 得到扰动方程

$$\begin{aligned} & V_{xx} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + V_{yy} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + V_{zz} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + V_{xy} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + V_{xz} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} + V_{yz} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} + \\ & \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial t} + A \frac{\partial \phi}{\partial x} + B \frac{\partial \phi}{\partial y} + C \frac{\partial \phi}{\partial z} + D \phi \right) = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

其中  $\phi$  为扰动矢量  $\phi = (\rho', u', v', w', T')^T$ . 系数矩阵  $V_{xx}, V_{yy}, V_{zz}, V_{xy}, V_{xz}, V_{yz}, \Gamma, A, B,$

$C, D$  都由线性部分与非线性部分组成, 二者分别用上标  $l$  和  $n$  表示, 则这些矩阵可记为

$$\begin{aligned} V_{xx} &= V_{xx}^l + V_{xx}^n, & V_{yy} &= V_{yy}^l + V_{yy}^n, & V_{zz} &= V_{zz}^l + V_{zz}^n, \\ V_{xy} &= V_{xy}^l + V_{xy}^n, & V_{xz} &= V_{xz}^l + V_{xz}^n, & V_{yz} &= V_{yz}^l + V_{yz}^n, \\ \Gamma &= \Gamma^l + \Gamma^n, & A &= A^l + A^n, & B &= B^l + B^n, & C &= C^l + C^n, & D &= D^l + D^n. \end{aligned}$$

扰动方程(4)可改写为如下形式

$$\begin{aligned} &V_{xx}^l \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + V_{yy}^l \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + V_{zz}^l \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + V_{xy}^l \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + V_{xz}^l \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} + V_{yz}^l \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} + \\ &\left[ \Gamma^l \frac{\partial \phi}{\partial t} + A^l \frac{\partial \phi}{\partial x} + B^l \frac{\partial \phi}{\partial y} + C^l \frac{\partial \phi}{\partial z} + D^l \phi \right] = F^n, \end{aligned} \quad (5)$$

其中右边的矢量函数表示扰动的非线性项. 为了研究非线性问题, 将扰动设为如下形式

$$\phi(x, y, z, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\phi}_{mn}(x, y) \exp \left[ i \left[ \int_{x_0}^x \alpha_{mn}(x) dx + n\beta - m\omega t \right] \right], \quad (6)$$

其中  $\hat{\phi}_{mn} = (\rho_{mn}, \hat{u}_{mn}, \hat{v}_{mn}, \hat{w}_{mn}, T_{mn})^T$  为形状函数,  $\alpha_{mn}$  为流向波数,  $n\beta$  为展向波数,  $n\omega$  为频率. 实际计算中, 只能在上述表达式中保留有限多项, 这里取  $m$  从  $-7$  到  $7$ ,  $n$  从  $-3$  到  $3$ . 将(6)式代入(5)式, 再去掉方程中  $1/(Re_0^2)$  量级的项, 并将频率和展向波数相同的项放在一起, 则对每一个模数  $(m, n)$  的形状函数, 有如下的抛物化稳定性方程

$$\begin{aligned} &V_{yy}^l \frac{\partial^2 \hat{\phi}_{mn}}{\partial y^2} + \left[ A_{mn} \frac{\partial \hat{\phi}_{mn}}{\partial x} + B_{mn} \frac{\partial \hat{\phi}_{mn}}{\partial y} + D_{mn} \hat{\phi}_{mn} \right] = F_{mn}, \\ &m = 0, \pm 1, \pm 2L, n = 0, \pm 1, \pm 2L, \end{aligned} \quad (7)$$

其中  $F_{mn}$  是模数为  $(m, n)$  时的非线性项. 由于  $\phi(x, y, z, t)$  是实数, 所以只需对  $m \geq 0$  的项进行计算, 其它的项为它们的共轭.

壁面处的边界条件为无滑移和等温条件

$$\hat{u}_{mn} = \hat{v}_{mn} = \hat{w}_{mn} = T_{mn} = 0, \quad y = 0. \quad (8)$$

边界层外使用自由流条件

$$\hat{u}_{mn} = \hat{v}_{mn} = \hat{w}_{mn} = T_{mn} = 0, \quad y \rightarrow \infty. \quad (9)$$

对于模数  $(0, 0)$  则改用边界条件

$$\hat{u}_{00} = \frac{\partial \hat{v}_{00}}{\partial y} = \hat{w}_{00} = T_{00} = 0, \quad y \rightarrow \infty, \quad (10)$$

此条件使得平均流修正得以调节得使质量保持平衡.

## 2 数值方法

流向使用等间距网格, 步长须小于基本扰动波长的  $1/20$ . 法向使用变间距网格, 靠近壁面处网格较密. 为了在法向使用高精度差分格式, 通过下式将坐标  $y$  变换为新坐标  $\eta$

$$\eta = \eta(y), \quad (11)$$

使得在新坐标中的网格点等间距分布. 方程也要做相应的变换.

流向使用二阶单边差分格式

$$\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x_i} = \frac{3}{2} \frac{1}{\Delta x} \hat{\phi}_i + \left[ -\frac{2}{\Delta x} \right] \hat{\phi}_{i-1} + \left[ \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta x} \right] \hat{\phi}_{i-2}. \quad (12)$$

坐标  $\eta$  的导数使用四阶中心差分格式

$$\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \eta} = \frac{-\hat{\phi}_{+2} + 8\hat{\phi}_{+1} - 8\hat{\phi}_{-1} + \hat{\phi}_{-2}}{12\Delta\eta} \quad (13)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial \eta^2} = \frac{-\hat{\phi}_{+2} + 16\hat{\phi}_{+1} - 30\hat{\phi}_{+0} + 16\hat{\phi}_{-1} - \hat{\phi}_{-2}}{12\Delta\eta^2} \quad (14)$$

靠近边界处差分格式需相应降阶.

### 3 结果和讨论

本文研究了两种情况, 即二维基本扰动分别为第一模态和第二模态的 T-S 波.

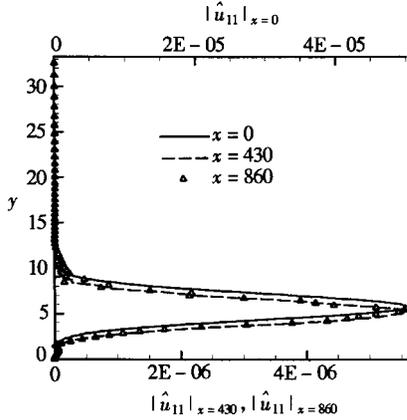


图 1  $x = 0, x = 430, x = 860$  处三维亚谐波剖面  $|u_{11}|$

#### 3.1 二维基本扰动为第一模态 T-S 波的情况

基本流为 Blasius 相似性解, 马赫数  $M = 4.5$ , 雷诺数  $Re_0 = 10471$ , 计算域入口处加入 1 个二维 T-S 波和 1 个三维波. 为方便起见, 二维基本扰动取为模数为 (2, 0) 的波, 三维亚谐波则取为模数为 (1, 1) 的波. 二维波是放大率不大的第一模态 T-S 波, 其频率  $\omega_{2d} = 0.0533$ , 流向波数  $\omega_{2d} = 0.0642$ , 其形状函数通过求解线性稳定性理论 (LST) 中的 Orr-Sommerfeld 方程得出. 三维波的频率是二维波的一半, 流向波数亦如此, 即  $\omega_{3d} = 0.0267$ ,  $\alpha_{3d} = 0.0321$ , 其形状函数可以是  $y$  的任意函数, 但要满足边界条件. 二维波的初始幅值  $A_{2d}$  选取了 1% 量级的几个不同的值, 三维波的初始幅值  $A_{3d}$  为 0.01%.

取  $A_{2d} = 1.2\%$ , 三维波展向波数  $\beta = 0.2327$ , 图 1 画出了三维波的形状函数沿流向的变化. 从入口至  $x = 430$  处, 剖面形状一直有变化,  $|u_{11}|$  最大值的位置从  $y = 5.8$  变到了  $y = 5.3$ , 再向下游则不再变化. 图 2 画出了三维波的幅值沿流向的变化, 从入口至  $x = 430$  处, 它经过了剧烈得变化, 此后则缓慢增长. 三维波放大率的变化与幅值的情况类似, 如图 3 所示. 经过入口附近处的调整之后, 在超音速边界层中发现了不稳定的三维亚谐波 ( $\sigma > 0$ ), 从而证实了二次失稳机制确实起作用.

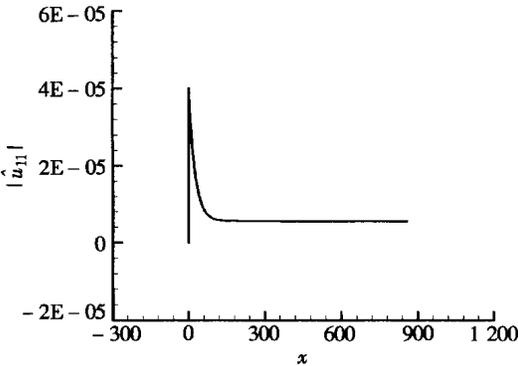


图 2  $y = 5.3$  处三维波幅值

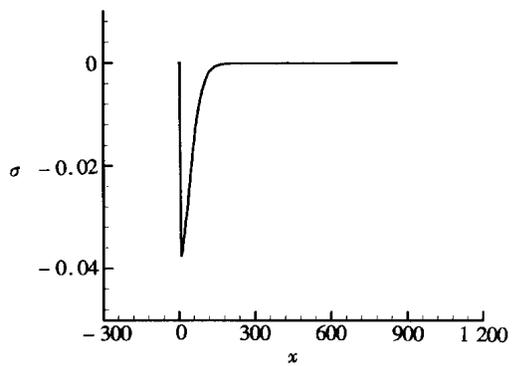


图 3 由  $y = 5.3$  处幅值得到的三维波放大率

为了确定所得的亚谐波放大率是可靠的,  $A_{3d}$  取了 3 个不同的值, 即 0.01%、0.001% 和 0.0001%, 其它参数不变, 所得三维波的幅值和放大率的变化情况分别见图 4 和 5. 对于 3 个足够小的扰动, 虽然其幅值在量级上彼此不同, 但是它们的放大率却完全一致, 从而证实了这

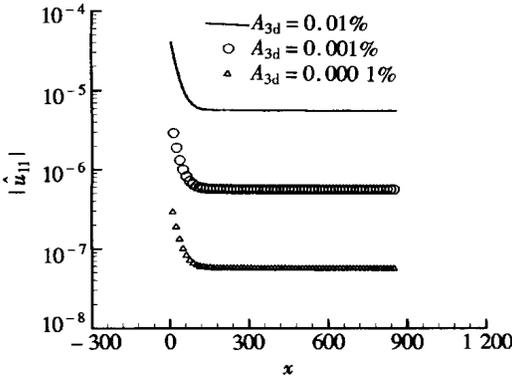


图 4  $y = 5.3$  处三维波幅值

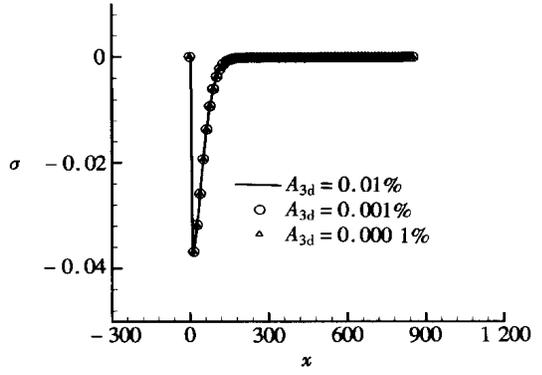


图 5 由  $y = 5.3$  处幅值得到的三维波放大率

里所得的三维波放大率是可靠的。

对不同的  $A_{2d}$  和  $\beta$  进行了计算, 结果画在图 6 中, 其中  $\sigma$  表示  $x = 860$  处三维波的放大率,  $A$  表示  $x = 860$  处的二维波幅值. 由图 6 可得到如下结论:

- 1) 随着  $\beta$  的变化, 对于每个  $A$ ,  $\sigma$  的最大值都出现在  $\beta = 0.2327$  处. 因为  $\beta$  是间断变化的, 图中的曲线也只是简单的将相邻结果用直线相连而得到的, 所以最大值未必正好出现在  $\beta = 0.2327$  处, 但也应该是与其相差不多的某个值;
- 2) 随着  $A$  增大,  $\sigma$  的最大值也增大;
- 3) 只有当  $A \geq 1.09\%$  时才会出现不稳定的三维波, 对于小于该门限的  $A$ , 只会出现稳定的三维波 ( $\sigma \leq 0$ );
- 4) 对于所取的最大幅值, 即  $A = 1.91\%$ , 其最大放大率为  $8.23 \times 10^{-5}$ , 远小于最不稳定的第二模态二维 T-S 波的放大率  $5.25 \times 10^{-3}$ .

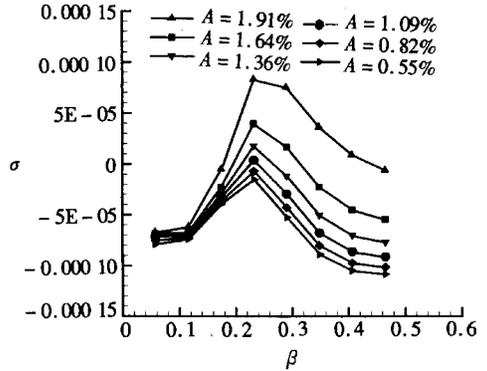


图 6 不同幅值二维基本波下亚谐波放大率随展向波数的变化

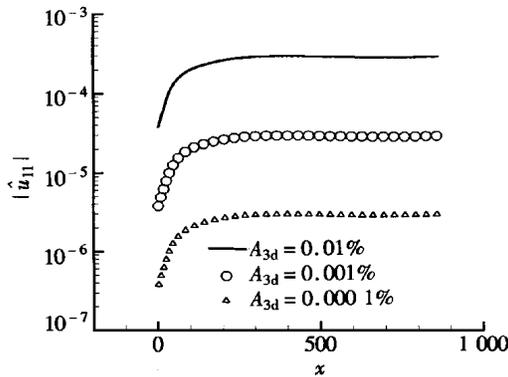


图 7  $y = 9.5$  处三维波幅值

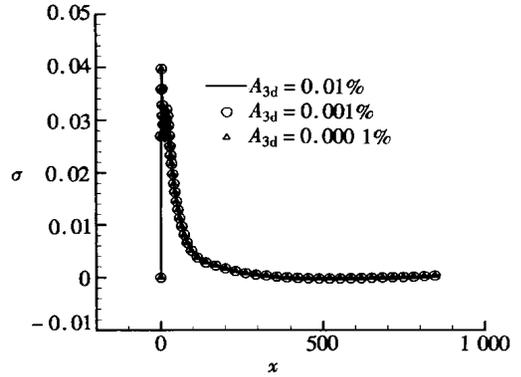


图 8 由  $y = 9.5$  处幅值得到的三维波放大率

### 3.2 二维基本扰动为第二模态 T-S 波的情况

将基本扰动由第一模态二维 T-S 波改为第二模态二维 T-S 波, 其它条件与前面一样. 第二模态二维 T-S 波的频率  $\omega_{2d} = 0.2791$ , 波数  $\alpha_{2d} = 0.3145$ . 相应地, 三维波参数取  $\omega_{3d} =$

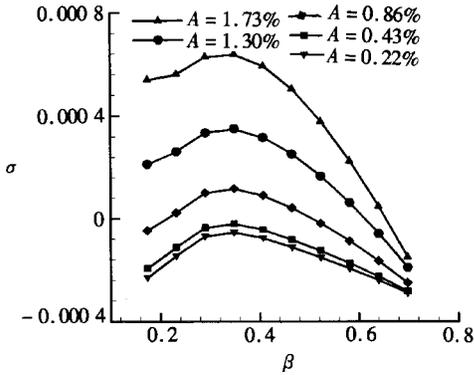


图 9 不同幅值二维基本波下亚谐波放大率随展向波数的变化

0.1396 和  $\alpha_{3d} = 0.1572$ .

用同样的方法对亚谐波放大率的可靠性进行检验.  $A_{3d}$  取 3 个不同的值, 即 0.01%、0.001% 和 0.0001%,  $A_{2d} = 0.1%$ ,  $\beta = 0.6981$ . 图 7 和 8 分别画出了  $y = 9.5$  处三维波的幅值和放大率变化情况. 与 3.1 中的结果类似, 3 个幅值的量级彼此不同, 而 3 个放大率则完全一致, 这就证实了所得放大率是可靠的.

还是对不同的  $A_{2d}$  和  $\beta$  进行计算, 并将结果画在图 9 中, 其中  $\sigma$  表示  $x = 455$  处的放大率,  $A$  表示该处二维波的幅值. 由图 9 可得到如下结论:

- 1) 在  $A$  和  $\beta$  取某些数值时, 不稳定的三维亚谐波确实存在, 因此对于第二模态的基本波来说, 二次失稳机制也起作用;
- 2) 随着  $\beta$  的变化, 放大率  $\sigma$  也会出现最大值, 且都集中在固定值  $\beta = 0.3490$  附近;
- 3) 随着  $A$  的增大,  $\sigma$  的最大值也会增大;
- 4) 只有当  $A \geq 0.86\%$  时才会出现不稳定的三维波, 对于小于该门限的  $A$ , 只会出现稳定的三维波;
- 5) 对于所取的最大幅值, 即  $A = 1.73\%$ , 其最大放大率  $6.388 \times 10^{-4}$  仍小于最不稳定的第二模态二维 T-S 波的放大率  $5.448 \times 10^{-3}$ .

目前还没有具体的实验结果可以与我们的结果进行对比. 虽然 Maslov 曾在转捩实验中测得亚谐波信号, 但是并没有给出可靠的定量的数据, 而且尚不能确定测得的信号就是来自二次失稳产生的三维波.

## 4 结 论

- 1) PSE 方法可以用来研究超音速边界层的二次失稳, 至少对马赫数 4.5 的情况可行;
- 2) 不论基本波是第一模态还是第二模态的 T-S 波, 二次失稳机制都起作用;
- 3) 随着三维波展向波数  $\beta$  的变化, 放大率  $\sigma$  会出现一个最大值;
- 4) 随着二维基本波幅值的增大, 三维波放大率的最大值也增大;
- 5) 只有当基本波幅值超过某一门限值时, 不稳定的亚谐波才会出现;
- 6) 对于所研究的情况来说, 即使二维基本波的幅值大到 2% 的量级, 三维亚谐波的最大放大率仍远小于最不稳定的第二模态二维 T-S 波的放大率. 据此, 二次失稳应该不是导致转捩的主要机制. 这可能就是 Cebeci 等人<sup>[13]</sup> 根据自身经验所指出的用  $e^N$  法预测转捩位置是有效的一个原因.

## [参 考 文 献]

- [1] Herbert T h. Secondary instability of plane channel flow to subharmonic three-dimensional disturbances[J]. Physics of Fluids, 1983, 26(4): 871-874.
- [2] Herbert T h. Subharmonic Three-Dimensional Disturbances in Unstable Plane Poiseuille Flows[R]. AIAA Paper, 1983, 1759.
- [3] Herbert T h. Analysis of Subharmonic Route to Transition in Boundary Layer[R]. AIAA Paper, 1984,

- 0009.
- [4] Saric W S, Kozlov V V, Levchenko V Ya. Forced and Unforced Sub-Harmonic Resonance in Boundary Layer Transition [ R ]. AIAA Paper, 1984, 0007.
- [5] Thomas A S W. Experiments on secondary instability in boundary layers [ A ]. In: Lamb J P Ed. Proc 10th US Natl Congr Appl Mech [ C ]. Austin, Tex, US: ASME, 1987, 436-444.
- [6] Herbert T h. Secondary instability of boundary layers [ J ]. Ann Rev Fluid Mech , 1988, **20**(1): 487-526.
- [7] Spalart P R, Yang K S. Numerical Simulation of Boundary Layers: Part 2. Ribbon-Induced Transition in Blasius Flow [ R ]. NASA TM 88221, 1986, 24.
- [8] 董亚妮, 周恒. 二维超音速边界层中三波共振和二次失稳机制的数值模拟研究 [ J ]. 应用数学和力学, 2006, **27**(2): 127-133.
- [9] Bertolotti F P, Herbert T h. Analysis of the linear stability of compressible boundary layers using the PSE [ J ]. Theoretical and Computational Fluid Dynamics , 1991, **3**(1): 117-124.
- [10] Bertolotti F P. Compressible boundary layer stability analyzed with the PSE equations [ R ]. AIAA Paper, 1991, 1637.
- [11] Chang C L, Malik M R, Erlebacher G, et al. Compressible Stability of Growing Boundary Layers Using Parabolized Stability Equations [ R ]. AIAA Paper, 1991, 1636.
- [12] 张永明, 周恒. 抛物化稳定性方程在可压缩边界层中应用检验 [ J ]. 应用数学和力学, 2007, **28**(8): 883-893.
- [13] Cebeci T, Shao J P, Chen H H, et al. The preferred approach for calculating transition by stability theory [ A ]. In: An International Conference on Boundary and Interior Layers—Computational and Asymptotic Methods [ C ]. July: ONERA, Toulouse, France, 2004.

## PSE as Applied to Problems of Secondary Instability in Supersonic Boundary Layers

ZHANG Yong-ming<sup>1</sup>, ZHOU Heng<sup>1,2</sup>

(1. Department of Mechanics, Tianjin University, Tianjin 300072, P. R. China;

2. LIU Hui Center of Applied Mathematics, Nankai University and Tianjin University, Tianjin 300072, P. R. China)

**Abstract:** Parabolized stability equations (PSE) approach is used to investigate problems of secondary instability in supersonic boundary layers. The results show that the mechanism of secondary instability does work, whether the 2-D fundamental disturbance is of the first mode or second mode T-S wave. The variation of the growth rates of the 3-D sub-harmonic wave against its span-wise wave number and the amplitude of the 2-D fundamental wave is found to be similar to those found in incompressible boundary layers. But even as the amplitude of the 2-D wave is as large as the order 2%, the maximum growth rate of the 3-D sub-harmonic is still much smaller than the growth rate of the most unstable second mode 2-D T-S wave. Consequently, secondary instability is unlikely the main cause leading to transition in supersonic boundary layers.

**Key words:** parabolized stability equations; secondary instability; fundamental disturbances; sub-harmonic waves