

文章编号: 1000-0887(2008) 01-0021-06　　应用数学和力学编委会, ISSN 1000-0887

时间尺度上的某些积分不等式

A 图纳,　S 库图苏

(加济大学 学理和文学学院 数学系,安卡拉, 土耳其)

摘要:　研究了时间尺度上二维逆 H lder 型不等式和 H lder 不等式　还利用时间尺度上的 H lder 不等式,给出了许多积分不等式　Hardy 不等式是其特殊情况

关　键　词:　积分不等式;　H lder 不等式;　Hardy 不等式;　时间尺度;　逆不等式

中图分类号:　O175.7; O178　　　文献标识码:　A

引　　言

1990 年 Hilger[1] 引入了时间尺度(测度链) 上的动力学方程理论, 形成了连续(系统) 和离散(系统) 分析的统一方法　函数 $f : T$　$\mathbf{R}$ 的广义导数或Hilger 导数为 $f\ \ (t)$ (其中 T 即所谓的时间尺度 (它是 $\mathbf{R}$ 的一个任意非空闭子集)), 当 $T = \mathbf{R}$ 时, 变成了普通导数, 即 $f\ \ (t) = f\ \ (t)$　另外, 若 $T = \mathbf{Z}$, 则 $f\ \ (t)$ 退化为通常的前向差分, 即 $f\ \ (t) = \ \ f(t)$　这一理论不仅能获得具有新用途的方程, 而且可以加深对离散系统和连续系统之间细微差别的理解[2-3]

本文利用时间尺度上的 H lder 不等式和逆 H lder 型不等式, 通过估计积分

$$_a^b\ _a^b K(x,y)f(x)g(y)\ \ x\ \ y,$$

从而获到一些一般性的结果

首先, 我们不加证明地给出了某些基本定义, 以及时间尺度上的计算结果, 它们取自于 Bohner 和 Peterson 论文[3] 中卓越的引言

1　一 般 定 义

设 $T = [a, b]$ 为时间尺度上的一个任意区间　记实区间 $[a, b]$ 与时间尺度 T 的交集为 $[a, b]$　$T : [a, b]_T$

定义 1　时间尺度 T 是 $\mathbf{R}$ 的一个非空闭子集　我们始终假设拓扑 T 是具有来自 $\mathbf{R}$ 上的标准拓扑　同时, 始终假设 T 中的区间 $[a, b]_T$, 对于 T 中的点系, $a < b$, 即为集合 $\left\{t\ \ T : s < t\right\}$

收稿日期:　2006-09-30;　修订日期:　2007-11-28

作者简介:　Adnan Tuna(E-mail: adnantuna@gazi.edu.tr);
Servet Kutukcu(E-mail: akutukcu@yahoo.com).

本文原文为英文, 由吴承平 译, 张禄坤 校.

因为一个时间尺度可能是不连通的, 为此我们需要用到下述跳跃算子的概念

定义 2 映射 , $: T \quad T$ 被称为跳跃算子, 其中 $(t) = \inf\{s \quad T : s > t\}$, $(t) = \sup\{s \quad T : s < t\}$

跳跃算子 、 可用下述方法为T 中的点系进行分类:

定义 3 一个非极大元 $t \quad T$, 当 $(t) = t$ 时, 称为右稠密的; 当 $(t) > t$ 时, 称为右散布的 当 $(t) = t$ 时, 称为左稠密的; 当 $(t) < t$ 时, 称为左散布的

当 $T = \mathbf{R}$ 时, 有 $(t) = t$, 同时, 若$T = h\mathbf{Z}$, $h > 0$ 时, 则 $(t) = t + h$

定义 4 映射 $: T \quad \mathbf{R}^+$ 被称为粒度(graininess) 函数, 其中 $(t) = (t) - t$ 集合T^k定义如下: 若T 有一个左散布极大值m, 则$T^k = T - \{m\}$, 否则$T^k = T$

若 $T = \mathbf{R}$, 则 $(t) = 0$, 而若$T = \mathbf{Z}$, 则有 $(t) = 1$

定义 5 设$f : T \quad \mathbf{R}$ 若给定 > 0, 存在 t 的一个邻域 U, 使对所有 $s \quad U$, 有

$$f \quad (t) - f(s) - f \quad (t)[\quad (t) - s] \qquad (t) - s \quad ,$$

其中$f = f$ 则称f 在$t \quad T^k$是可微的, 并具有 – 导数$f \quad (t) \quad \mathbf{R}$

若 $T = \mathbf{Z}$, 则$f \quad (t) = \mathrm{d}f(t)/\mathrm{d}(t)$; 又若$T = \mathbf{R}$, 则$f \quad (t) = f(t+1) - f(t)$

– 导数的一些基本性质可参阅文献[3]

定理 1 设$f : T \quad \mathbf{R}$, 且 $t \quad T^k$

( ) 若f 在t 处可微, 则f 在t 处是连续的;

( ) 若f 在t 处可微, 且 t 为右散布的, 则f 在t 处可微, 且有

$$f \quad (t) = \frac{f \quad (t) - f(t)}{(t) - t};$$

( ) 若f 在t 处可微, 且 t 为右稠密的, 则

$$f \quad (t) = \lim_{t \quad s} \frac{f(t) - f(s)}{t - s};$$

( ) 若f 在t 处可微, 则

$$f \quad (t) = f(t) + \quad (t) f \quad (t)$$

例 1

( ) 若$f : T \quad \mathbf{R}$, 对所有 $t \quad T$, 定义$f(t) =$, 其中 $\mathbf{R}$ 为常数, 则$f \quad (t) \quad 0$;

( ) 若$f : T \quad \mathbf{R}$, 对所有 $t \quad T$, 定义$f(t) = t$, 则$f \quad (t) \quad 1$

定义 6 若对所有 $t \quad T$,

( ) 在每一右稠密点 $t \quad T$ 处, f 是连续的;

( ) 在每一左稠密点 $t \quad T$ 处, $\lim_{s \quad t} f(s)$ 存在且有限, 则函数$f : T \quad \mathbf{R}$ 称为右稠密–连续的(rd-continuous), 记为$f \quad C_{rd}(T, \mathbf{R})$

定义 7 设$f \quad C_{rd}(T, \mathbf{R})$ 若 g 在T 上可微且对任意$t \quad T^k$, 满足 $g \quad (t) = f(t)$, 则称 $g : T \quad \mathbf{R}$ 为T 上f 的反导数 在这种情况下, 可定义为

$$\int_a^t f(s) \quad s = g(t) - g(a), \qquad t \quad T$$

定理 2 若f 在$[a, b]$ 上是 – 可积的, 于是有 f , 且

$$\left| \int_a^b f(t) \quad t \right| \qquad \int_a^b |f(t)| \quad t$$

定理 3(H lder 不等式) 设 $a, b \quad T$ 对右稠密–连续函数$f, g : [a, b] \quad \mathbf{R}$, 我们有

$$\int_a^b |f(t)g(t)|\Delta t \le \left(\int_a^b |f(t)|^p \Delta t\right)^{1/p}\left(\int_a^b |g(t)|^q \Delta t\right)^{1/q},$$

其中 $p>1,\ q=p/(p-1)$。

下面的定理给出了本文的主要结果。

2 主要结果

引理1 对两个正函数 f 和 g, 在集合 $[a,b]$ 上, 满足 $0<m\le f^p/g^q\le M<\infty$, 且对 $p>1,\ q>1$, 有 $1/p+1/q=1$, 得到

$$\left(\int_a^b f(t)^p \Delta t\right)^{1/p}\left(\int_a^b g(t)^q \Delta t\right)^{1/q} \le \left(\frac{m}{M}\right)^{-1/(pq)}\int_a^b f(t)g(t)\Delta t$$

证明 因为 $f^p/g^q\le M$, $g\ge M^{-1/q}f^{p/q}$, 因此

$$fg\ge M^{-1/q}f^{1+p/q}=M^{-1/q}f^p,$$

于是有

$$\left(\int_a^b f(t)^p \Delta t\right)^{1/p}\le M^{1/(pq)}\left(\int_a^b f(t)g(t)\Delta t\right)^{1/p}, \tag{1}$$

另一方面, 由于 $m\le f^p/g^q$, $f\ge m^{1/p}g^{q/p}$, 则

$$\int_a^b f(t)g(t)\Delta t\ge\int_a^b m^{1/p}g(t)^{1+q/p}\Delta t=m^{1/p}\int_a^b g(t)^q\Delta t,$$

于是

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)\Delta t\right)^{1/q}\ge m^{1/(pq)}\left(\int_a^b g(t)^q\Delta t\right)^{1/q}$$

将它和式(1)组合, 可得到所需的不等式

$$\left(\int_a^b f(t)^p \Delta t\right)^{1/p}\left(\int_a^b g(t)^q \Delta t\right)^{1/q} \le \left(\frac{m}{M}\right)^{-1/(pq)}\int_a^b f(t)g(t)\Delta t$$

推论1 若取 $T=\mathbf{R}$, 显然, 得到了文献[4]中的定理2.1

定理4 设 $a,b\in T$, 对右稠密-连续函数 $f,g:[a,b]\times[a,b]\to\mathbf{R}$, 有

$$\int_a^b\int_a^b |f(x,y)g(x,y)|\Delta x\Delta y \le \left(\int_a^b\int_a^b |f(x,y)|^p\Delta x\Delta y\right)^{1/p}\left(\int_a^b\int_a^b |g(x,y)|^q\Delta x\Delta y\right)^{1/q},$$

其中 $p>1,\ q=p/(p-1)$

证明 对非负实数 α 和 β, 众所周知的基本不等式

$$\alpha^{1/p}\beta^{1/q}\le\frac{\alpha}{p}+\frac{\beta}{q} \tag{2}$$

成立。不失一般性, 现设

$$\left(\int_a^b\int_a^b |f(x,y)|^p\Delta x\Delta y\right)\left(\int_a^b\int_a^b |g(x,y)|^q\Delta x\Delta y\right)\ne 0$$

将下面二式代入不等式(2):

$$\alpha(x,y)=\frac{|f(x,y)|^p}{\int_a^b\int_a^b |f(\tau_1,\tau_2)|^p\Delta\tau_1\Delta\tau_2},\quad \beta(x,y)=\frac{|g(x,y)|^q}{\int_a^b\int_a^b |g(\tau_1,\tau_2)|^q\Delta\tau_1\Delta\tau_2},$$

并从 a 到 b 积分得到的不等式(由于所有产生的函数是右稠密-连续的)得到

$$\int_a^b\int_a^b \frac{|f(x,y)|^p}{\int_a^b\int_a^b |f(\ _1,\ _2)|^p\ \ _1\ \ _2}\ \frac{|g(x,y)|^q}{\int_a^b\int_a^b |g(\ _1,\ _2)|^q\ \ _1\ \ _2}\ x\ y =$$

$$\int_a^b\int_a^b (x,y)^{1/p}\ (x,y)^{1/q}\ x\ y\ \ \ \int_a^b\int_a^b\left\{\frac{(x,y)}{p}+\frac{(x,y)}{q}\right\}\ x\ y =$$

$$\frac{1}{p}\int_a^b\int_a^b\left\{\frac{|f(x,y)|^p}{\int_a^b\int_a^b |f(\ _1,\ _2)|^p\ \ _1\ \ _2}\right\}\ x\ y +$$

$$\frac{1}{q}\int_a^b\int_a^b\left\{\frac{|g(x,y)|^q}{\int_a^b\int_a^b |g(\ _1,\ _2)|^q\ \ _1\ \ _2}\right\}\ x\ y =$$

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$$

可直接得出H lder 不等式

定理5 若 $1/p + 1/q = 1, p > 1$, 且 $K(x,y)$、$f(x)$、$g(y)$、(x)、(y) 为非负函数, 则下列不等式组(3)和(4)是等价的:

$$\int_a^b\int_a^b K(x,y)f(x)g(y)\ x\ y$$
$$\left(\int_a^b (x)^p F(x) f(x)^p\ x\right)^{1/p}\left(\int_a^b (x)^q G(y) g(y)^q\ y\right)^{1/q} \tag{3}$$

和

$$\int_a^b G(y)^{1-p}\ (y)^{-p}\left(\int_a^b K(x,y)f(x)\ x\right)^p\ y$$
$$\int_a^b (x)^p F(x) f(x)^p\ x, \tag{4}$$

其中

$$F(x) = Q_a^b \frac{K(x,y)}{W(y)^p}\$ y,\ \ G(x) = Q_a^b \frac{K(x,y)}{U(x)^q}\$ x 1$$

证明 我们从如下恒等式开始证明:

$$Q_d Q_a^{b\ b} K(x,y)f(x)g(y)\$x\$y = Q_d Q_a^{b\ b} K(x,y)f(x)\ \frac{U(x)}{W(y)}g(y)\ \frac{W(y)}{U(x)}\$x\$y 1$$

应用H lder 不等式, 得到

$$Q_d Q_a^{b\ b} K(x,y)f(x)g(y)\$x\$y\ [$$
$$\left(Q_a^b U(x)^p F(x) f(x)^p \$ x\right)^{1/p}\left(Q_a^b W(y)^q G(y) g(y)^q \$ y\right)^{1/q} 1$$

现证明不等式组(3)和(4)是等价的1 设不等式(3)成立1 若取

$$g(y) = G(y)^{1-p} W(y)^{-p}\left(Q_a^b K(x,y)f(x)\$x\right)^{p-1},$$

考虑到 $1/p + 1/q = 1$ 并利用不等式(3), 有

$$Q_a^b G(y)^{1-p} W(y)^{-p}\left(Q_a^b K(x,y)f(x)\$x\right)^p \$ y = Q_d Q_a^{b\ b} K(x,y)f(x)g(y)\$x\$y\ [$$
$$\left(Q_a^b U(x)^p F(x) f(x)^p \$ x\right)^{1/p}\left(Q_a^b W(y)^q G(y) g(y)^q \$ y\right)^{1/q} =$$

$$\left(\int_a^b U(x)^p F(x) f(x)^p \Delta x\right)^{1/p} \left(\int_a^b G(y)^{1-p} W(y)^{-p} \left(\int_a^b K(x,y) f(x) \Delta x\right)^p \Delta y\right)^{1/q},$$

由此我们得到不等式(4)。

现在设不等式(4)成立。应用Hölder不等式和不等式(4),得到

$$\int_a^b\int_a^b K(x,y) f(x) g(y) \Delta x \Delta y =$$

$$\int_a^b \left(W(y)^{-1} G(y)^{-1/q} \int_a^b K(x,y) f(x) \Delta x \right) W(y) G(y)^{1/q} g(y) \Delta y \le$$

$$\left(\int_a^b G(y)^{1-p} W(y)^{-p} \left(\int_a^b K(x,y) f(x) \Delta x\right)^p \Delta y\right)^{1/p} \left(\int_a^b W(y)^q G(y) g(y)^q \Delta y\right)^{1/q} \le$$

$$\left(\int_a^b U(x)^p F(x) f(x)^p \Delta x\right)^{1/p} \left(\int_a^b W(y)^q G(y) g(y)^p \Delta y\right)^{1/q},$$

因此得到不等式(3)。即不等式(3)成立时,不等式(4)也成立。 □

定理6　若 $1/p + 1/q = 1$, $p > 1$, 且 $K(x,y)$、$f(x)$、$g(y)$、$U(x)$、$W(y)$ 为非负函数,并且

$$F(x) = \int_a^b \frac{K(x,y)}{W(y)^p} \Delta y \le F_1(x), \quad G(x) = \int_a^b \frac{K(x,y)}{U(x)^q} \Delta x \le G_1(y)。$$

则下列不等式组(5)和(6)是等价的:

$$\int_a^b\int_a^b K(x,y) f(x) g(y) \Delta x \Delta y \le$$

$$\left(\int_a^b U(x)^p F_1(x) f(x)^p \Delta x\right)^{1/p} \left(\int_a^b W(x)^q G_1(y) g(y)^q \Delta y\right)^{1/q} \tag{5}$$

和

$$\int_a^b G_1(y)^{1-p} W(y)^{-p} \left(\int_a^b K(x,y) f(x) \Delta x\right)^p \Delta y \le$$

$$\int_a^b U(x)^p F_1(x) f(x)^p \Delta x。 \tag{6}$$

若取 $T = \mathbf{R}$, 则不等式组(4)和(6)为Hardy型不等式[5]。

若在定理5中取

$$K(x,y) = \begin{cases} h(y), & x \le y, \\ 0, & x > y, \end{cases}$$

我们得到下列结果:

定理7　设 $1/p + 1/q = 1$, $p > 1$, 且 $h(y)$、$f(x)$、$g(y)$、$U(x)$、$W(y)$ 为非负函数。则下列不等式组(7)和(8)是等价的:

$$\int_a^b\int_a^y h(y) f(x) g(y) \Delta x \Delta y \le \left(\int_a^b U(x)^p f(x)^p \left(\int_a^b H(y) \Delta y\right) \Delta x\right)^{1/p} \times$$

$$\left(\int_a^b W(y)^q g(y)^q h(y) \left(\int_a^y U(x)^{-q} \Delta x\right) \Delta y\right)^{1/q} \tag{7}$$

和

$$\int_a^b H(y) \left(\int_a^y U(x)^{-q} \Delta x\right)^{1-p} \left(\int_a^y f(x) \Delta x\right)^p \Delta y \le$$

$$\left(\int_a^b U(x)^p f(x)^p \left(\int_x^b H(y) \Delta y\right) \Delta x\right)^{1/p}, \tag{8}$$

其中 $H(y) = h(y) W(y)^{-p}$。

若在定理 5 中取

$$K(x,y)=\begin{cases}0, & x\le y,\\ h(y), & x>y,\end{cases}$$

我们又得到如下结果:

定理 8 设 $1/p+1/q=1, p>1$, 且 $h(y)$、$f(x)$、$g(y)$、$\varphi(x)$、$\psi(y)$ 为非负函数1 则下列不等式组(9)和(10)是等价的:

$$\int_a^b\int_y^b h(y)f(x)g(y)\Delta x\Delta y\le\left(\int_a^b\varphi(x)^p f(x)^p\left(\int_a^x H(y)\Delta y\right)\Delta x\right)^{1/p}\times$$
$$\left(\int_a^b\psi(y)^q g(y)^q h(y)\left(\int_y^b\varphi(x)^{-q}\Delta x\right)\Delta y\right)^{1/q}\tag{9}$$

和

$$\int_a^b H(y)\left(\int_y^b\varphi(x)^{-q}\Delta x\right)^{1-p}\left(\int_y^b f(x)\Delta x\right)^p\Delta y\le$$
$$\left(\int_a^b\varphi(x)^p f(x)^p\left(\int_a^x H(y)\Delta y\right)\Delta x\right)^{1/p}1\tag{10}$$

若取 $T=\mathbf{R}$, 显然可得到文献[5]中的定理 1、定理 2、定理 3 和定理 41

[参 考 文 献]

[1] Hilger S. Analysis on measure chains-a unified approach to continuous and discrete calculus[J]. Result Math, 1990, **18:** 18-56.

[2] Agarwal R P, Bohner M, O. Regan D, et al. Peterson, dynamic equations on time scale: a survey [J]. J Comput Appl Math, 2002, **141:** 1-26.

[3] Bohner M, Peterson A. Dynamic Equations on Time Scale, An Introduction With Applications [M]. Boston: Birkhauser, 2001.

[4] Saitoh S, Tuan V K, Yamamoto M. Reverse convolution inequalities and applications to inverse heat source problems[J]. J Ineq in Pure Appl Math, 2003, **3**(5), Article 80.

[5] Krnic M, Pecaric J. General Hilbert. s an Hardy. s inequality[J]. Math Ineq Appl, 2005, **8:** 29-51.

Some Integral Inequalities on Time Scales

Adnan Tuna, Servet Kutukcu

(Department of Mathematics, Faculty of Science and Arts, University of Gazi, Becsevler 06500, Ankara, Turkey)

Abstract: The reverse H lder type inequality and H lder inequality in two dimensional case on time scales were studied. Many integral inequalities by using H lder inequalities on time scales were also obtained which give Hardy. s inequalities as spacial cases.

Key words: integral inequality; H lder. s inequality; Hardy. s inequality; time scales; reverse inequality