文章编号: 1000-0887(2008) 02-0157-12

可压缩 Navier-Stokes 方程的压力梯度局部投影间断有限元法*

骆 艳[1], 冯民富[1,2]

(1. 电子科技大学 应用数学学院, 成都 610054;
2. 四川大学 数学学院, 成都 610064)

(鲁传敬推荐)

摘要: 将压力梯度投影与间断有限元法相结合, 对可压缩线性化 N-S 方程提出了一种稳定化间断有限元格式. 证明了此格式在速度和压力有限元空间无需满足 B-B 型条件的情况下, 解的存在性和唯一性, 以及相应的误差估计.

关 键 词: 间断 Galerkin 有限元法; 压力梯度投影; 可压缩的 N-S 问题; 误差估计
中图分类号: O242.21 文献标识码: A

引 言

间断 Galerkin 有限元法是由 Reed 和 Hill[1] 首先提出, 并应用于求解中子输运方程, 但这种方法长期以来一直没有得到很好的研究和应用. 直到 20 世纪 80 年代后期和 90 年代, Cockburn 和 Shu 等人[2-4] 结合 Runge-Kutta 方法, 将间断有限元方法推广到非线性一维守恒律方程和方程组、高维守恒律方程和方程组, 并给出了部分收敛性理论证明后, 这一方法才引起人们的注意.

由于此方法保持了通常有限元方法的优点: 能够处理复杂的区域边界和具有复杂的边界条件问题, 并能获得与区域内部一致的计算精度; 易于网格加密, 实现并行算法; 可以得到任意阶精度的格式; 具有很好的稳定性. 因此近年来, 间断 Galerkin 有限元法成为了有限元法研究的热点问题. 目前在水动力学、气动力学、波传播等问题中已得到了很好地应用. 在数学上, 首先体现在求解双曲和椭圆方程方面[5-7]. 其中文献[5] 对二次椭圆方程的不同间断 Galerkin 有限元法作了系统的分析. 随着间断 Galerkin 有限元法在求解双曲和椭圆方程方面的深入研究, 间断 Galerkin 有限元法逐渐开始应用于求解不可压缩流动 Stokes(Navier-Stokes) 方程[8-10]. 对于可压缩流动 Navier-Stokes 方程, 文献[11-12] 提出了间断 Galerkin 有限元法, 并给出了相应的数值计算结果, 但关于这方面的理论分析到目前为止未见报道, 其原因在于可压缩流动 Stokes(Navier-Stokes) 方程较之不可压缩流动 Stokes(Navier-Stokes) 方程更为复杂. 正是由于这

* 收稿日期: 2007-06-28; 修订日期: 2008-01-03
基金项目: 四川省科技攻关课题资助项目(05GG006-006-2)
作者简介: 骆艳(1980—), 女, 四川人, 硕士;
冯民富(1964—), 男, 四川人, 教授, 博士(联系人. E-mail: fmf@wtjs.cn).

方面的研究具有挑战性, 因此近年来将间断有限元法推广到求解可压缩流动 Stokes(Navier-Stokes) 方程已成为人们关注的热点.

对于黏性不可压缩流动 Stokes(Navier-Stokes) 方程其混合有限元法研究是上世纪末后 20 年来研究的热点问题. 但由于其理论框架要求有限元空间的组合满足 Babuska-Brezzi 条件[13]. 这一条件的限制排除了工程实际应用计算方便的低阶有限元空间的使用. 为了去掉这个束缚, 上世纪 90 年代以来, 多种稳定化方法被相继提出, 如流线扩散法(streamline diffusin method)[14-18], 迎风有限元法(upwind finite element method)[19], 最小二乘法(least-squares method)[20-21], 以及最近提出的压力投影法[22]和压力梯度局部投影法[23]. 这些方法都从不同角度绕开了 B-B 条件的限制. 但文献[22-23]均要求连续的压力有限元空间, 本文的目的是进一步将压力梯度局部投影推广到间断有限元空间, 并用于建立求解可压缩 N-S 方程的间断有限元法.

关于可压缩流动 N-S 方程, 由于在连续方程中出现了 p 的梯度项, 而不包含扩散项, 这样计算出来的数值结果经常会出现振荡, 这给数值方法和误差估计的分析增加了难度. 文献[24]中对可压缩Stokes 问题进行混合有限元逼近, 分析了当其速度、压力空间满足 B-B 条件时解存在唯一, 给出了解的收敛性, 以及误差分析, 但要求试探函数空间与检测函数空间不同, 导致了关于压力 p 的误差估计不能达到最优(精度损失了一阶). 为了解决文献[24]中存在的问题, 文献[25]提出了加罚流线扩散法, 尽管绕开了 B-B 条件, 得到了解的存在唯一性以及误差分析, 但其格式不相容且精度 $(O(h^{m+1/2}))$ 与罚项系数 ε 相关 $(O(\varepsilon^{-3/2}))$, 而且只讨论了 α、β 为常数向量的情况. 以上方法都是基于连续有限元空间. 作为研究可压缩 N-S 方程间断有限元法的重要步骤和为了方法理论分析的简化, 本文仅就其线性化模型展开讨论. 对可压缩线性化 N-S 方程提出了一种稳定化间断有限元格式, 证明了此格式在速度和压力有限元空间无需满足 B-B 型条件的情况下, 解的存在性和唯一性, 得到了具有与流线扩散法[15]相同误差估计阶的误差估计.

本文考虑如下的具有 Dirichlett 边界条件的可压缩 Navier-Stokes 方程的线性化形式:

$$\begin{cases} -\mu\Delta\boldsymbol{u} - \nu\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{u} + \alpha\cdot\nabla\boldsymbol{u} + \nabla p = \boldsymbol{f}, & \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ \nabla\cdot\boldsymbol{u} + \beta\cdot\nabla p = g, & \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ \boldsymbol{u} = 0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\Omega\subset R^d\,(d=2$ 或 $3)$ 为具有 Lipschitz 边界条件的有界区域. μ、$\nu>0$ 为黏性系数, α、β 是关于环绕压力和环绕速度场的函数.

本文使用 C 表示与 h 无关, 但有可能与其他参数有关的正常数, 且在不同的情况下表示不同的常数. 用 ε 和 ε 表示充分小量. 为了讨论书写方便, 在本文中我们假设 $\mu=1$, $\nu=1$, $\nabla\cdot\alpha=0$, $\nabla\cdot\beta=0$.

1 有限元格式的建立

引进记号

$$(\nabla\boldsymbol{v})_{ij} = \partial_j v_i,\quad \nabla\boldsymbol{u}:\nabla\boldsymbol{v} = \sum_{i,j=1}^{d}(\nabla\boldsymbol{u})_{ij}(\nabla\boldsymbol{v})_{ij},$$

$$(\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{n})_{ij} = v_i n_j,\quad \boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} = \sum_{i,j=1}^{d} v_i(\nabla\boldsymbol{u})_{ij}n_j = \nabla\boldsymbol{u}:(\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{n}).$$

分别在方程(1)的第 1 式和第 2 式的两边同乘以 $\boldsymbol{v}$、q, 并分部积分得

$$\int_K \nabla \boldsymbol{u}:\nabla \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}-\int_{\partial K}\nabla \boldsymbol{u}:(\boldsymbol{v}\otimes \boldsymbol{n}_K)\,\mathrm{d}s+\int_K(\nabla\cdot \boldsymbol{u}):(\nabla\cdot \boldsymbol{v})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}-$$
$$\int_{\partial K}(\nabla\cdot \boldsymbol{u}):(\boldsymbol{v}\otimes \boldsymbol{n}_K)-\int_K \boldsymbol{u}\cdot\nabla\cdot(\boldsymbol{v}\otimes \alpha)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\int_{\partial K}\alpha\cdot \boldsymbol{n}_K\boldsymbol{u}\cdot \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}s-$$
$$\int_K p\,\nabla\cdot \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\int_{\partial K}p\boldsymbol{v}\cdot \boldsymbol{n}_K\,\mathrm{d}s=\int_K \boldsymbol{f}\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \tag{2}$$

$$-\int_K \boldsymbol{u}\cdot\nabla q\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\int_{\partial K}\boldsymbol{u}\cdot \boldsymbol{n}_K q\,\mathrm{d}s-\int_K p\cdot\nabla\cdot(q\cdot\beta)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}+$$
$$\int_{\partial K}\beta\cdot \boldsymbol{n}_K p\cdot q\,\mathrm{d}s=\int_K gq\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{3}$$

方程(2)和(3)中函数$(\boldsymbol{u},p)$、$(\boldsymbol{v},q)$在下面函数空间$V\times Q$定义

$$\boldsymbol{V}:=\left\{\boldsymbol{v}\in L^2(\Omega)^d,\ v_i|_K\in H^1(K),\ \forall K\in \mathrm{I},\ 1\leqslant i\leqslant d\right\},$$
$$Q:=\left\{q\in L^2(\Omega):\int_\Omega q\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=0,\ q|_K\in H^1(K),\ \forall K\in \mathrm{I}\right\}.$$

为了给出方程(1)的间断有限元解法,我们先引入关于迹的某些记号. 设 $\mathrm{I}=(K)$ 为区域 Ω 的拟一致剖分,令 Γ_{I} 为所有内边界的全体,Γ_{B} 代表边界上的边,$\Gamma_h=\Gamma_{\mathrm{B}}+\Gamma_{\mathrm{I}}$. K^+、K^- 为剖分 I 的相邻两个单元,$\boldsymbol{n}^+$、$\boldsymbol{n}^-$ 分别为其的相应外法线向量. $\boldsymbol{x}$ 为 $e=\partial K^+\cap\partial K^-$ 上的点,$(\boldsymbol{u},p)$ 在单元$K^\pm$内部 e 上的值表述为$(u^\pm,p^\pm)$. $\{\{\cdot\}\}$表示均值. $[[\cdot]]$ 表示跳跃. 对于 $\boldsymbol{x}\in e$ 定义为

$$\{\{p\}\}=\frac{p^++p^-}{2},\ \{\{u\}\}=\frac{u^++u^-}{2},\ [[p]]=p^+\boldsymbol{n}^++p^-\boldsymbol{n}^-,$$
$$[[u]]=u^+\cdot\boldsymbol{n}^++u^-\cdot\boldsymbol{n}^-,\ \underline{[[u]]}=u^+\otimes\boldsymbol{n}^++u^-\otimes\boldsymbol{n}^-,$$

当 $e\in\Gamma_{\mathrm{B}}$ 时,$\{\{p\}\}=p$,$[[u]]=u\cdot\boldsymbol{n}$, 其中 $\boldsymbol{n}$ 表示$\partial\Omega$上的外法线向量. 由于$[[u]]=\sum_{i=1}^d(u_i^+-u_i^-)\boldsymbol{n}_i^+$, 则有:$[[u]]^2\leqslant\underline{[[u]]}^2$.

现在我们建立方程(1)的间断有限元法: 求$(\boldsymbol{u}_h,p_h)\in\boldsymbol{V}^h\times Q^h$, 使得

$$\begin{cases} a(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v})+C_\alpha(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v})+b(\boldsymbol{v},p_h)=(\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}), & \forall\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{V}^h,\\ -b(\boldsymbol{u}_h,q)+C_\beta(p_h,q)=(g,q) & \forall q\in Q^h, \end{cases} \tag{4}$$

其中

$$a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=(\nabla_h\boldsymbol{u},\nabla_h\boldsymbol{v})+\int_{\Gamma_h}\{\{\nabla_h\boldsymbol{v}\}\}:\underline{[[u]]}\,\mathrm{d}s-\int_{\Gamma_h}\{\{\nabla_h u\}\}:\underline{[[v]]}\,\mathrm{d}s+$$
$$(\nabla_h\cdot\boldsymbol{u},\nabla_h\cdot\boldsymbol{v})+\int_{\Gamma_h}\{\{\nabla_h\cdot\boldsymbol{v}\}\}:\underline{[[u]]}\,\mathrm{d}s-\int_{\Gamma_h}\{\{\nabla_h\cdot u\}\}:\underline{[[v]]}\,\mathrm{d}s+$$
$$\int_{\Gamma_h}C_{11}\underline{[[u]]}:\underline{[[v]]}\,\mathrm{d}s,$$

$$b(\boldsymbol{v},p)=-(\nabla_h\cdot\boldsymbol{v},p)+\int_{\Gamma_h}\{\{p\}\}[[v]]\,\mathrm{d}s=(\boldsymbol{v},\nabla_h p)-\int_{\Gamma_h}\{\{v\}\}[[p]]\,\mathrm{d}s,$$

$$C_\alpha(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=-(\boldsymbol{u},\nabla_h\cdot(\boldsymbol{v}\otimes\alpha))+\int_{\Gamma_h\backslash\Gamma_-}\alpha\cdot\boldsymbol{n}_K\hat{u}^\alpha\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}s,$$

$$C_\beta(p,q)=-(p,\nabla_h\cdot(q\cdot\beta))+\int_{\Gamma_h\backslash\Gamma_-}\beta\cdot\boldsymbol{n}_K\hat{p}^\beta\cdot q\,\mathrm{d}s,$$

其中 $\Gamma_-=\{\boldsymbol{x}\in\partial\Omega:\beta(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{n}<0\}$为边界流入部分. 对于 $\hat{u}^\alpha$、$\hat{p}^\beta$ 的定义,我们引入文献[1,26] 关于标准迎风数值流的定义:

$$\hat{\boldsymbol{u}}^{\alpha}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x} - \varepsilon\alpha(\boldsymbol{x})), & \boldsymbol{x} \in \partial K \setminus \Gamma_-, \\ 0, & \boldsymbol{x} \in \partial K \cap \Gamma_- . \end{cases} \tag{5}$$

系数 C_{11} 定义如下:

$$C_{11} = \begin{cases} c_{11}\max\left\{h_{K^+}^{-1}, h_{K^-}^{-1}\right\}, & \boldsymbol{x} \in \langle K^+, K^- \rangle, \\ c_{11} h_{K^+}^{-1} & \boldsymbol{x} \in \partial K^+ \cap \partial\Omega. \end{cases} \tag{6}$$

集合 $\langle K, K' \rangle$ 定义如下:

$$\langle K, K' \rangle := \begin{cases} \emptyset, & \text{当}\ \mathrm{meas}_{d-1}(\partial K \cap \partial K') = 0, \\ \partial K \cap \partial K'\ \text{内部}, & \text{其它}. \end{cases}$$

有限元空间为

$$\boldsymbol{V}^h := \left\{ \boldsymbol{v} \in L^2(\Omega)^d,\ v_i|_K \in P_l(K),\ \forall K \in \mathrm{I}, 1 \leqslant i \leqslant d \right\},$$

$$Q^h := \left\{ q \in L^2(\Omega): \int_\Omega q\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0, q|_K \in P_m(K),\ \forall K \in \mathrm{I} \right\},$$

P_l 表示所有在K 上次数最多为l 次的多项式的集合, $l \geqslant 1, m \geqslant 0, l \geqslant m$. 其中 $\nabla_h \cdot \boldsymbol{v}$ 和 $\nabla_h \boldsymbol{v}$ 限制在每个单元 $K \in \mathrm{I}$ 上与 $\nabla \cdot \boldsymbol{v}$, $\nabla \boldsymbol{v}$ 等价. $c_{11} > 0$ 且与 h 无关.

用 $\overline{\nabla p}$ 表示 $\boldsymbol{W}^h$ 上的压力梯度投影, 记为:

$$(\overline{\nabla p}, \psi) = (\nabla p, \psi), \qquad \forall \psi \in \boldsymbol{W}^h, \tag{7}$$

其中

$$\boldsymbol{W}^h := \left\{ \psi \in (L^2(\Omega))^d: \psi_i|_K \in P_{l-1}(K),\ \forall K \in \mathrm{I},\ 1 \leqslant i \leqslant d \right\}.$$

下面我们引入稳定项

$$S(p_h, q) = s(p_h, q) + e(p_h, q),$$

其中

$$s(p_h, q) = h(\nabla_h p_h - \overline{\nabla_h p_h}, \nabla_h q - \overline{\nabla_h q}), \tag{8}$$

$$e(p_h, q) = \int_{\Gamma_h} D_{11}[[p_h]] \cdot [[q]]\,\mathrm{d}s, \tag{9}$$

$$D_{11}(\boldsymbol{x}) = d_{11}\max\left\{h_{K^+}, h_{K^-}\right\}, \qquad \boldsymbol{x} \in \langle K^+, K^- \rangle, \tag{10}$$

$d_{11} > 0$ 且与 h 无关.

注 当 $l = 1, m = 0$ 时, 显然 $S(p_h, q) = e(p_h, q)$, 而且由后面的分析知本文的结论同样成立.

现在我们将间断有限元法与压力梯度投影相结合, 得到一种新的稳定化有限元法: 求 $(\boldsymbol{u}_h, p_h) \in \boldsymbol{V}^h \times Q^h$ 使得

$$\begin{cases} a(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{v}, p_h) + C_\alpha(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}), \\ -b(\boldsymbol{u}_h, q) + C_\beta(p_h, q) + S(p_h, q) = (g, q), \end{cases} \qquad \forall(\boldsymbol{v}, q) \in \boldsymbol{V}^h \times Q^h. \tag{11}$$

上式又可进一步简记为求: $(\boldsymbol{u}_h, p_h) \in \boldsymbol{V}^h \times Q^h$ 使得

$$\Phi(\boldsymbol{u}_h, p_h; \boldsymbol{v}, q) = F(\boldsymbol{v}, q), \qquad \forall(\boldsymbol{v}, q) \in \boldsymbol{V}^h \times Q^h, \tag{12}$$

其中

$$\Phi(\boldsymbol{u}_h, p_h; \boldsymbol{v}, q) = a(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{v}, p_h) - b(\boldsymbol{u}_h, q) + C_\alpha(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}) + C_\beta(p_h, q) + S(p_h, q),$$

$$F(\boldsymbol{v}, q) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}) + (g, q).$$

2 解的存在唯一性

首先定义如下范数:

$$
\begin{aligned}
|||(\boldsymbol{u}, p)|||^2 &= (\|\nabla_h \boldsymbol{u}\|_0^2 + \|\nabla_h \cdot \boldsymbol{u}\|_0^2 + |\|\underline{[[u]]}\||_{0,\Gamma_h}^2) + \\
&\quad (\|p\|_0^2 + |p|_*^2) + h\|\nabla_h p - \overline{\nabla_h p}\|_0^2 = \\
&\quad |||\boldsymbol{u}|||_V^2 + |||p|||_Q^2 + h\|\nabla_h p - \overline{\nabla_h p}\|_0^2,
\end{aligned}
$$

其中

$$
\|\nabla_h \boldsymbol{v}\|_0^2 = \sum_K \|\nabla \boldsymbol{v}\|_{0,K}^2, \quad |\|\underline{[[v]]}\||_{0,\Gamma_h}^2 = \int_{\Gamma_h} C_{11} \underline{[[v]]} : \underline{[[v]]} \mathrm{d}s,
$$

$$
|q|_*^2 = \int_{\Gamma_h} D_{11} [[q]] \cdot [[q]] \mathrm{d}s .
$$

引理 1[10] 若 $\boldsymbol{w} \in \prod_{K \in \mathrm{I}} H^2(K)$, $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}^h$, 则有

$$
\int_{\Gamma_i} \left\{\left\{ \nabla_h \boldsymbol{w} \right\}\right\} : \underline{[[v]]} \leqslant C \left(\sum_K |\boldsymbol{w}|_{1,K}^2 + h^2 |\boldsymbol{w}|_{2,K}^2 \right)^{1/2} |||\underline{[[v]]}|||_{0,\Gamma_h}. \tag{13}
$$

利用与文献[27]相似的证明技巧, 得到如下引理.

引理 2 存在插值算子 $\Pi: \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}^h$ 具有如下正交性:

$$
(\boldsymbol{u} - \Pi \boldsymbol{u}, \phi) = 0, \qquad \forall \phi \in \boldsymbol{W}^h \tag{14}
$$

以及对于所有的 $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}$ 有

$$
\|\nabla_h(\boldsymbol{u} - \Pi \boldsymbol{u})\|_0 \leqslant C \|\boldsymbol{u}\|_1, \quad \|\boldsymbol{u} - \Pi \boldsymbol{u}\|_0 \leqslant Ch \|\boldsymbol{u}\|_1. \tag{15}
$$

引理 3 存在与 h 无关的正常数 C_1、C_2 使得对于所有的 $(\boldsymbol{v}, q) \in \boldsymbol{V}^h \times Q^h$, $\phi \in \boldsymbol{W}^h$, 存在 $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{V}^h$ 满足

$$
\begin{aligned}
&\Phi(\boldsymbol{v}, q; \boldsymbol{w}, 0) \geqslant C_1 \|q\|_0^2 - \\
&\quad C_2 (|||\boldsymbol{v}|||_V^2 + |q|_*^2 + h\|\nabla_h q + \phi\|_0^2), \quad |||\boldsymbol{w}|||_V \leqslant C \|q\|_0.
\end{aligned} \tag{16}
$$

证明 通过连续的 inf-sup 条件: 存在 $\boldsymbol{u} \in H_0^1(\Omega)^d = \left\{ \boldsymbol{u} \in H^1(\Omega)^d : \boldsymbol{u}|_{\partial\Omega} = 0 \right\}$ 满足

$$
-\int_\Omega q \nabla \cdot \boldsymbol{u} \mathrm{d}\boldsymbol{x} \geqslant k \|q\|_0^2, \quad \|\boldsymbol{u}\|_1 \leqslant \|q\|_0, \tag{17}
$$

其中 $k > 0$ 是依赖于 Ω 的常数. 由 $\Phi(\cdot; \cdot)$ 的定义我们得到

$$
\Phi(\boldsymbol{v}, q; \Pi \boldsymbol{u}, 0) = a(\boldsymbol{v}, \Pi \boldsymbol{u}) + b(\Pi \boldsymbol{u}, q) + C_\alpha(\boldsymbol{v}, \Pi \boldsymbol{u}) .
$$

令 $\xi_{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{u} - \Pi \boldsymbol{u}$, 由引理 1 以及(17)式可得

$$
|a(\boldsymbol{v}, \Pi \boldsymbol{u})| = |a(\boldsymbol{v}, \xi_{\boldsymbol{u}})| + |a(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})| \leqslant C_3 \|q\|_0 |||\boldsymbol{v}|||_V.
$$

所以

$$
a(\boldsymbol{v}, \Pi \boldsymbol{u}) \geqslant -C_3 \varepsilon_1 \|q\|_0^2 - (C_3/\varepsilon_1) |||\boldsymbol{v}|||_V^2, \tag{18}
$$

对于第 2 项

$$
b(\Pi \boldsymbol{u}, q) = b(\boldsymbol{u}, q) - b(\xi_{\boldsymbol{u}}, q) .
$$

由分部积分以及(14)式知: 对于任意的 $\phi \in \boldsymbol{W}^h$ 有

$$
b(\xi_{\boldsymbol{u}}, q) = (\xi_{\boldsymbol{u}}, \nabla_h q + \phi) - \int_{\Gamma_h} \left\{\left\{ \xi_{\boldsymbol{u}} \right\}\right\} [[q]] \mathrm{d}s .
$$

则由(17)式得

$$
|-b(\xi_{\boldsymbol{u}}, q)| \leqslant C_4 \varepsilon_2 \|q\|_0^2 + (C_4/\varepsilon_2)(h\|\nabla_h q + \phi\|_0^2 + |q|_*^2) .
$$

又因为 $b(\boldsymbol{u}, q) = -\int_\Omega q \nabla \cdot \boldsymbol{u} \mathrm{d}\boldsymbol{x}$, 则

$$b(\Pi\boldsymbol{u}, q) \geqslant k\|q\|_{0,\Omega}^2 - C_4\varepsilon_2\|q\|_{0,\Omega}^2 - \frac{C_4|q|_*^2}{\varepsilon_2} - \frac{C_4}{\varepsilon_2}h\|\nabla_h q + \phi\|_0^2. \tag{19}$$

最后 1 项 $C_\alpha(\boldsymbol{v}, \Pi\boldsymbol{u})$ 可记为

$$|C_\alpha(\boldsymbol{v}, \Pi\boldsymbol{u})| \leqslant |C_\alpha(\boldsymbol{v}, \xi_{\boldsymbol{u}})| + |C_\alpha(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})|.$$

由 $C_\alpha(\cdot, \cdot)$ 的定义以及分部积分得

$$C_\alpha(\boldsymbol{v}, \xi_{\boldsymbol{u}}) = -((\nabla_h\cdot\alpha)\boldsymbol{v}, \xi_{\boldsymbol{u}}) - (\boldsymbol{v}, (\alpha\cdot\nabla_h)\xi_{\boldsymbol{u}}) + \sum_{e\subset\Gamma_+}\int_e(\hat{\boldsymbol{v}}^\alpha \otimes \alpha):(\xi_{\boldsymbol{u}} \otimes \boldsymbol{n})\mathrm{d}s + \sum_{e\subset\Gamma_I}\int_e(\hat{v}^\alpha \otimes \alpha):\underline{[[\xi_{\boldsymbol{u}}]]}\mathrm{d}s = \sum_{i=1}^4 T_i,$$

其中: $\Gamma_+ = \left\{\boldsymbol{x} \in \partial\Omega: \alpha(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{n} \geqslant \boldsymbol{0}\right\}$ 为流出边界. 由于前面我们假设 $\nabla\cdot\alpha = 0$, 所以 $T_1 = 0$. 由算子性质以及 Poincar 不等式我们得到

$$|T_2| \leqslant \|\alpha\|_\infty\|\boldsymbol{v}\|_0\|\nabla\xi_{\boldsymbol{u}}\|_0 \leqslant C\|\boldsymbol{u}\|_1\|\nabla_h\boldsymbol{v}\|_0$$

以及由迹定理和 Poincar 不等式我们有

$$|T_3 + T_4| \leqslant \|\alpha\|_\infty h^{1/2}\|\boldsymbol{v}\|_{0,e}h^{-1/2}\|\xi_{\boldsymbol{u}}\|_{0,e} + \|\alpha\|_\infty h^{1/2}\|\xi_{\boldsymbol{u}}\|_{0,e}\||\underline{[[v]]}|\|_{0,\Gamma_h} \leqslant C\|\boldsymbol{u}\|_1(\|\nabla_h\boldsymbol{v}\|_0 + \||\underline{[[v]]}|\|_{0,\Gamma_h}).$$

则

$$|C_\alpha(\boldsymbol{v}, \Pi\boldsymbol{u})| \leqslant C_5\varepsilon_3\|q\|_0^2 + \frac{C_5\|\nabla_h\boldsymbol{v}\|_0^2}{\varepsilon_3} + C_5\varepsilon_4\|q\|_0^2 + \frac{C_5\||\underline{[[v]]}|\|_{0,\Gamma_h}^2}{\varepsilon_4}. \tag{20}$$

由(18)式到(20)式的估计, 选取适当的系数 $\left\{\varepsilon_i\right\}_{i=1}^4$, 我们得到

$$\Phi(\boldsymbol{v}, q; \Pi\boldsymbol{u}, 0) \geqslant C_1\|q\|_0^2 - C_2(|||\boldsymbol{v}|||_V^2 + h\|\nabla_h q + \phi\|_0^2 + |q|_*^2).$$

另外, 因为

$$|||\Pi\boldsymbol{u}|||_V \leqslant |||\Pi\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}|||_V + |||\boldsymbol{u}|||_V \leqslant C\|\boldsymbol{u}\|_1 \leqslant C\|q\|_0,$$

所以 $\boldsymbol{w} = \Pi\boldsymbol{u}$ 满足引理 2. 引理 2 证毕. □

定理 1 存在与 h 无关的正常数 C, 使得

$$\sup_{(\boldsymbol{v},q)\in \boldsymbol{V}^h\times Q^h}\frac{\Phi(\boldsymbol{u}_h, p_h; \boldsymbol{v}, q)}{|||\boldsymbol{v}|||_V + |||q|||_Q} \geqslant C(|||\boldsymbol{u}_h|||_V + |||p|||_Q), \quad \forall(\boldsymbol{u}_h, p_h) \in \boldsymbol{V}^h \times Q^h. \tag{21}$$

证明 我们将构造 $(\hat{\boldsymbol{v}}, \hat{q})$, 使得

$$\Phi(\boldsymbol{u}_h, p_h; \hat{\boldsymbol{v}}, \hat{p}) \geqslant C(|||\boldsymbol{u}_h|||_V + |||p_h|||_Q)(|||\hat{\boldsymbol{v}}|||_V + |||\hat{p}|||_Q).$$

在格式(12)中令 $\boldsymbol{v} = \gamma\boldsymbol{u}_h$, $q = \gamma p_h$(其中 γ 为正常数)有

$$\Phi(\boldsymbol{u}_h, p_h; \gamma\boldsymbol{u}_h, \gamma p_h) = a(\boldsymbol{u}_h, \gamma\boldsymbol{u}_h) + C_\alpha(\boldsymbol{u}_h, \gamma\boldsymbol{u}_h) + C_\beta(p_h, \gamma p_h) + S(p_h, \gamma p_h).$$

由 $a(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{u}_h)$ 的定义知

$$a(\boldsymbol{u}_h, \gamma\boldsymbol{u}_h) = \gamma|||\boldsymbol{u}_h|||_V^2 \tag{22}$$

以及

$$S(p_h, \gamma p_h) = \gamma(|p_h|_*^2 + h\|\nabla_h p_h - \overline{\nabla_h p_h}\|_0^2), \tag{23}$$

对于 $C_\alpha(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{u}_h)$ 和 $C_\beta(p_h, p_h)$, 由分部积分以及 Poincar 不等式知

$$C_\alpha(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{u}_h) \geqslant -\gamma\frac{1}{2}\|\nabla\cdot\alpha\|_\infty C_{\mathrm{Poinc}}\|\nabla_h\boldsymbol{u}_h\|_0+$$
$$\gamma\left(\frac{1}{2}\int_{\Gamma_I}|\alpha\cdot\boldsymbol{n}|\,|\underline{[[u_h]]}|^2\mathrm{d}s+\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}|\alpha\cdot\boldsymbol{n}|\,|\boldsymbol{u}_h|^2\mathrm{d}s\right) \tag{24}$$

以及

$$C_\beta(p_h,p_h) = -\gamma\frac{1}{2}\|\nabla\cdot\beta\|_\infty\|p_h\|_0^2+$$
$$\gamma\left(\frac{1}{2}\int_{\Gamma_I}|\beta\cdot\boldsymbol{n}|\,|[[p_h]]|^2\mathrm{d}s+\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}|\beta\cdot\boldsymbol{n}|\,|p_h|^2\mathrm{d}s\right). \tag{25}$$

则由(22) 式到(25) 式我们得到

$$\Phi(\boldsymbol{u}_h,p_h;\gamma\boldsymbol{u}_h,\gamma p_h) \geqslant$$
$$\gamma|||\boldsymbol{u}_h|||_V^2+\gamma|p_h|_*^2-\gamma\frac{1}{2}\|\nabla\cdot\alpha\|_\infty C_{\mathrm{Poinc}}\|\nabla_h\boldsymbol{u}_h\|_0+$$
$$\gamma\left(\frac{1}{2}\int_{\Gamma_I}|\alpha\cdot\boldsymbol{n}|\,|\underline{[[u_h]]}|^2\mathrm{d}s+\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}|\alpha\cdot\boldsymbol{n}|\,|\boldsymbol{u}_h|^2\mathrm{d}s\right)-$$
$$\gamma\frac{1}{2}\|\nabla\cdot\beta\|_\infty\|p_h\|_0^2+\gamma\left(\frac{1}{2}\int_{\Gamma_I}|\beta\cdot\boldsymbol{n}|\,|[[p_h]]|^2\mathrm{d}s+\right.$$
$$\left.\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}|\beta\cdot\boldsymbol{n}|\,|p_h|^2\mathrm{d}s\right)+\gamma h\|\nabla_h p_h-\overline{\nabla_h p_h}\|_0^2. \tag{26}$$

在(12) 式中令 $(\boldsymbol{v},q)=(\boldsymbol{w},0)$，由引理 2 得到

$$\Phi(\boldsymbol{u}_h,p_h,\boldsymbol{w},0) \geqslant C_1\|p_h\|_0^2-$$
$$C_2(|||\boldsymbol{u}_h|||_V^2+|p_h|_*^2+h\|\nabla_h p+\phi\|_0^2), \tag{27}$$

则当 $(\hat{\boldsymbol{v}},\hat{q})=(\gamma\boldsymbol{u}_h+\boldsymbol{w},\gamma p_h)$ 时, 由于前面我们假设 $\nabla\cdot\alpha=0$, $\nabla\cdot\beta=0$, 所以我们得到

$$\Phi(\boldsymbol{u}_h,p_h;\hat{\boldsymbol{v}},\hat{q}) \geqslant$$
$$(\gamma-C_2)\|\nabla_h\boldsymbol{u}_h\|_0^2+(\gamma-C_2)(\|\nabla\cdot\boldsymbol{u}_h\|_0^2+|||\underline{[[u]]}|||_{0,\Gamma_h}^2)+$$
$$C_1\|p_h\|_0^2+(\gamma-C_2)|p_h|_*^2+(\gamma-C_2)h\|\nabla_h p_h-\overline{\nabla_h p_h}\|_0^2.$$

选取适当大的 γ, 则我们可得到

$$\Phi(\boldsymbol{u}_h,p_h;\hat{\boldsymbol{v}},\hat{q}) \geqslant |||\boldsymbol{u}_h|||_V^2+|||p_h|||_Q^2.$$

最后由引理 2 得

$$\Phi(\boldsymbol{u}_h,p_h;\hat{\boldsymbol{v}},\hat{q}) \geqslant C(|||\boldsymbol{u}_h|||_V+|||p_h|||_Q)(|||\hat{\boldsymbol{v}}|||_V+|||\hat{q}|||_Q),$$

定理 1 证毕. □

3 误差估计

设 $(\boldsymbol{u}_I,p_I)$ 分别为 $(\boldsymbol{u},p)$ 的有限元插值, 令

$$\xi=\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u}_I,\quad \zeta=\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_I,\quad \boldsymbol{e}_u=\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h=\zeta-\xi,$$
$$\tau=p_h-p_I,\quad \eta=p-p_I,\quad \boldsymbol{e}_p=p-p_h=\eta-\tau.$$

定理 2 若 I 为拟一致剖分, $(\boldsymbol{u}_h,p_h)\in \boldsymbol{V}^h\times Q^h$, $(\boldsymbol{u},p)\in(H^{l+1}(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))^d\times(H^{m+1}(\Omega)\cap L_0^2(\Omega))$ 分别为(12) 式和(1) 式的解, 则存在与 h 无关的常数 C, 使得

$$|||\boldsymbol{e}_u|||_V^2+|\boldsymbol{e}_p|_*^2+h\|\nabla_h e_p-\overline{\nabla_h e_p}\|_0^2 \leqslant$$
$$\varepsilon\|e_p\|_0^2+C(h^{2l}|\boldsymbol{u}|_{l+1}^2+h^{2m+1}|p|_{m+1}^2). \tag{28}$$

证明 若 $(\boldsymbol{u},p)$ 为问题(1) 的真解时, 对于 $\forall(\boldsymbol{v},q)\in \boldsymbol{V}\times Q$, 我们有

$$\begin{cases} a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})+b(\boldsymbol{v},p)+C_\alpha(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}), \\ -b(\boldsymbol{u},q)+C_\beta(p,q)+e(p,q)=(g,q). \end{cases} \tag{29}$$

由(29)式减去(11)式得

$$a(\boldsymbol{e}_u,\boldsymbol{v})+b(\boldsymbol{v},e_p)-b(\boldsymbol{e}_u,q)+C_\alpha(\boldsymbol{e}_u,\boldsymbol{v})+C_\beta(e_p,q)+S(e_p,q)= s(p,q). \tag{30}$$

令 $\boldsymbol{v}=\xi, q=\tau$ 得

$$a(\xi,\xi)+C_\alpha(\xi,\xi)+C_\beta(\tau,\tau)+e(\tau,\tau)+s(\tau,\tau)= a(\zeta,\xi)+b(\xi,\eta)-b(\zeta,\tau)+C_\alpha(\zeta,\xi)+ C_\beta(\eta,\tau)+e(\eta,\tau)+s(\eta,\tau)+s(p,\tau). \tag{31}$$

我们有

$$a(\xi,\xi)+e(\tau,\tau)=|||\xi|||_V^2+|\tau|_*^2. \tag{32}$$

因为 $\nabla\cdot\alpha=0$, $\nabla\cdot\beta=0$, 所以

$$C_\alpha(\xi,\xi)=\frac{1}{2}\int_{\Gamma_I}|\alpha\cdot\boldsymbol{n}||\underline{[[\xi]]}|^2\mathrm{d}s+\frac{1}{2}|\alpha\cdot\boldsymbol{n}||\xi|^2\mathrm{d}s,$$

$$C_\beta(\tau,\tau)=\frac{1}{2}\int_{\Gamma_I}|\beta\cdot\boldsymbol{n}||[[\tau]]|\mathrm{d}s+\frac{1}{2}|\beta\cdot\boldsymbol{n}||\tau|^2\mathrm{d}s.$$

则由 Poincar 不等式得

$$|C_\alpha(\xi,\xi)|\leqslant C(\|\nabla_h\xi\|_0^2+Ch^{1/2}\|\xi\|_{0,e}h^{-1/2}\|\xi\|_{0,e})\leqslant C(\|\nabla_h\xi\|_0^2+|||\underline{[[\xi]]}|\|_{0,\Gamma_h}^2).$$

所以

$$a(\xi,\xi)+C_\alpha(\xi,\xi)+C_\beta(\tau,\tau)+S(\tau,\tau)\geqslant C(|||\xi|||_V^2+|\tau|_*^2+h\|\nabla_h\tau-\overline{\nabla_h\tau}\|_0^2)+ \frac{1}{2}\int_{\Gamma_I}|\beta\cdot\boldsymbol{n}||\underline{[[\tau]]}|\mathrm{d}s+\frac{1}{2}|\beta\cdot\boldsymbol{n}||\tau|^2\mathrm{d}s+ \frac{1}{2}\int_{\Gamma_I}|\alpha\cdot\boldsymbol{n}||\underline{[[\xi]]}|^2\mathrm{d}s+\frac{1}{2}|\alpha\cdot\boldsymbol{n}||\xi|^2\mathrm{d}s.$$

估计等式(31)的右边, 利用引理1以及迹定理有

$$\begin{cases} a(\zeta,\xi)\leqslant Ch^{2l}|\boldsymbol{u}|_{l+1}^2+\varepsilon|\|\xi\||_V^2, \\ b(\xi,\eta)\leqslant\varepsilon|||\xi|||_V^2+Ch^{2m+2}|p|_{m+1}^2, \\ b(\zeta,\tau)\leqslant Ch^{2l}|\boldsymbol{u}|_{l+1}^2+\varepsilon(|\tau|_*^2+\|\tau\|_0^2), \\ e(\eta,\tau)\leqslant Ch^{2m+2}|p|_{m+1}^2+\varepsilon|\tau|_*^2. \end{cases} \tag{33}$$

因为

$$C_\beta(\eta,\tau)=-((\nabla_h\cdot\beta)\eta,\tau)-(\eta,(\beta\cdot\nabla_h)\tau)+ \sum_{e\subset\Gamma_+}\int_e(\eta^\beta\cdot\alpha)\cdot(\tau\cdot\boldsymbol{n})\mathrm{d}s+\sum_{e\subset\Gamma_I}\int_e(\eta^\beta\cdot\beta)\cdot[[\tau]]\mathrm{d}s=\sum_{i=1}^4 R_i.$$

对于 R_1, 因为 $\nabla\cdot\beta=0$, 所以 $R_1=0$. 由插值性质得到

$$|R_2|\leqslant Ch^{-1}\|\eta\|_0^2+\varepsilon h\|\nabla_h\tau\|_0^2\leqslant Ch^{2m+1}|p|_{m+1}^2+\varepsilon h\|\nabla_h\tau\|_0^2.$$

由迹定理

$$|R_3+R_4|\leqslant Ch^{1/2}\|\eta\|_{0,e}h^{-1/2}\|\tau\|_{0,e}\leqslant Ch^{2m+1}|p|_{m+1}^2+\varepsilon h\|\nabla_h\tau\|_0^2.$$

所以

$$|C_\beta(\eta,\tau)| \leqslant Ch^{2m+1}|p|^2_{m+1} + \varepsilon h\|\nabla_h\tau\|^2_0, \tag{34}$$

与 $C_\beta(\eta,\tau)$ 的估计相类似,

$$|C_\alpha(\zeta,\xi)| \leqslant Ch^{2l}|\boldsymbol{u}|^2_{l+1} + \varepsilon(\|\nabla_h\xi\|^2_0 + |\xi|^2_*). \tag{35}$$

又因为

$$\begin{aligned} s(\eta,\tau) &= h(\nabla_h\eta - \overline{\nabla_h\eta}, \nabla_h\tau - \overline{\nabla_h\tau}) \leqslant \\ &\quad Ch^{2m+1}|p|^2_{m+1} + \varepsilon h\|\nabla_h\tau - \overline{\nabla_h\tau}\|^2_0 \end{aligned} \tag{36}$$

以及

$$s(p,\tau) \leqslant Ch^{2m+1}|p|^2_{m+1} + \varepsilon h\|\nabla_h\tau - \overline{\nabla_h\tau}\|^2_0. \tag{37}$$

将(33)式到(37)式代入(31)式得到

$$\begin{aligned} &|||\xi|||^2_V + |\tau|^2_* + h\|\nabla_h\tau - \overline{\nabla_h\tau}\|^2_0 \leqslant \\ &\quad C(h^{2l}|\boldsymbol{u}|^2_{l+1} + h^{2m+1}|p|^2_{m+1}) + \varepsilon\|\tau\|^2_0. \end{aligned}$$

由三角不等式可得定理. □

下面我们估计关于压力和速度 L^2- 范数误差. 首先估计压力 $e_p = p - p_h$.

定理 3　在定理 2 的假设下, 存在与 h 无关的常数 C, 使得

$$\|e_p\|_0 \leqslant C(h^l|\boldsymbol{u}|_{l+1} + h^{m+1/2}|p|_{m+1}). \tag{38}$$

证明　由(14)式得

$$\Phi(\xi,\tau;\boldsymbol{v},q) = \Phi(\zeta,\eta;\boldsymbol{v},q) + S(p,q),$$

我们在上式中令 $q = 0$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$, 则利用引理 3 得到

$$C_1\|\tau\|^2_0 - C_2(|||\xi|||^2_V + |\tau|^2_* + h\|\nabla_h\tau - \overline{\nabla_h\tau}\|^2_0) \leqslant \Phi(\zeta,\eta;\boldsymbol{w},0), \tag{39}$$

与定理 2 的估计相类似, 利用引理 3 我们得到

$$\begin{aligned} \Phi(\zeta,\eta;\boldsymbol{w},0) &= a(\zeta,\boldsymbol{w}) + b(\boldsymbol{w},\eta) + C_\alpha(\zeta,\boldsymbol{w}) \leqslant \\ &\quad C(|||\zeta|||^2_V + \|\eta\|^2_0) + \varepsilon\|\tau\|^2_0, \end{aligned}$$

则

$$\|\tau\|^2_0 \leqslant C(|||\xi|||^2_V + h\|\nabla_h\tau - \overline{\nabla_h\tau}\|^2_0 + |||\zeta|||^2_V + \|\eta\|^2_0) + \varepsilon\|\tau\|^2_0.$$

利用定理 2 得

$$\|\tau\|^2_0 \leqslant C(h^{2l}|\boldsymbol{u}|^2_{l+1} + h^{2m+1}|p|^2_{m+1}), \tag{40}$$

最后由三角不等式得到定理 3. □

由定理 2 和定理 3 可得到如下推论:

推论 1　在定理 2 的假设下, 存在与 h 无关的常数 C, 使得

$$\begin{aligned} &\|\nabla_h(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h)\|^2_0 + \|\,\underline{[[u - u_h]]}\,\|^2_{0,\Gamma_h} \leqslant \\ &\quad C(h^{2l}|\boldsymbol{u}|^2_{l+1} + h^{2m+1}|p|^2_{m+1}), \end{aligned} \tag{41}$$

对于速度的 L^2- 范数误差估计, 我们考虑如下的问题, 首先假设区域 Ω 为凸的. 求: $(z,r) \in (H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega))^d \times H^1(\Omega) \cap L^2_0(\Omega)$, 使得

$$\begin{cases} -\Delta z - \nabla\nabla\cdot z + \alpha\cdot\nabla z + \nabla r = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h, & \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ \nabla\cdot z + \beta\cdot\nabla r = 0, & \text{在 } \Omega \text{ 中}. \end{cases} \tag{42}$$

由椭圆正则性可得

$$|z|_2 + |r|_1 \leqslant C\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h\|_0. \tag{43}$$

假设对于 (z,r) 的插值 (z_I, r_I) 具有如下性质:

$$\begin{cases} |w - w_I|_i \leqslant Ch^{2-i}|w|_2, \quad i = 0, 1, \\ \left(\sum_K h_K^2 \|\nabla r_I\|_{0,K}^2\right)^{1/2} + |r_I|_* \leqslant Ch\|\nabla r\|_0. \end{cases} \tag{44}$$

定理 4 若区域 Ω 为凸的, 且 I 为拟一致剖分, 则

$$\|\boldsymbol{e_u}\|_0 \leqslant C(h^{l+1}|\boldsymbol{u}|_{l+1} + h^{m+1/2}|\boldsymbol{u}|_{m+1}). \tag{45}$$

证明 对于任意的 $(\boldsymbol{v}, q) \in \boldsymbol{V}^h \times Q^h$, $(\boldsymbol{z}, r)$ 满足

$$a(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{v}) + C_\alpha(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{v}, r) = (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}), \tag{46}$$

$$-b(\boldsymbol{z}, q) + e(r, q) + C_\beta(r, q) = 0, \tag{47}$$

在(46) 式中令 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h$, 则(46) 式转化为

$$a(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h) + C_\alpha(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h) + b(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h, r) = \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h\|_0^2. \tag{48}$$

对于任意的 $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}^h$ 有

$$a(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}) + C_\alpha(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h) + b(\boldsymbol{v}, p - p_h) = 0, \tag{49}$$

在(49) 式中令 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{z}_I$, (48) 式减去(49) 式可得

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h\|_0^2 \leqslant & |a(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}_I)| + |C_\alpha(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}_I, \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h)| + \\ & |C_\alpha(\boldsymbol{z}_I, \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h)| + |C_\alpha(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{z}_I)| + |b(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h, r)| + \\ & |b(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}_I, p - p_h)| + |b(\boldsymbol{z}, p - p_h)|. \end{aligned} \tag{50}$$

由引理 1 得

$$\begin{cases} a(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}_I) \leqslant Ch^{l+1}|\boldsymbol{z}|_2|\boldsymbol{u}|_{l+1}, \\ |C_\alpha(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}_I, \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h)| \leqslant Ch^2|\boldsymbol{z}|_2(\|\nabla_h \boldsymbol{e_u}\|_0 + \||\underline{[[e_u]]}|\|_{0,\Gamma_h}), \\ |C_\alpha(\boldsymbol{z}_I, \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h)| + |C_\alpha(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{z}_I)| \leqslant \\ \qquad Ch|\boldsymbol{z}|_2(\|\nabla_h \boldsymbol{e_u}\|_0 + \||\underline{[[e_u]]}|\|_{0,\Gamma_h}), \end{cases} \tag{51}$$

由于 $b(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h, r) = b(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h, r - r_I) + b(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h, r_I)$, 所以

$$\begin{aligned} & |b(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h, r)| \leqslant \\ & \quad Ch\|\boldsymbol{e_u}\|_0(\|\nabla_h \cdot \boldsymbol{e_u}\|_0 + \||\underline{[[e_u]]}|\|_{0,\Gamma_h}) + |b(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h, r_I)|. \end{aligned} \tag{52}$$

令 $D = b(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h, r_I)$, 则有

$$D = \int_{\Gamma_h} D_{11}[[e_p]][[r_I]]\mathrm{d}s + C_\beta(e_p, r_I) + s(e_p, r_I) - s(e_p, r_I).$$

与前面的估计类似,

$$|D| \leqslant C\|\nabla r\|_0(\||e_p|\|_Q + h\|\nabla_h p - \overline{\nabla_h p}\|_0). \tag{53}$$

由(43) 式、(52) 式和(53) 式得

$$\begin{aligned} & |b(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h, r)| \leqslant C\|\boldsymbol{e_u}\|_0(h(\|\nabla_h \cdot \boldsymbol{e_u}\|_0 + \\ & \quad \||\underline{[[e_u]]}|\|_{0,\Gamma_h}) + \||e_p|\|_Q + h\|\nabla_h p - \overline{\nabla_h p}\|_0) \end{aligned} \tag{54}$$

以及

$$|b(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}_I, p - p_h)| \leqslant Ch^{m+3/2}|\boldsymbol{z}|_2|p|_{m+1}. \tag{55}$$

由(47) 式知 $b(\boldsymbol{z}, p - p_h) = C_\beta(r, p - p_h) + e(r, p - p_h)$, 则

$$|b(\boldsymbol{z}, p - p_h)| \leqslant C\|\nabla r\|_0\|e_p\|_0 \leqslant C\|\boldsymbol{e_u}\|_0\|e_p\|_0. \tag{56}$$

将(51) 式到(56) 式代入(50) 式得

$$\|\boldsymbol{e_u}\|_0 \leqslant C(h^{l+1}|\boldsymbol{u}|_{l+1} + h^{m+1/2}|p|_{m+1}).$$ □

注 由文章的第 3 节, 我们可以看到关于压力的 L^2- 范数误差估计的精度损失了 1/2 阶, 文献[24] 中精度

也损失了一阶．这是由于连续方程 $\nabla\cdot\boldsymbol{u}+\beta\cdot\nabla p=g$ 中出现了关于压力p 的梯度项．在文献[15]中，Johnson 用流线扩散法求解方程 $\beta\cdot\nabla p+p=\boldsymbol{f}$，得到误差 $\|p-p_h\|_0\leqslant h^{m+1/2}\|\boldsymbol{f}\|_{m+1}$．对于与连续方程类似的方程 $\beta\cdot\nabla p=\boldsymbol{f}$，Falk 和 Richter 用连续有限元法求解[28]，得到局部误差 $\|p-p_h\|_0\leqslant Ch^{m+1/4}\|\boldsymbol{f}\|_{m+1}$．因此本文方法的误差估计阶与流线扩散法[15]的误差估计阶是相同的，与文献[24,28]相比较，精度分别提高了 1/4 阶和 1/2 阶.

致谢　感谢电子科技大学人才引进基金的资助和审稿专家提出的宝贵意见和建议.

[参 考 文 献]

[1] Reed W H, Hill T R. Triangular mesh methods for the neutron transport equation[R]. Technical Report LA-UR-73-479, Los Alamos Scientific Laboratory, 1973.

[2] Cockburn B, Shu C W. TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws Ⅱ: general framework[J]. Math Comp, 1989, **52**(186): 411-435.

[3] Cockburn B, Lin S Y. TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws Ⅲ: one-dimensional systems[J]. J Comp Phys, 1989, **84**(1): 90-113.

[4] Cockburn B, Shu C W. TVB Runge-Kutta discontinuous Galerkin methods for conservation laws V: Multidimensional systems[J]. J Comp Phys, 1998, **144**(1): 199-224.

[5] Arnold D, Brezzi F, Cockburn B, et al. Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problem[J]. SIAM J Numer Anal, 2002, **39**(5): 1749-1779.

[6] Brezzi F, Manzini G, Marini D, et al. Discontinuous Galerkin approximation for elliptic problems[J]. Numer Methods Partial Differential Equations, 2000, **16**(4): 365-378.

[7] Babuska I, Zlamal M. Noncomforming elements in the finite element method with penalty[J]. SIAM J Numer Anal, 1973, **10**(2): 863-875.

[8] Cockburn B, Kanschat G, Schotzau, et al. Local discontinuous Galerkin methods for the Stokes system[J]. SIAM J Numer Anal, 2002, **40**(1): 319-343.

[9] YE Xiu. Discontinuous stable elements for the incompressible flow[J]. Advances Comp Math, 2004, **20**: 333-345.

[10] 骆艳, 冯民富. Stokes 方程的稳定化间断有限元法[J]. 计算数学, 2006, **28**(2): 163-174.

[11] Bassi F, Rebay S. A high-order accurate discontinuous finite element method for the numerical solution of the compressible Navier-Stokes equations[J]. J Comp Phys, 1997, **131**(2): 267-279.

[12] Bassi F, Rebay S. Numerical evaluation of two discontinuous Galerkin methods for the compressible Navier-Stokes equations[J]. Internat J Numer Methods Fluids, 2002, **40**(2): 197-207.

[13] Girault V, Raviart P A. Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations[M]. Lecture Notes in Math. Vol 749. Berlin and New York: Spring-Verlag, 1981.

[14] Hughes T J, Brooks A. A multidimensional upwind scheme with bo crosswind diffusion[A]. In: Hughes T J, Ed. Finite Element Methods for Convection Dominated Flows[C]. **34**. New York: ASME, 1979, 19-35.

[15] Johnson C. Steamline diffusion methods for problems in fluid mechanics[A]. In: Gallagher R H, Carey G F, Oden J T, Zienkiewicz O C, Eds. Finite Element in Fluids[C]. London; New York: John Wiley and Sons, 1986.

[16] Brook A N, Hughes T J R. Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equation[J]. Comp Methods Appl Mech Engrg, 1982, **32**(2): 199-259.

[17] Hansbo P. A Velocity-pressure streamline diffusion finte element method for incompressible Navier-

Stokes equations[J]. Comput Methods Appl Mech Engrg, 1990, **84**(2): 175-192.

[18] Johnson C, Saranen J. Streamline diffusion methods for the incompressible Euler and Navier-Stokes equationa[J]. Math Comp, 1986, **47**(175): 1-18.

[19] Tabata M. On a conservative upwind finite element scheme for convective-diffusion equations[J]. RAIRO Anal Numer, 1981, **15**: 3-25.

[20] Franca L P, Hughes T J. Two classes of mixed finite element methods[J]. Comput Methods Appl Mech Engrg, 1988, **69**(1): 89-129.

[21] ZHOU Tian-xiao, FENG Min-fu. A least squares Petrov-Galerkin finite element method for the stationary Navier-Stokes equations[J]. Math Comp, 1993, **60**(202): 531-543.

[22] Bochev P, Dohrmann C, Gunzburger M. Stabilization of low-order mixed finite elements for the Stokes equations[J]. SIAM J Numer Anal, 2006, **44**(1): 82-101.

[23] Blasco J, Codina R. Stabilized finite element method for the transient Navier-Stokes equations based on a pressure gradient projection[J]. Comp Methods Appl Mech Engrg, 2000, **182**(3): 277-300.

[24] Bruce Kellogg R, LIU Bi-yue. A finite element method for the compressible Stokes equation[J]. SIAM Numer Anal, 1996, **33**(2): 780-788.

[25] Bruce R, Liu B. A penalized finite element method for a compressible Stokes system[J]. SIAM J Numer Anal, 1997, **34**(3): 1093-1105.

[26] Lesaint P, Raviart P A. On a finite element method for solving the neutron transport equation[A]. In: C de Boor, Ed. Mathematical Aspects of Finite Elements in Paritial Differential Equations[C]. New York: Academic Press, 1974, 89-145.

[27] Braack M, Burman E. Local projection stabilization for the ossen problem and its interpretation as a variational multiscale method[J]. SIAM J Numer Anal, 2006, **43**(6): 2544-2566.

[28] Falk R S, Richter G R. Local error estimates for a finite element for hyperbolic and covection-diffusion equations[J]. SIAM J Numer Anal, 1992, **29**(2): 730-754.

Discontinuous Element Pressure Gradient Stabilizations for the Compressible Navier-Stokes Equations Based on Local Projections

LUO Yan[1], FENG Min-fu[1,2]

(1. School of Applied Mathematics, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 610054, P.R.China;

2. Department of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, P.R.China)

Abstract: A pressure gradient discontinuous finite element formulation for the compressible Navier-Stokes equations based on local projections was derived. The resulting finite element formulation is stable and uniquely solvable without requiring a B-B stability condition. An error estimate was obtained.

Key words: discontinuous finite element methods; pressure gradient projection methods; compressible Navier-Stokes equations; error estimation