

# 非线性颤振系统中既是超临界又是亚临界的 Hopf 分岔点研究\*

陈衍茂, 刘济科

(中山大学 应用力学与工程系, 广州 510275)

(王彪推荐)

摘要: 研究了二元机翼非线性颤振系统的 Hopf 分岔. 应用中心流形定理将系统降维, 并利用复数正规形方法得到了以气流速度为分岔参数的分岔方程. 研究发现, 分岔方程中一个系数不含分岔参数的一次幂, 故使得分岔具有超临界和亚临界双重性质. 用等效线性化法和增量谐波平衡法验证了所得结果.

关键词: 非线性颤振; Hopf 分岔; 超临界; 亚临界; 极限环振动

中图分类号: O345; O322 文献标识码: A

## 引 言

机翼的非线性颤振是航空工程中的常见问题<sup>[1]</sup>. 机翼的非线性颤振研究主要考虑的非线性有结构非线性<sup>[2-6]</sup>和气动力非线性<sup>[7]</sup>. 当气流速度增加至某临界值时, 非线性颤振系统可能出现复杂的分岔, 如, Hopf 分岔等. Liu 和 Zhao<sup>[2]</sup>用等效线性化法研究了含三次非线性刚度的机翼的分岔, 所得结果与数值解很接近. Shahrzad 和 Mahzoon<sup>[3]</sup>用等效线性化法分析了二元机翼的颤振问题. Yang<sup>[4]</sup>结合 KBM 法和等效线性化法分别研究了带外载的二元机翼以及三角翼的极限环颤振. Liu 等人<sup>[5]</sup>用高维谐波平衡法分析了机翼的双重 Hopf 分岔. 此外, 蔡铭等人<sup>[6]</sup>用增量谐波平衡法分析了含多个强非线性环节的机翼颤振.

上述文献均属于非线性颤振的定量研究. 然而, 为确定系统的定性性质(例如, 分岔点的稳定性和类别等), 以上方法稍显繁琐. 因此, Liu 等人<sup>[8]</sup>分别用后继函数法和形式级数法判别了颤振系统分岔点的类别和稳定性. 由于非定常流气弹性模型本质上是无穷维的, Lee 等人<sup>[9]</sup>将之降为 8 维的一阶常微分方程(ODEs)系统. Liu 等人<sup>[10]</sup>用中心流形定理分析了该 8 维系统, 得到了极限环颤振频率的表达式. Collier 和 Chamara<sup>[11]</sup>将该无穷维系统降至 6 维, 并应用中心流形定理分析了系统的分岔.

具有超临界或亚临界性质的 Hopf 分岔研究甚多<sup>[12-14]</sup>, 而具有双重性质的 Hopf 分岔<sup>[15]</sup>研

\* 收稿日期: 2007-08-15; 修订日期: 2008-01-03

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10772202); 教育部博士学科点专项基金资助项目(20050558032); 广东省自然科学基金资助项目(07003680; 05003295)

作者简介: 陈衍茂(1982-), 男, 江西兴国人, 博士生;

刘济科, 教授, 博士(联系人, Tel: + 86-20-84114666; E-mail: jikelu@hotmail.com).

究较少. 本文给出了非线性颤振系统中既是超临界又是亚临界 Hopf 分岔的一个实例. 应用中心流形定理<sup>[16]</sup>和复数正规形法<sup>[17]</sup>得到了分岔方程, 讨论了该分岔点出现的原因.

## 1 颤振方程及中心流形降维

不可压气流中机翼的颤振方程为<sup>[2]</sup>

$$\begin{cases} h'' + 0.25\alpha'' + 0.1h' + 0.2h + 0.1Q\alpha = 0, \\ 0.25h'' + 0.5\alpha'' + 0.1\alpha' + k_0\alpha + e_2\alpha^3 - 0.04Q\alpha = 0, \end{cases} \quad (1)$$

其中上标“'”表示对时间求导,  $e_2 > 0$  是非线性刚度系数,  $h$  和  $\alpha$  分别表示沉浮和俯仰位移, 其它参数的物理意义见文献[2]. 方程(1)对应的线性系统(忽略非线性项  $e_2\alpha^3$ )一般含有两个颤振临界点. 当  $k_0 = 0.08109668$  时, 该线性方程却只含 1 个颤振临界点, 即  $Q_f = 1.72404509$ . 本文着重研究系统(1)在该点的分岔.

将方程(1)改写为一阶微分方程

$$\mathbf{x}' = A(Q)\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (2)$$

其中

$$A(Q) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4(0.26Q - 4k_0)/7 & -1.6/7 & 0.8/7 & 0.4/7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4(k_0 - 0.24Q)/7 & 0.4/7 & -1.6/7 & -0.8/7 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (\alpha, \alpha', h, h')^T, \mathbf{f}(\mathbf{x}) = e_2(0, -16/7, 0, 4/7)^T x_1^3.$$

记  $Q = Q_f + \varepsilon$ ,  $A(Q) = A(Q_f) + \varepsilon B$ , 其中  $|\varepsilon| \ll 1$ ,

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.04/7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.96/7 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

引入线性变换  $\mathbf{x} = T\mathbf{y}$ ,  $T$  是  $A(Q_f)$  的特征向量组成的矩阵, 方程(2)可化为

$$\mathbf{y}' = C\mathbf{y} + \varepsilon D\mathbf{y} + \mathbf{g}(\mathbf{y}), \quad (3)$$

其中

$$C = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & -0.3761 & 0 & 0 \\ 0.3761 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1714 & -0.0992 \\ 0 & 0 & 0.0992 & -0.1714 \end{bmatrix},$$

$$D = T^{-1}BT = \begin{bmatrix} -0.0322 & 0.0207 & 0.0669 & 0 \\ -0.0502 & -0.0322 & 0.1042 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5929 & -0.3806 & -1.2296 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{y}) = T^{-1}\mathbf{f}(T\mathbf{y}) = e_2(-4.7545, 3.7688, -3.4589, 38.4563)^T \times (-0.3567y_1 + 0.2290y_2 + 0.7398y_3)^T,$$

其中  $y_i$  表示  $\mathbf{y}$  的第  $i$  个分量. 根据中心流形定理<sup>[16]</sup>, 引入方程  $\varepsilon' = 0$  并将方程(3)改写成

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y}' \\ \varepsilon' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \varepsilon \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \varepsilon + \begin{pmatrix} \mathbf{g}(\mathbf{y}) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

对于方程(4),  $\varepsilon$  将被看成是非线性项. 求中心流形的二阶展开式, 可得

$$y_3 = 0.4405 y_1 \varepsilon - 0.9249 y_2 \varepsilon + o(2), \quad y_4 = 2.7467 y_1 \varepsilon + 3.2704 y_2 \varepsilon + o(2), \quad (5)$$

其中  $o(2)$  表示低于二阶的小量, 余类推. 值得注意的是, 中心流形(5) 与非线性系数  $e_2$  无关.

将式(5)代入式(3), 可得中心流形上的方程即约化系统

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{F}(\varepsilon) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1(y_1, y_2) \\ g_2(y_1, y_2) \end{pmatrix}, \quad (6)$$

其中

$$\mathbf{F}(\varepsilon) = \begin{pmatrix} -0.0322\varepsilon + 0.0295\varepsilon^2 & -0.3761 + 0.0207\varepsilon - 0.0618\varepsilon^2 \\ 0.3761 - 0.0502\varepsilon + 0.0459\varepsilon^2 & 0.0322\varepsilon - 0.0963\varepsilon^2 \end{pmatrix} + o(2).$$

## 2 分岔方程

当  $|\varepsilon|$  足够小时,  $\mathbf{F}(\varepsilon)$  的两个特征值可表示为  $\mu_1(\varepsilon) + i\omega(\varepsilon)$ , 其中  $\omega(\varepsilon)$  是  $\varepsilon$  的连续正函数, 且  $\omega(0) = 0.3761$ ,  $\mu_1(\varepsilon) = -0.0334\varepsilon^2 + o(2)$ .

作变换  $(y_1, y_2)^T = \mathbf{P}(\varepsilon)(\xi_1, \xi_2)^T$ , 其中  $\mathbf{P}(\varepsilon)$  是  $\mathbf{F}(\varepsilon)$  的特征向量组成的矩阵, 注意到

$$\mathbf{P}(\varepsilon) = \mathbf{E}_{2 \times 2} + o(1). \quad (7)$$

忽略右端的一阶小量, 不影响分岔点附近的定性性质, 即  $\mathbf{P}$  取单位阵. 那么, 方程(6)变为

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1(\varepsilon) & -\omega(\varepsilon) \\ \omega(\varepsilon) & \mu_1(\varepsilon) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1(\xi_1, \xi_2) \\ g_2(\xi_1, \xi_2) \end{pmatrix}, \quad (8)$$

其中  $g_1, g_2$  与式(6)相同. 令

$$z = \xi_1 + i\xi_2. \quad (9)$$

将方程(8)中第2个方程的  $i$  倍加上第1个方程, 并考虑式(9), 可得

$$z' = i\omega(\varepsilon)z + \mu_1(\varepsilon)z + v(z, z), \quad (10)$$

其中  $v(z, z) = g_1(\xi_1, \xi_2) + ig_2(\xi_1, \xi_2) = c_{30}z^3 + c_{21}z^2\bar{z} + c_{12}z\bar{z}^2 + c_{03}\bar{z}^3 + o(3)$ , 其中  $c_{kl}(k+l=3)$  是  $\varepsilon$  的复值函数. 作近恒等变换  $z = \zeta + p(\zeta, \bar{\zeta})$ , 选择多项式函数

$$p(\zeta, \bar{\zeta}) = \frac{1}{4i\omega(\varepsilon)}(2c_{30}\zeta^3 - 2c_{12}\zeta\bar{\zeta}^2 - c_{03}\bar{\zeta}^3), \quad (11)$$

可将方程(10)化为

$$\zeta' = i\omega(\varepsilon)\zeta + \mu_1(\varepsilon)\zeta + c_{21}\zeta^2\bar{\zeta} + o(3). \quad (12)$$

令

$$\zeta = re^{i\theta}. \quad (13)$$

将式(13)代入式(12), 可得

$$r' = \mu_1(\varepsilon)r + \mu_3(\varepsilon)r^3 + o(3), \quad \theta' = \omega(\varepsilon), \quad (14)$$

其中  $\mu_3(\varepsilon) = \text{Re}c_{21} = 3.4478 - 4.9606\varepsilon + o(1)$ ,  $\text{Re}$  表示取相应实部, 下同. 令  $r' = 0$ , 可得分岔方程

$$\mu_1(\varepsilon)r + \mu_3(\varepsilon)r^3 = 0. \quad (15)$$

## 3 Hopf 分岔

当  $\varepsilon = 0$ , 由式(14)可知, 只要  $r$  足够小, 有  $r' > 0$ , 可知此时分岔点是不稳定焦点. 方程(15)的非零解满足

$$r^2 = -\mu_1/\mu_3. \quad (16)$$

当  $\varepsilon = 0$ , 则  $\mu_1 = 0$ , 方程(15) 只有零解. 当  $0 < |\varepsilon| \ll 1$  时, 由  $\mu_1 < 0$  及  $\mu_3 > 0$  可知  $r^2 > 0$ , 即系统在分岔点  $Q_f$  的两侧都长出极限环. 所以, 该分岔点既是超临界又是亚临界的 Hopf 分岔点.

记  $r_0$  是方程(16) 的正解. 由方程(14) 可知, 当  $r > r_0$  时,  $r' > 0$ , 而当  $r < r_0$  时,  $r' < 0$ . 因此, 这两个极限环都是不稳定的.

取方程(1) 的一个超临界分岔和一个亚临界分岔来分析该双重性质分岔点产生的原因. 取  $k_0 = 0.0816$  时, 方程(1) 恰好有一个超临界和一个亚临界 Hopf 分岔点, 分别为  $Q_1 = 1.9106$  和  $Q_2 = 1.5569^{8/7}$ . 应用中心流形定理和复数正规型方法, 可得对应的分岔方程, 可表示为方程(15) 的形式, 对应的系数分别为

$$Q_1: \mu_1 = -0.0065\varepsilon - 0.0137\varepsilon^2, \mu_3 = 2.9894 - 4.8298\varepsilon;$$

$$Q_2: \mu_1 = 0.0080\varepsilon - 0.0266\varepsilon^2, \mu_3 = 3.8650 - 4.8479\varepsilon.$$

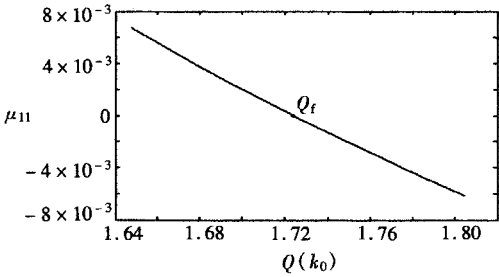


图 1  $\mu_1(\mu_1 = \mu_{11}\varepsilon + \mu_{12}\varepsilon^2)$  中  $\varepsilon$  一次项的系数关于分岔点的变化

比较分岔点  $Q_1, Q_2$  及  $Q_f$  的分岔方程系数, 当  $|\varepsilon|$  足够小时, 都有  $\mu_3 > 0$ , 考虑到当  $\varepsilon = 0$  时,  $\mu_1 = 0$ , 可知它们都是不稳定的焦点. 根据方程(16), 可知极限环产生的一个必要条件是  $\mu_1$  与  $\mu_3$  异号. 该条件在  $Q_1$  右侧或  $Q_2$  左侧分别满足, 而在  $Q_f$  的两侧都满足. 由此可知,  $Q_f$  对应的  $\mu_1$  中不含  $\varepsilon$  的一次项使得分岔点既是超临界又是亚临界. 图 1 是  $\mu_1$  中  $\varepsilon$  一次项的系数关于  $Q(k_0)$  的变化曲线, 这里  $Q(k_0)$  是方程(1) 对应于不同  $k_0$  的分岔点. 由图可看出当分岔点经过  $Q_f$  时, 该系数改变符号.

由以上讨论可知, 中心流形(5) 只与方程(1) 的线性部分有关, 而与参数  $e_2$  无关. 因此, 方程(6) 的线性化矩阵  $F(\varepsilon)$  与  $e_2$  无关. 那么, 根据方程(8) 可知  $\mu_1(\varepsilon)$  与  $e_2$  无关. 另外, 由  $c_{21}$  的定义可知  $\mu_3(\varepsilon) = \text{Re}c_{21}$  与  $e_2$  成正比. 所以, 由方程(16) 可知, 方程(1) 极限环振幅与  $\sqrt{e_2}$  成反比, 而频率与  $e_2$  无关.

### 4 结果验证

一般地, 稳定的极限环可以应用 RK 数值积分法较容易得到, 但不稳定极限环就很难由 RK 积分法直接得到<sup>[5]</sup>, 需要发展特殊的方法, 如等效线性化法, 增量谐波平衡法等. 但是, 在分岔点  $Q_f$  两边长出的极限环是不稳定的. 因此, 不能直接用 RK 数值积分法直接验证所得结果. 为此, 下面用等效线性化法和增量谐波平衡法验证上述结果.

首先, 将极坐标  $r, \theta$  变换为原始坐标  $h, \alpha$ . 由以上所采用的变换和中心流形(5) 可知

$$x = Ty = T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.4405\varepsilon & -0.9249\varepsilon & 0 & 0 \\ 2.7647\varepsilon & 3.2704\varepsilon & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{17}$$

由方程(7) 和(9) 可得

$$y_1 = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad y_2 = -\frac{i}{2}(z - \bar{z}). \tag{18}$$

将  $z = \zeta + p(\zeta, \zeta)$  及方程(13)代入式(18), 可得

$$\begin{cases} y_1 = u_{11}\cos\theta + v_{11}\sin\theta + u_{13}\cos3\theta + v_{13}\sin3\theta, \\ y_2 = u_{21}\cos\theta + v_{21}\sin\theta + u_{23}\cos3\theta + v_{23}\sin3\theta, \end{cases} \quad (19)$$

其中  $\theta = \omega t + \theta_0$ ,  $\theta_0$  为初相位. 各系数分别为

$$\begin{aligned} u_{11} &= r - \frac{\text{Im}c_{12}}{2\omega} r^3, & u_{21} &= \frac{\text{Re}c_{12}}{2\omega} r^3, & v_{11} &= \frac{\text{Re}c_{12}}{2\omega} r^3, & v_{21} &= r + \frac{\text{Im}c_{12}}{2\omega} r^3, \\ u_{13} &= \frac{2\text{Im}c_{30} - \text{Im}c_{03}}{4\omega} r^3, & v_{13} &= \frac{2\text{Re}c_{30} + \text{Re}c_{03}}{4\omega} r^3, \\ u_{23} &= \frac{2\text{Im}c_{30} + \text{Im}c_{03}}{4\omega} r^3, & v_{23} &= \frac{-2\text{Re}c_{30} + \text{Re}c_{03}}{4\omega} r^3, \end{aligned}$$

其中 Im 表示取相应虚部.

将方程(19)代入式(17), 可得用原坐标表示的极限环解为,  $\alpha(t) = x_1(t)$ ,  $h(t) = x_3(t)$ .

等效线性化法首先用等效刚度<sup>[2]</sup>

$$k_{\text{eq}} = k_0 + 3e_2A^2/4 \quad (20)$$

代替方程(1)中的非线性刚度  $k_0 + e_2\alpha^2$ , 其中  $A$  是  $\alpha$  的振幅. 假设机翼作简谐振动

$$h = He^{i\omega t}, \quad \alpha = Ae^{i\omega t}, \quad (21)$$

其中  $H$  表示  $h$  的振幅. 将式(20)和(21)代入式(1), 分离实部和虚部, 可得

$$\begin{cases} 0.4375\omega^4 + (-0.11 + 0.065Q - k_{\text{eq}})\omega^2 + 0.2(k_{\text{eq}} - 0.04Q) = 0, \\ -0.15\omega^3 + (0.1k_{\text{eq}} - 0.004Q + 0.02)\omega = 0. \end{cases} \quad (22)$$

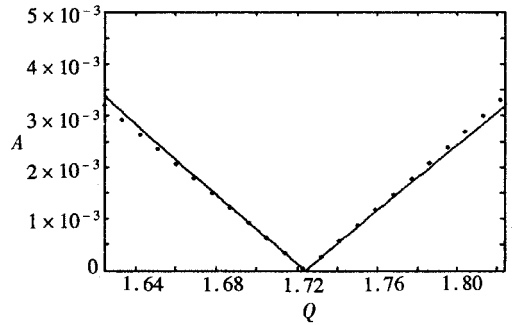
由方程(20)和(22), 可解得  $Q \sim A$  分岔方程

$$\begin{aligned} 0.32Q^2 - [12.25(k_0 + 3e_2A^2/4) + 0.11]Q + \\ 106.25(k_0 + 3e_2A^2/4)^2 - 16(k_0 + 3e_2A^2/4) + 1.55 = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

由图2可以看出, 本文所得分岔图与等效线性化解基本吻合.

蔡铭等人<sup>[6]</sup>应用增量谐波平衡法求解了方程(1)的极限环. 该方法的优点之一就是可以求解不稳定的极限环. 图3是由方程(17)给出的极限环与增量谐波平衡(IHB)法解的对比, 其中 IHB 解法取 20 阶谐波. 由图可知, 本文结果与 IHB 解相吻合.

图4是方程(1)极限环振幅 IHB 法解(保留 20 阶谐波)关于  $e_2$  的变化曲线, 其中  $Q = 1.6$ . 实线分别由函数  $A_1/\sqrt{e_2}$  及  $H_1/\sqrt{e_2}$  给出, 其中  $A_1, H_1$  分别是当  $e_2 = 1$  时方程(1)的极限环的俯仰和沉浮振幅. 由图可看出, 极限环的振幅与对应的函数完全吻合. 同时, 对所有的  $e_2 > 0$ , 极限环的频率都是 0.3807. 由此可知, 方程(1)的极限环振幅与  $\sqrt{e_2}$  成反比, 而频率与  $e_2$  无关.

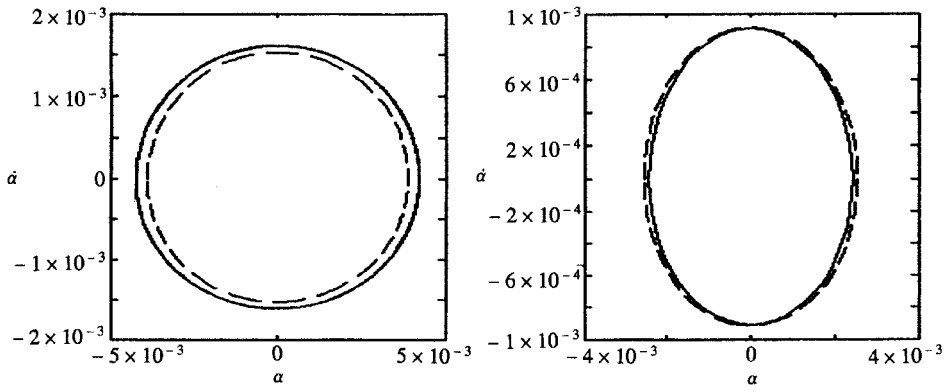


( $k_0 = 0.08109668$ ,  $e_2 = 20$ ; 实线由方程(23)绘出, 点线由方程(17)给出)

图2 方程(1)的  $Q \sim A$  分岔图

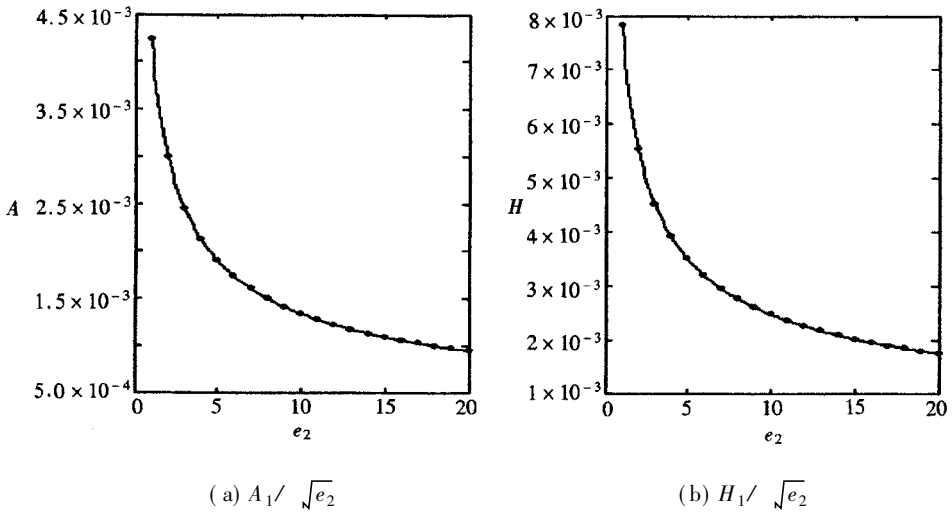
## 5 结 论

非线性颤振系统可能出现既是超临界又是亚临界的 Hopf 分岔. 应用中心流形定理和正

(a)  $Q = 1.6$ (b)  $Q = 1.8$ 

( $k_0 = 0.081\ 096\ 68$ ,  $e_2 = 20$ , 实线表示 IHB 解, 虚线由方程(17)给出)

图 3 方程(1)俯仰方向上的极限环

(a)  $A_1/\sqrt{e_2}$ (b)  $H_1/\sqrt{e_2}$ 

( $Q = 1.6$ ,  $k_0 = 0.081\ 096\ 68$ ; 实线由函数  $A_1/\sqrt{e_2}$  和  $H_1/\sqrt{e_2}$  给出, 点线表示 IHB 解)

图 4 方程(1)极限环振幅关于  $e_2$  变化曲线

规形方法得到了系统的分岔方程, 方程中  $r$  的系数不含  $\varepsilon$  一次幂项. 研究表明, 这正是产生既是超临界又是亚临界分岔的原因.

### [参 考 文 献]

- [1] Lee B H K, Price S J, Wong Y S. Nonlinear aeroelastic analysis of airfoils: bifurcation and chaos[J]. Progress Aerosp Sci, 1999, 35(3): 205-344.
- [2] Liu J K, Zhao L C. Bifurcation analysis of airfoil in incompressible flow [J]. J Sound Vibration, 1992, 154(1): 117-124.
- [3] Shahzad P, Malzoon M. Limit cycle flutter of airfoils in steady and unsteady flows[J]. J Sound Vibration, 2002, 256(2): 213-225.
- [4] Yang Y R. KBM method of analyzing limit cycle flutter of a wing with an external store and comparison with wind tunnel test[J]. J Sound Vibration, 1995, 187(2): 271-280.

- [5] Liu L P, Dowell E H. The secondary bifurcation of an aeroelastic airfoil motion: effect of high harmonics[J]. *Nonlinear Dyn*, 2004, **37**(1): 31-49.
- [6] 蔡铭, 刘济科, 李军. 多自由度强非线性颤振分析的增量谐波平衡法[J]. *应用数学和力学*, 2006, **27**(7): 833-838.
- [7] Kousen K A, Bendiksen O O. Limit cycle phenomena in computational transonic aeroelasticity[J]. *J Aircraft*, 1994, **31**(6): 1257-1263.
- [8] Liu J K, Zhao L C, Fang T. Bifurcation point analysis of airfoil flutter with structural nonlinearity [A]. In: HUANG Wen-hu, Ed. *Advances in Nonlinear Dynamics in China—Theory and Practice* [C]. Chapter 3. Lisse, the Netherland: Swets & Zeitlinger Publishers, 2002.
- [9] Lee B H K, Gong L, Wong Y S. Analysis and computation of nonlinear dynamic response of a two-degree-of-freedom system and its application in aeroelasticity[J]. *J Fluids Struct*, 1997, **11**(3): 225-246.
- [10] Liu L, Wong Y S, Lee B H K. Application of the center manifold theory in nonlinear aeroelasticity [J]. *J Sound Vibration*, 2000, **234**(4): 641-659.
- [11] Collier B D, Chamara P A. Structural non-linearities and the nature of the classic flutter instability [J]. *J Sound Vibration*, 2004, **277**(4/5): 711-739.
- [12] 毕勤胜, 陈予恕. 双摆内共振分叉分析[J]. *应用数学和力学*, 2000, **21**(3): 226-234.
- [13] 叶瑞松. 一种计算 Hopf 分岔点的新方法[J]. *应用数学和力学*, 2000, **21**(11): 1172-1178.
- [14] 魏俊杰, 张春蕊, 李秀玲. 具时滞的二维神经网络模型的分支[J]. *应用数学和力学*, 2005, **26**(2): 193-200.
- [15] Guckenheimer J, Holmes P. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcation of Vector Fields* [M]. New York: Springer-Verlag, 1983.
- [16] Carr J. *Applications of Center Manifold Theory* [M]. New York: Springer-Verlag; Berlin: Heidelberg, 1981.
- [17] Leung A Y T, Zhang Q C. Complex normal form for strongly nonlinear vibration systems exemplified by Duffing-Van der Pol equation[J]. *J Sound Vibration*, 1997, **213**(5): 907-914.

## Supercritical as Well as Subcritical Hopf Bifurcation in Nonlinear Flutter Systems

CHEN Yan-mao, LIU Ji-ke

(Department of Mechanics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, P. R. China)

**Abstract:** The Hopf bifurcations of an airfoil flutter system with a cubic nonlinearity are investigated with the flow speed as a bifurcation parameter. The center manifold theory and complex normal form method were used to obtain the bifurcation equation. Interestingly, for a certain linear pitching stiffness the Hopf bifurcation is both supercritical and subcritical. It is found, mathematically, this is caused by the fact that one coefficient in the bifurcation equation does not contain the first power of the bifurcation parameter. The solutions of the bifurcation equation are validated by the equivalent linearization method and incremental harmonic balance method.

**Key words:** nonlinear flutter; Hopf bifurcation; supercritical; subcritical; limit cycle oscillation