文章编号: 1000-0887(2008) 02-0235-04

具色散耗散项的四阶波动方程解的渐近性质*

徐润章[1,2], 赵希人[2], 沈继红[2]

(1. 哈尔滨工程大学 理学院, 哈尔滨 150001;
2. 哈尔滨工程大学 自动化学院, 哈尔滨 150001)

(郭兴明推荐)

摘要: 研究具色散和耗散项的四阶波动方程的初边值问题. 使用乘子法, 证明了问题的整体强解在关于非线性项简单而宽泛的假设下, 随时间趋于无穷而衰减到零.

关 键 词: 四阶波动方程; 色散; 耗散; 渐近性质

中图分类号: O175.26 文献标识码: A

引 言

当人们研究非线性弹性杆中纵向应变波传播[1-4]和弱非线性离子时空变换波[5]时, 得到了一些主部为 $u_{tt}-u_{xx}-u_{xxtt}$ 和不同非线性项的非线性发展方程. 在文献[1-5]中, 得到了上述方程的孤波解和一些数值结果. 另外, 关于以上方程的初边值问题已经有一些结果, 特别是关于问题的局部解和整体解[6-9]. 注意到考虑粘性耗散是必要的, 所以一些具有色散和耗散项的非线性波动方程被提了出来[10-11]. 然而, 直到现在关于此类方程的研究还并非很多.

在文献[12]中, 尚亚东研究了如下的初边值问题

$$u_{tt}-\Delta u-\Delta u_t-\Delta u_{tt}=f(u),\qquad x\in\Omega,\ t>0, \tag{1}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\ u_t(x,0)=u_1(x),\qquad x\in\Omega, \tag{2}$$

$$u|_{\partial\Omega}=0. \tag{3}$$

文中假设 $n=1,2,3$, $f\in C^1$, $f'(u)$ 上方有界并且满足

(H$_0$) $|f'(u)|\leqslant A|u|^p+B$, $0<p<\infty$ 当 $n=2$ 时; $0<p\leqslant 2/(n-2)$ 当 $n=3$ 时, $u_i(x)\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ $(i=0,1)$, 并证明了问题(1)~(3)存在唯一的整体强解 u: $\forall T>0$, $u\in W^{2,\infty}(0,T;H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))$.

在文献[13]中, 对于 $n\geqslant 1$, 再次研究了问题(1)~(3). 通过假定 $f\in C^1$, $f'(u)$ 上方有界并且满足

(H$_1$) $|f'(u)|\leqslant A|u|^p+B$, $0<p<\infty$ 当 $n=2$ 时; $0<p\leqslant 4/(n-2)$ 当 $n\geqslant 3$ 时, $u_i(x)\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ $(i=0,1)$, 证明了问题(1)~(3)存在唯一的整体强解 u: $\forall T>0$, $u\in W^{2,\infty}(0,T;H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))$. 所以文献[12]中的结果被推广到一个广泛的情形.

---

* 收稿日期: 2007-08-15; 修订日期: 2008-01-03
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10271034); 黑龙江省自然科学基金资助项目(A2007-02)
作者简介: 徐润章(1982—), 男, 河北人, 博士(联系人. Tel: +86-451-82518277; Fax: +86-451-82519754; E-mail: xurunzh@yahoo.com.cn).

当我们了解了解的整体存在的问题后,我们便对于解的渐近性质很感兴趣．本文的目的就是描述问题(1)~(3)解的渐近性质．我们将使用乘子法说明问题(1)~(3)的整体强解随时间 $t\to+\infty$ 而衰减到零．

在本文中,$\|\cdot\|_p=\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ 表示 $L^p(\Omega)$-范数．为了表示的简便,我们用 $\|\cdot\|$ 代替 $\|\cdot\|_2$ 且令 $(u,v)=\int_\Omega uv\,\mathrm{d}x$,其中 $\Omega\subset R^n$ 是一个适当光滑的有界域．

1 解的渐近性质

定理1 假设 $f(u)$ 满足

(H) $0\geqslant F(u)\geqslant f(u)u,\ \forall u\in\mathbf{R},\ F(u)=\int_0^u f(s)\,\mathrm{d}s\cdot$

则对于问题(1)~(3)的整体强解 u,存在正常数 C 和 λ 有

$$E(t)\leqslant CE(0)\mathrm{e}^{-\lambda t},\qquad 0\leqslant t<\infty,\tag{4}$$

其中 $$E(t)=\frac{1}{2}\|u_t\|^2+\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2+\frac{1}{2}\|\nabla u_t\|^2-\int_\Omega F(u)\,\mathrm{d}x.$$

证明 令 $u(x,t)$ 为问题(1)~(3)的整体强解．在式(1)两边乘以 u_t 并在 Ω 上积分,可得

$$\mathrm{d}E(t)/\mathrm{d}t+\|\nabla u_t\|^2=0.\tag{5}$$

对于 $\delta>0$,在式(5)两边乘以 $\mathrm{e}^{\delta t}$,可知

$$\mathrm{d}(\mathrm{e}^{\delta t}E(t))/\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{\delta t}\|\nabla u_t\|^2=\delta\mathrm{e}^{\delta t}E(t).\tag{6}$$

对式(6)关于 t 从零到 t 积分,我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\delta t}E(t)+\int_0^t\mathrm{e}^{\delta\tau}\|\nabla u_\tau\|^2\mathrm{d}\tau&=E(0)+\delta\int_0^t\mathrm{e}^{\delta\tau}E(\tau)\,\mathrm{d}\tau=\\ &E(0)+\frac{\delta}{2}\int_0^t\mathrm{e}^{\delta\tau}(\|u_\tau\|^2+\|\nabla u_\tau\|^2)\,\mathrm{d}\tau+\\ &\delta\int_0^t\mathrm{e}^{\delta\tau}\left(\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2-\int_\Omega F(u)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\tau.\end{aligned}\tag{7}$$

注意到 $-F(u)\geqslant0$,我们有 $E(t)\geqslant0$ 对于 $0\leqslant t<\infty$．由 $-F(u)\leqslant-f(u)u$ 和式(1)我们有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2-\int_\Omega F(u)\,\mathrm{d}x&\leqslant\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2-\int_\Omega f(u)u\,\mathrm{d}x=\\ &\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2-(u_{tt}-\Delta u-\Delta u_t-\Delta u_{tt},u)=\\ &\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2-\|\nabla u\|^2-(u_{tt},u)-(\nabla u_{tt},\nabla u)-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla u\|^2\leqslant\\ &-(u_{tt},u)-(\nabla u_{tt},\nabla u)-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla u\|^2.\end{aligned}\tag{8}$$

因此我们有

$$\begin{aligned}&\delta\int_0^t\mathrm{e}^{\delta\tau}\left(\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2-\int_\Omega F(u)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\tau\leqslant\\ &\quad-\delta\int_0^t\mathrm{e}^{\delta\tau}\left[(u_{\tau\tau},u)+(\nabla u_{\tau\tau},\nabla u)+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\|\nabla u\|^2\right]\mathrm{d}\tau.\end{aligned}\tag{9}$$

由分布积分可知

$$-\int_0^t\mathrm{e}^{\delta\tau}(u_{\tau\tau},u)\,\mathrm{d}\tau=-\mathrm{e}^{\delta t}(u_t,u)+(u_1,u_0)+\delta\int_0^t\mathrm{e}^{\delta\tau}(u_\tau,u)\,\mathrm{d}\tau+\int_0^t\mathrm{e}^{\delta\tau}\|u_\tau\|^2\mathrm{d}\tau\leqslant$$

$$\frac{1}{2}e^{\delta t}(\|u_t\|^2+\|u\|^2)+\frac{1}{2}(\|u_1\|^2+\|u_0\|^2)+$$
$$\frac{1}{2}\delta\int_0^t e^{\delta\tau}(\|u_\tau\|^2+\|u\|^2)\,d\tau+\int_0^t e^{\delta\tau}\|u_\tau\|^2 d\tau, \tag{10}$$

$$-\int_0^t e^{\delta\tau}(\nabla u_{\tau\tau},\nabla u)\,d\tau=-e^{\delta t}(\nabla u_t,\nabla u)+(\nabla u_1,\nabla u_0)+$$
$$\delta\int_0^t e^{\delta\tau}(\nabla u_\tau,\nabla u)\,d\tau+\int_0^t e^{\delta\tau}\|\nabla u_\tau\|^2 d\tau\leqslant$$
$$\frac{1}{2}e^{\delta t}(\|\nabla u_t\|^2+\|\nabla u\|^2)+\frac{1}{2}(\|\nabla u_1\|^2+\|\nabla u_0\|^2)+$$
$$\frac{\delta}{2}\int_0^t e^{\delta\tau}(\|\nabla u_\tau\|^2+\|\nabla u\|^2)\,d\tau+\int_0^t e^{\delta\tau}\|\nabla u_\tau\|^2 d\tau \tag{11}$$

与

$$-\frac{1}{2}\int_0^t e^{\delta\tau}\frac{d}{d\tau}\|\nabla u\|^2\,d\tau=-\frac{1}{2}e^{\delta t}\|\nabla u\|^2+\frac{1}{2}\|\nabla u_0\|^2+\frac{\delta}{2}\int_0^t e^{\delta\tau}\|\nabla u\|^2 d\tau\leqslant$$
$$\frac{1}{2}\|\nabla u_0\|^2+\frac{\delta}{2}\int_0^t e^{\delta\tau}\|\nabla u\|^2 d\tau. \tag{12}$$

将式(10)~(12)代入式(9)和(7), 且由 Poincaré 不等式, 即 $\|v\|^2\leqslant\lambda_0\|\nabla v\|^2,\ \forall v\in H_0^1(\Omega)$, 其中 λ_0 为一个正常数, 可知存在正常数 C_0、C_1 与 C_2, 使得

$$e^{\delta t}E(t)+\int_0^t e^{\delta\tau}\|\nabla u_\tau\|^2 d\tau\leqslant C_0E(0)+\frac{3}{2}(1+\lambda_0)\delta\int_0^t e^{\delta\tau}\|\nabla u_\tau\|^2 d\tau+$$
$$C_1\delta e^{\delta t}E(t)+C_2\delta^2\int_0^t e^{\delta\tau}E(\tau)\,d\tau. \tag{13}$$

取 δ 满足

$$0<\delta<\min\left\{\frac{1}{2C_1},\ \frac{2}{3(1+\lambda_0)}\right\},$$

则由式(13)我们可得

$$e^{\delta t}E(t)\leqslant 2C_0E(0)+2C_2\delta^2\int_0^t e^{\delta\tau}E(\tau)\,d\tau,$$

结合 Gronwall 不等式, 可得到

$$e^{\delta t}E(t)\leqslant 2C_0E(0)e^{2C_2\delta^2 t},\qquad 0\leqslant t<\infty$$

与

$$E(t)\leqslant 2C_0E(0)e^{-(\delta-2C_2\delta^2)t},\qquad 0\leqslant t<\infty.$$

进一步, 取 δ 满足

$$0<\delta<\min\left\{\frac{1}{2C_1},\ \frac{2}{3(1+\lambda_0)},\ \frac{1}{2C_2}\right\}.$$

则我们可得式(4), 其中 $\lambda=\delta-2C_2\delta^2>0$, $C=2C_0$. □

推论 2 在定理 1 的条件下, 对于问题(1)~(3)的整体强解 u, 我们进一步有

$$\|u_t\|^2+\|\nabla u_t\|^2+\|\nabla u\|^2\leqslant 2CE(0)e^{-\lambda t},\qquad 0\leqslant t<\infty. \tag{14}$$

取 $f(u)=-|u|^{p-1}u$, 在式(1)中我们考虑如下的一个基本方程

$$u_{tt}-\Delta u-\Delta u_t-\Delta u_{tt}=-|u|^{p-1}u.$$

则有 $f'(u)=-p|u|^{p-1}\leqslant 0$, $-F(u)=|u|^{p+1}/(p+1)$. 因此

$$0\leqslant -F(u)\leqslant|u|^{p+1}=-f(u)u.$$

因而我们可以得到如下的推论:

推论 3 假设 $f(u)=-|u|^{p-1}u$, p 满足(H_1), $u_i(x)\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)(i=0,1)$. 则

问题(1) ~ (3) 的整体强解 $u \in W^{2,\infty}(0,T;H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))$, $\forall T>0$ 且满足式(4) 与(14) .

致谢 我们感谢审稿人的审稿意见.

[参 考 文 献]

[1] Bogolubsky I L. Some examples of inelastic soliton interaction[J]. Computer Physics Communications, 1977, **13**(1): 149-155.

[2] Clarkson P A, Leveque R J, Saxton R A. Solitary wave interaction in elastic rods[J]. Studies in Applied Mathematics, 1986, **75**(1): 95-122.

[3] 庄蔚, 杨桂通. 孤波在非线性弹性杆中的传播[J]. 应用数学和力学, 1986, **7**(7): 571-582.

[4] 张善元, 庄蔚. 非线性弹性杆中的应变孤波[J]. 力学学报, 1988, **20**(1): 58-66.

[5] Seyler C E, Fanstermacher D L. A symmetric regularized long wave equation[J]. Phys Fluids, 1984, **27**(1): 4-7.

[6] CHEN Guo-wang, YANG Zhi-jian, ZHAO Zhan-cai. Initial value problem and first boundary problem for a class of quasilinear wave equations[J]. Acta Math Appl Sinica, 1993, **9**(4): 289-301.

[7] YANG Zhi-jian. Existence and non-existence of global solutions to a generalized modification of the improved Boussinesq equation[J]. Math Mech Appl Sci, 1998, **21**(16): 1467-1477.

[8] GUO Bo-ling. The spectral method for symmetric regularized wave equations[J]. J Comp Math, 1987, **5**(4): 297-306.

[9] 杨志坚, 宋长明. 关于一类非线性发展方程整体解的存在性问题[J]. 应用数学学报, 1997, **20**(3): 321-331.

[10] 郭柏灵. 粘性消动法和差分格式粘性[M]. 北京: 科学出版社, 1993.

[11] 朱位秋. 弹性杆中的非线性波[J]. 固体力学学报, 1980, **1**(2): 247-253.

[12] 尚亚东. 方程 $u_{tt}-\Delta u-\Delta u_t-\Delta_{tt}=f(u)$ 的初边值问题[J]. 应用数学学报, 2000, **23**(3): 385-393.

[13] 刘亚成, 李晓媛. 关于方程 $u_{tt}-\Delta u-\Delta u_t-\Delta_{tt}=f(u)$ 的某些注记[J]. 黑龙江大学自然科学学报, 2004, **21**(3): 1-6.

Asymptotic Behaviour of Solution for Fourth Order Wave Equation With Dispersive and Dissipative Terms

XU Run-zhang[1,2], ZHAO Xi-ren[2], SHEN Ji-hong[2]

(1. College of Science, Harbin Engineering University, Harbin 150001, P. R. China;

2. College of Automation, Harbin Engineering University, Harbin 150001, P. R. China)

Abstract: The initial boundary value problem of fourth order wave equation with dispersive and dissipative terms is studied. By using multiplier method, it was proven that the global strong solution of the problem decays to zero exponentially as the time approaches infinite, under a very simple and mild assumption regarding the nonlinear term.

Key words: fourth order wave equation; dispersive; dissipative; asymptotic behaviour