

# 夹层结构杆在弹性基础上的弹塑性变形<sup>\*</sup>

谷 宇

(清华大学 工程力学系, 北京 100084)

(郭兴明推荐)

摘要: 对位于弹性基底上的、具有可压缩非线性芯子的 3 层弹塑性杆的弯曲问题进行了研究. 研究分析了由 2 个受力层和 1 个芯子层组成的 3 层构件的力学响应. 解决了位于弹性基底上的 3 层杆弯曲的复杂问题. 对所给出的弹性解法进行了收敛性检验, 以保证该弹性解是可以接受的. 计算结果表明, 材料的塑性和物理非线性对位于弹性基底上的夹层结构杆的变形影响很大.

关键词: 夹层结构复合材料杆; 弹性底座; 弹塑性变形

中图分类号: O323 文献标识码: A

## 引 言

夹层结构复合材料具有重量轻、强度高的优点. 夹层结构复合材料广泛应用于众多领域, 诸如航空、航天、汽车工业、造船和机械制造业. 对夹层复合材料的力学性能的研究, 例如“应力应变”关系等, 具有重大的学术和应用价值. 这些研究对进一步研究夹芯复合材料的理论研究提供了良好的基础. 由于夹层结构复合材料的广泛应用, 研究人员对建立和分析理论及计算模型的兴趣愈来愈浓, 从而能够研究其力学性能.

为研究夹层结构复合材料, 国内外的研究人员提出了许多方法. 例如, Hohe 等人<sup>[1]</sup>对应用于夹层板的层状复合材料中的界面应力集中进行了估计. Chamis 等人<sup>[2,3]</sup>和 Elspass 和 Flemming<sup>[4]</sup>研究了带有金属蜂窝夹芯和轧制成形表皮的夹层复合材料的三维有限元模型. Burton 和 Noor 的研究<sup>[5]</sup>是基于复合材料夹层板的三维连续体模型. 另外, Chamis<sup>[3]</sup>, Jeusette 和 Laschet<sup>[6]</sup>进行了相应的有限元求解. Chai 等人<sup>[7]</sup>研究了表面上作用有外力的夹层结构复合材料梁. 值得注意的是, 他们还考虑了由于剪切应力产生的平面拉力以及加强构件缩小对夹层结构梁端部的影响<sup>[7]</sup>. 借助高阶夹层结构梁理论, Petras 和 Sutcliffe<sup>[8,9]</sup>指出切口部位的阻力分析不正确. McCormack 等人<sup>[10]</sup>通过理论研究和实验分析证明, 几种有问题的具有泡沫金属芯子的夹层复合材料模型是无效的. Kassapoglou 等人<sup>[11]</sup>指出了, 采用可压缩夹芯的层状复合材料的一种错误的起皱模式. Maiti 等人<sup>[12]</sup>研究了粘性有限夹层板顶部的裂纹尖端屏蔽. Cantwell 和 Davies<sup>[13]</sup>提出了复合材料夹层结构中内外粘性力的估计方法. Scott Burton 和

\* 收稿日期: 2007-08-17; 修订日期: 2008-01-22

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10772092)

作者简介: 谷宇(1977—), 男, 湖南人, 博士(Tel/Fax: + 86-10-62772923; E-mail: guy@mail.tsinghua.edu.cn).

Noor<sup>[14]</sup>采用极限综合法分析了蜂窝夹层板的粘性. Huang<sup>[15]</sup>提出了夹层结构梁粘性层中应力与应变的计算分析方法. 冯仁杰和于九明<sup>[16]</sup>研究了蜂窝夹层板及其在汽车工业上的应用. 张广平和戴干策<sup>[17]</sup>研究了复合材料蜂窝夹层板的构型和应用. 杨杰和沈惠申<sup>[18]</sup>研究了复合材料夹层结构的局部变形特性.

根据已经发表的研究和相关参考文献, 尽管许多研究人员对夹层结构复合材料在单一外部环境影响下的力学性能进行了深入的研究, 但在研究力学性能方面, 人们对复杂外部环境下夹层结构复合材料的非线性特性的研究还不够. 此外, 理论依据不完善, 还缺乏说服力. 所以, 对更复杂外部因素综合影响下的夹层结构复合材料性能的研究工作就很有价值, 应该进行. 因此分析夹层复合材料构件的实际力学特性, 描述其变形过程, 研究各种几何形状和各种类型外部载荷(正弦的、抛物线的、下凹的、向上的等)下的夹层复合材料构件的力学性能, 具有很大的意义. 特别是, 很有必要研究层状夹层结构复合材料在弹性基底上的力学特性, 因为尽管各种复合材料夹层板的解已经存在, 但还没有关于弹性基底上的夹层复合材料杆的任何解. 本文研究了位于弹性基底上的具有可压缩非线性芯子的3层弹塑性杆的弯曲问题. 分析了由2个受力层和1个夹芯组成的3层构件的力学响应. 解决了位于弹性基底上的3层杆弯曲的复杂问题.

## 1 数学表达式和封闭解

考虑一种具有可压缩夹芯的、沿厚度方向具有3层非对称结构的杆, 包括用弹塑性材料制成的外部受力层和1层夹芯. 为了描述整个构件的力学特性, 采取了如下假设条件: 在受力层中, 采用Bernoulli假设; 在刚性填充物中, 我们发现在 $z$ 方向使用位移线性近似的弹性理论是合理的. 使用了位移连续的接触边界条件. 在横向上, 受力层的材料是不可压缩的, 另外还考虑了填充材料的体积缩小和小应变.

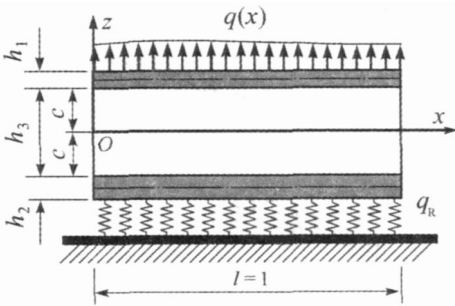


图1 弹性基底上的3层杆的分析模型

如图1所示, 坐标系 $x-y-z$ 位于填充物的中面. 通过 $w_k(x)$ 和 $u_k(x)$ , 就可以确定受力层的中截面的下垂和纵向位移, 其中 $h_k$ 是第 $k$ 层的厚度,  $h_3 = 2c$  (层数 $k = 1, 2, 3$ ),  $b_0$ 是杆的宽度. 所有位移和杆的尺寸长度均用 $l$ 来度量. 分布面载荷 $q(x)$ 作用于第1层的外平面上(见图1). 基底位于第2层的下表面, 基底响应用 $q_R(x)$ 描述.

层中的纵向和横向位移 $u^{(k)}(x, z)$ 和 $w^{(k)}(x, z)$ 可以通过4个函数 $w_1(x)$ 、 $u_1(x)$ 、 $w_2(x)$ 和 $u_2(x)$ 来表示:

$$\begin{cases} u^{(1)} = u_1 - \left[ z - c - \frac{h_1}{2} \right] w_{1,x}, & w^{(1)} = w_1 & (c \leq z \leq c + h_1), \\ u^{(2)} = u_2 - \left[ z + c + \frac{h_2}{2} \right] w_{2,x}, & w^{(2)} = w_2 & (-c - h_2 \leq z \leq c), \\ u^{(3)} = \left[ 1 + \frac{z}{c} \right] \left[ \frac{1}{2} u_1 + \frac{h_1}{4} w_{1,x} \right] + \left[ 1 - \frac{z}{c} \right] \left[ \frac{1}{2} u_2 - \frac{h_2}{4} w_{2,x} \right], \\ w^{(3)} = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{z}{c} \right] w_1 + \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{z}{c} \right] w_2 & (-c \leq z \leq c), \end{cases} \quad (1)$$

式中,  $z$  是当前点到填充物中截面之间的距离; 下标中的逗号表示对坐标的求导.

使用 Cauchy 定理和表达式(1), 各层的应变张量分量就可以按下式得出:

$$\left\{ \begin{aligned} \epsilon_x^{(1)} &= u_{1,x} - \left( z - c - \frac{h_1}{2} \right) w_{1,xx} \quad (c \leq z \leq c + h_1), \\ \epsilon_x^{(3)} &= \left( 1 + \frac{z}{c} \right) \left[ \frac{1}{2} u_{1,x} + \frac{h_1}{4} w_{1,xx} \right] + \left( 1 - \frac{z}{c} \right) \left[ \frac{1}{2} u_{2,x} - \frac{h_2}{4} w_{2,xx} \right], \\ \epsilon_{xz}^{(3)} &= \left[ \frac{2z + h_1}{8c} + \frac{1}{4} \right] w_{1,x} + \left[ \frac{-2z + h_2}{8c} + \frac{1}{4} \right] w_{2,x} + \frac{u_1 - u_2}{4c}, \\ \epsilon_z^{(3)} &= \frac{1}{2c} (w_1 - w_2) \quad (-c \leq z \leq c), \\ \epsilon_x^{(2)} &= u_{2,x} - \left( z + c + \frac{h_2}{2} \right) w_{2,xx} \quad (-c - h_2 \leq z \leq c), \\ \epsilon_{xz}^{(1)} &= \epsilon_{xz}^{(2)} = 0. \end{aligned} \right. \quad (2)$$

在所述情况下, 变形张量的球量和偏量部分为形式 ( $\bar{\epsilon}_{ij} = \epsilon_{ij} - \epsilon \delta_{ij}; i, j = x, y, z$ ):

$$\left\{ \begin{aligned} \epsilon^{(k)} &= \frac{1}{3} \epsilon_x^{(k)}, \quad \epsilon_x^{(k)} = \frac{2}{3} \epsilon^{(k)} \quad (k = 1, 2), \\ \epsilon^{(3)} &= \frac{1}{3} (\epsilon_x^{(3)} + \epsilon_z^{(3)}), \quad \epsilon_x^{(3)} = \frac{2}{3} \epsilon^{(3)} - \frac{1}{3} \epsilon_z^{(3)}. \end{aligned} \right. \quad (3)$$

引入内力和力矩:

$$\left\{ \begin{aligned} N_x^{(k)} &= b_0 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)} dz, \quad M_x^{(k)} = b_0 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)} z dz, \\ Q^{(3)} &= b_0 \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)} dz, \quad N_z^{(3)} = b_0 \int_{h_3} \sigma_z^{(3)} dz, \quad M_{xz}^{(3)} = b_0 \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)} z dz, \end{aligned} \right. \quad (4)$$

式中  $\sigma_x^{(3)}$ 、 $\sigma_{xz}^{(3)}$ 、 $\sigma_z^{(3)}$  是应变张量的分量, 而积分是沿第  $k$  层的厚度方向进行的.

杆的平衡方程符合 Lagrange 变分原理<sup>[1]</sup>:

$$\delta A_e - \delta A_i = 0, \quad (5)$$

式中,  $\delta A_e$  是外力功的变分,  $\delta A_i$  是弹性内力功的变分.

$$\left\{ \begin{aligned} \delta A &= b_0 \int_0^l (q \delta w_1 - q_R \delta w_2) dx, \\ \delta A_i &= b_0 \int_0^l \left[ \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)} \delta \epsilon_x^{(k)} dz + 2 \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)} \delta \epsilon_{xz}^{(3)} dz + \int_{h_3} \sigma_z^{(3)} \delta \epsilon_z^{(3)} dz \right] dx. \end{aligned} \right. \quad (6)$$

在杆的各层中, 使用了小变形弹塑性理论的物理本构方程. 也就是说, 在偏量-球量来表示, 本构关系具有如下形式:

$$s_{ij}^{(k)} = 2G_k (1 - \omega^{(k)}(\epsilon_u^{(k)})) \epsilon_{ij}^{(k)}, \quad \sigma^{(k)} = 3K_k \epsilon^{(k)} \quad (k = 1, 2, 3; i, j = x, y, z), \quad (7a)$$

式中,  $s_{ij}^{(k)}$ 、 $\sigma^{(k)}$  是应力张量的偏量和球量部分;  $\epsilon_{ij}^{(k)}$ 、 $\epsilon^{(k)}$  是变形张量方程组(2)的偏量和球量部分, 而  $\epsilon_u^{(k)}$  描述的是第  $k$  层中的变形程度.

$$\epsilon_u^{(k)} = \frac{\sqrt{2}}{3} \left\{ (\epsilon_{xx}^{(k)} - \epsilon_{yy}^{(k)})^2 + (\epsilon_{yy}^{(k)} - \epsilon_{zz}^{(k)})^2 + (\epsilon_{zz}^{(k)} - \epsilon_{xx}^{(k)})^2 + 6((\epsilon_{xy}^{(k)})^2 + (\epsilon_{yz}^{(k)})^2 + (\epsilon_{zx}^{(k)})^2) \right\}^{1/2}, \quad (7b)$$

在式(7a)中,  $\omega^{(k)}(\epsilon_u^{(k)})$  (在  $k = 1, 2$  时) 是 Ilyushin 塑性函数. 在  $\epsilon_u^{(k)} \leq \epsilon_r^{(k)}$  的情况下, 则有

必要将它们假设为等于0.  $\epsilon_1^{(k)}$  是受力层材料的屈服点.  $\omega^{(3)}(\epsilon_u^{(3)})$  是描述夹芯物理非线性的通用函数, 而在  $\epsilon_u^{(3)} \leq \epsilon_s^{(3)}$  时,  $\omega^{(3)} \equiv 0$ , 式中,  $\epsilon_s^{(3)}$  是夹芯材料呈现物理非线性的阈值. 应注意的是, 在式(7a)中,  $G_k, K_k$  是剪切模量和体积变形模量.

我们考虑1个边界值问题的解决方案. 从式(7a)中, 我们可以在应力张量的弹性(带有指标0)和非线性(带有指标 $\omega$ )中选择.

$$\sigma_{ij}^{(k)} = \sigma_{ij}^{(k)0} - \alpha_{ij}^{(k)\omega}, \quad \sigma_{ij}^{(k)0} = 2G_k \epsilon_{ij}^{(k)} + 3K_k \epsilon^{(k)} \delta_{ij}, \quad \alpha_{ij}^{(k)\omega} = 2G_k \omega^{(k)} \delta_{ij}. \quad (8)$$

对于所述的3层杆来讲, 考虑到式(3)中变形的偏量和球量部分的公式, 我们可以获得:

• 在受力层中

$$\begin{cases} \sigma_{xx}^{(k)} = \sigma_{xx}^{(k)0} - \alpha_{xx}^{(k)\omega}, \quad \sigma_{xx}^{(k)0} = 2G_k \epsilon_{xx}^{(k)} + 3K_k \epsilon^{(k)} = K_k^+ \epsilon_{xx}^{(k)}, \\ \alpha_{xx}^{(k)\omega} = 2G_k \epsilon_{xx}^{(k)} \omega^{(k)} = (4/3) G_k \epsilon_{xx}^{(k)} \omega_y^{(k)}; \end{cases} \quad (9a \sim c)$$

• 在夹芯中

$$\begin{cases} \sigma_{xx}^{(3)} = \sigma_{xx}^{(3)0} - \alpha_{xx}^{(3)\omega}, \quad \sigma_{xx}^{(3)0} = 2G_3 \epsilon_{xx}^{(3)} + 3K_3 \epsilon^{(3)} = K_3^+ \epsilon_{xx}^{(3)} + K_3^- \epsilon_{zz}^{(3)}, \\ \alpha_{xx}^{(3)\omega} = 2G_3 \epsilon_{xx}^{(3)} \omega^{(3)} = (2/3) G_3 (2 \epsilon_{xx}^{(3)} - \epsilon_{zz}^{(3)}) \omega^{(3)}, \quad \alpha_{zz}^{(3)} = \sigma_{zz}^{(3)0} - \alpha_{zz}^{(3)\omega}, \\ \sigma_{zz}^{(3)0} = 2G_3 \epsilon_{zz}^{(3)} + 3K_3 \epsilon^{(3)} = K_3^+ \epsilon_{zz}^{(3)} + K_3^- \epsilon_{xx}^{(3)}, \\ \alpha_{zz}^{(3)\omega} = 2G_3 \epsilon_{zz}^{(3)} \omega^{(3)} = (2/3) G_3 (2 \epsilon_{zz}^{(3)} - \epsilon_{xx}^{(3)}) \omega^{(3)}, \\ \sigma_{xz}^{(3)} = \sigma_{xz}^{(3)0} - \alpha_{xz}^{(3)\omega}, \quad \sigma_{xz}^{(3)0} = 2G_3 \epsilon_{xz}^{(3)} = 2K_3 \epsilon_{xz}^{(3)}, \\ \alpha_{xz}^{(3)\omega} = 2G_3 \epsilon_{xz}^{(3)} \omega^{(3)} = 2G_3 \epsilon_{xz}^{(3)} \omega^{(3)}, \end{cases} \quad (9d \sim l)$$

式中,  $K_k^+ = K_k + (4/3) G_k$  和  $K_k^- = K_k + (2/3) G_k$ , 以及  $\omega^{(k)} \equiv \omega^{(k)}(\epsilon_u^{(k)})$  都是各层材料非线性通用函数, 可以通过实验确定.

对式(4)中的内力, 进行类似于获得式(9)的运算之后, 我们可以得出

$$\begin{cases} N_x^{(k)} = N_x^{(k)0} - N_x^{(k)\omega}, \quad N_z^{(3)} = N_z^{(3)0} - N_z^{(3)\omega}, \quad M_x^{(k)} = M_x^{(k)0} - M_x^{(k)\omega}, \\ M_{xz}^{(3)} = M_{xz}^{(3)0} - M_{xz}^{(3)\omega}, \quad Q^{(3)} = Q^{(3)0} - Q^{(3)\omega}. \end{cases} \quad (10)$$

式(10)所给出的内力中的基础分量(带有指标0)和附加分量(带有指标 $\omega$ )可以通过下面公式计算得出:

• 在受力层中

$$N_x^{(k)0} = b_0 \int_{h_k} \sigma_{xx}^{(k)0} dz = b_0 \int_{h_k} K_k^+ \epsilon_{xx}^{(k)} dz, \quad (11a)$$

$$N_x^{(k)\omega} = b_0 \int_{h_k} \alpha_{xx}^{(k)\omega} dz = \frac{4}{3} b_0 \int_{h_k} G_k \epsilon_{xx}^{(k)} \omega^{(k)} dz, \quad (11b)$$

$$M_x^{(k)0} = b_0 \int_{h_k} \sigma_{xx}^{(k)0} z dz = b_0 \int_{h_k} K_k^+ \epsilon_{xx}^{(k)} z dz, \quad (11c)$$

$$M_x^{(k)\omega} = b_0 \int_{h_k} \alpha_{xx}^{(k)\omega} z dz = \frac{4}{3} b_0 \int_{h_k} G_k \epsilon_{xx}^{(k)} \omega^{(k)} z dz; \quad (11d)$$

• 在夹芯中

$$N_x^{(3)0} = b_0 \int_{h_3} \sigma_{xx}^{(3)0} dz = b_0 \int_{h_3} (K_3^+ \epsilon_{xx}^{(3)} + K_3^- \epsilon_{zz}^{(3)}) dz, \quad (11e)$$

$$N_x^{(3)\omega} = b_0 \int_{h_3} \alpha_{xx}^{(3)\omega} dz = \frac{2}{3} b_0 \int_{h_3} G_3 (2 \epsilon_{xx}^{(3)} - \epsilon_{zz}^{(3)}) \omega^{(3)} dz, \quad (11f)$$

$$N_z^{(3)0} = b_0 \int_{h_3} \sigma_{zz}^{(3)0} dz = b_0 \int_{h_3} (K_3^+ \epsilon_{zz}^{(3)} + K_3^- \epsilon_{xx}^{(3)}) dz, \quad (11g)$$

$$N_z^{(3)\omega} = b_0 \int_{h_3} \sigma_{zz}^{(3)\omega} dz = \frac{2}{3} b_0 \int_{h_3} G_3 (2\epsilon_{zz}^{(3)} - \epsilon_{xx}^{(3)}) \omega^{(3)} dz, \quad (11h)$$

$$M_x^{(3)0} = b_0 \int_{h_3} \sigma_{xx}^{(3)0} z dz = b_0 \int_{h_3} (K_3^+ \epsilon_{xx}^{(3)} + K_3^- \epsilon_{zz}^{(3)}) z dz, \quad (11i)$$

$$M_x^{(3)\omega} = b_0 \int_{h_3} \sigma_{xx}^{(3)\omega} z dz = \frac{2}{3} b_0 \int_{h_3} G_3 (2\epsilon_{xx}^{(3)} - \epsilon_{zz}^{(3)}) \omega^{(3)} z dz, \quad (11j)$$

$$M_z^{(3)0} = b_0 \int_{h_3} \sigma_{zz}^{(3)0} z dz = b_0 \int_{h_3} (K_3^+ \epsilon_{zz}^{(3)} + K_3^- \epsilon_{xx}^{(3)}) z dz, \quad (11k)$$

$$M_z^{(3)\omega} = b_0 \int_{h_3} \sigma_{zz}^{(3)\omega} z dz = \frac{2}{3} b_0 \int_{h_3} G_3 (2\epsilon_{zz}^{(3)} - \epsilon_{xx}^{(3)}) \omega^{(3)} z dz, \quad (11l)$$

$$Q^{(3)0} = b_0 \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)0} dz = 2b_0 \int_{h_3} G_3 \epsilon_{xz}^{(3)} dz, \quad (11m)$$

$$Q^{(3)\omega} = b_0 \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)\omega} dz = 2b_0 \int_{h_3} G_3 \epsilon_{xz}^{(3)} \omega^{(3)} dz. \quad (11n)$$

关于基底响应和垂直位移之间的关系,可以使用众所周知的 Winkler 模型:

$$q_R = K_0 w_2, \quad (12)$$

式中,  $K_0$  是弹性基底的刚性系数,基底的响应总是指向旁边并与位移反向.

将式(6)的值代入式(5)后,通过使用式(8)到式(12)中的表达式,我们可以通过叠代法得出一组非线性微分方程式:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 u_1^n - a_1 u_2^n - a_4 u_{1,xx}^n - a_5 u_{2,xx}^n + a_2 w_{1,x}^n + a_3 w_{2,x}^n - \\ \quad 2a_6 w_{1,xxx}^n + a_7 w_{2,xxx}^n = p \omega^{n-1}, \\ - a_1 u_1^n + a_1 u_2^n - a_5 u_{1,xx}^n - a_9 u_{2,xx}^n - a_{10} w_{1,x}^n - a_{17} w_{2,x}^n - \\ \quad a_6 w_{1,xxx}^n + 2a_7 w_{2,xxx}^n = h \omega^{n-1}, \\ a_2 u_{1,x}^n - a_{10} u_{2,x}^n + 2a_6 u_{1,xxx}^n + a_6 u_{2,xxx}^n + a_{11} w_{1,x}^n - a_{12} w_{2,x}^n + \\ \quad a_{15} w_{1,xxx}^n - a_{16} w_{2,xxx}^n + a_8 w_1^n - a_8 w_2^n = q + (1/2)p_{,x} h_1 + q \omega^{n-1}, \\ - a_3 u_{1,x}^n + a_{17} u_{2,x}^n - a_7 u_{1,xxx}^n - 2a_7 u_{2,xxx}^n - a_{12} w_{1,x}^n + a_{14} w_{2,x}^n - \\ \quad a_{16} w_{2,xxx}^n + a_{13} w_{2,xxx}^n - a_8 w_1^n + (a_8 + K_0) w_2^n = g \omega^{n-1}, \end{array} \right. \quad (13)$$

式中,  $a_i (i = 1, \dots, 17)$  是通过材料弹性的体积和剪切模量( $K_k, G_k$ ) 以及杆的各层几何参数表示的因子. 在式(12)中,我们可以得出

$$N_x^{(k)\omega^{(n-1)}} = \frac{4}{3} b_0 \int_{h_k} G_k \epsilon_x^{(k)(n-1)} \omega^{(k)} (\epsilon_u^{(k)(n-1)}) dz \quad (k = 1, 2), \quad (14a)$$

$$M_x^{(k)\omega^{(n-1)}} = \frac{4}{3} b_0 \int_{h_k} G_k \epsilon_x^{(k)(n-1)} \omega^{(k)} (\epsilon_u^{(k)(n-1)}) z dz \quad (k = 1, 2), \quad (14b)$$

$$N_x^{(3)\omega^{(n-1)}} = \frac{2}{3} b_0 \int_{h_3} G_3 (2\epsilon_x^{(3)(n-1)} - \epsilon_z^{(3)(n-1)}) \omega^{(3)} (\epsilon_u^{(3)(n-1)}) dz, \quad (14c)$$

$$N_z^{(3)\omega^{(n-1)}} = \frac{2}{3} b_0 \int_{h_3} G_3 (2\epsilon_z^{(3)(n-1)} - \epsilon_x^{(3)(n-1)}) \omega^{(3)} (\epsilon_u^{(3)(n-1)}) dz, \quad (14d)$$

$$M_x^{(3)\omega^{(n-1)}} = \frac{2}{3} b_0 \int_{h_3} G_3 (2\epsilon_x^{(3)(n-1)} - \epsilon_z^{(3)(n-1)}) \omega^{(3)} (\epsilon_u^{(3)(n-1)}) z dz, \quad (14e)$$

$$M_z^{(3)\omega(n-1)} = \frac{2}{3} b_0 \int_{h_3} G_3 (2\mathcal{E}_z^{(3)(n-1)} - \mathcal{E}_x^{(3)(n-1)}) \omega^{(3)} (\mathcal{E}_u^{(3)(n-1)}) z dz, \quad (14f)$$

$$Q^{(3)\omega(n-1)} = 2b_0 \int_{h_3} G_3 \mathcal{E}_{xz}^{(3)(n-1)} \omega^{(3)} (\mathcal{E}_u^{(3)(n-1)}) dz. \quad (14g)$$

根据式(14a)~(14g),我们可以设定一组参数如下:

$$H_1^{\omega(n-1)} = \frac{2Q^{(3)\omega(n-1)}}{c}, \quad H_2^{\omega(n-1)} = \frac{N_z^{(3)\omega(n-1)}}{2c}, \quad (14h)$$

$$T_1^{\omega(n-1)} = \left\{ 1 + \frac{h_1}{2c} \right\} \frac{Q^{(3)\omega(n-1)}}{c} + \frac{M_{xz}^{(3)\omega(n-1)}}{2c}, \quad (14i)$$

$$T_2^{\omega(n-1)} = \left\{ 1 + \frac{h_2}{2c} \right\} \frac{Q^{(3)\omega(n-1)}}{c} - \frac{M_{xz}^{(3)\omega(n-1)}}{2c}, \quad (14j)$$

$$S_1^{\omega(n-1)} = \left\{ c + \frac{h_1}{2} \right\} N_x^{(1)\omega(n-1)} - M_x^{(1)\omega(n-1)} + \frac{h_1}{4} N_x^{(3)\omega(n-1)} + \frac{h_1}{4c} M_x^{(3)\omega(n-1)}, \quad (14k)$$

$$S_2^{\omega(n-1)} = - \left\{ c + \frac{h_2}{2} \right\} N_x^{(2)\omega(n-1)} - M_x^{(2)\omega(n-1)} - \frac{h_2}{4} N_x^{(3)\omega(n-1)} + \frac{h_2}{4c} M_x^{(3)\omega(n-1)}, \quad (14l)$$

$$P_1^{\omega(n-1)} = \frac{N_x^{(3)\omega(n-1)}}{2} + \frac{M_x^{(3)\omega(n-1)}}{2c} + N_x^{(1)\omega(n-1)}, \quad (14m)$$

$$P_2^{\omega(n-1)} = \frac{N_x^{(3)\omega(n-1)}}{2} - \frac{M_x^{(3)\omega(n-1)}}{2c} + N_x^{(2)\omega(n-1)}. \quad (14n)$$

然后,参照式(14h)~(14n),我们可以得出

$$p_\omega^{n-1} = \frac{1}{b_0} (H_1^{\omega(n-1)} - P_{1,x}^{\omega(n-1)}), \quad (14o)$$

$$q_\omega^{n-1} = \frac{1}{b_0} (S_{1,xx}^{\omega(n-1)} + H_2^{\omega(n-1)} - T_{1,x}^{\omega(n-1)}), \quad (14p)$$

$$g_\omega^{n-1} = \frac{1}{b_0} (S_{2,xx}^{\omega(n-1)} - H_2^{\omega(n-1)} - T_{2,x}^{\omega(n-1)}). \quad (14q)$$

应注意的是,式(14o)~(14q)中的变量是可以用于求解式(13)的.

我们设想这样的条件,即1根杆两端均匀为刚性支撑.则 $x=0, l$ ( $l$ 是杆的长度)处用位移表示的边界条件如下:

$$w^{kn} = u_{,x}^{kn} = w_{,xx}^{kn} = 0 \quad (k=1,2), \quad (15)$$

式中, $k$ 是受力层的数量,而 $n$ 是1个线性近似的数.

我们假设式(13)中的微分方程解,按三角级数的形式的展开,自动满足式(15)给出的刚性支撑边界条件:

$$\begin{cases} u_1^n = \sum_{m=1}^{\infty} U_{1m}^n \cos\left(\frac{\pi mx}{l}\right), & u_2^n = \sum_{m=1}^{\infty} U_{2m}^n \cos\left(\frac{\pi mx}{l}\right), \\ w_1^n = \sum_{m=1}^{\infty} W_{1m}^n \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right), & w_2^n = \sum_{m=1}^{\infty} W_{2m}^n \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right), \end{cases} \quad (16)$$

式中 $U_{1m}^n, U_{2m}^n, W_{1m}^n, W_{2m}^n$ 是未知的第 $n$ 阶的位移幅度.

让我们根据如下级数展开形式给出1个载荷 $q(x)$ 和附加“外部”应变量

$$q = \sum_{m=1}^{\infty} q_m \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right), \quad q_m = \frac{2}{l} \int_0^l q(x) \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right) dx, \quad (17a)$$

$$q_\omega^{n-1} = \sum_{m=1}^{\infty} q_\omega^{n-1} \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right), \quad q_\omega^{n-1} = \frac{2}{l} \int_0^l q_\omega^{n-1}(x) \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right) dx, \quad (17b)$$

$$g_{\omega}^{n-1} = \sum_{m=1}^{\infty} g_{\omega m}^{n-1} \sin\left[\frac{\pi mx}{l}\right], \quad g_{\omega m}^{n-1} = \frac{2}{l} \int_0^l g_{\omega}^{n-1}(x) \sin\left[\frac{\pi mx}{l}\right] dx, \quad (17c)$$

$$h_{\omega}^{n-1} = \sum_{m=1}^{\infty} h_{\omega m}^{n-1} \cos\left[\frac{\pi mx}{l}\right], \quad h_{\omega m}^{n-1} = \frac{2}{l} \int_0^l h_{\omega}^{n-1}(x) \cos\left[\frac{\pi mx}{l}\right] dx, \quad (17d)$$

$$p_{\omega}^{n-1} = \sum_{m=1}^{\infty} p_{\omega m}^{n-1} \cos\left[\frac{\pi mx}{l}\right], \quad p_{\omega m}^{n-1} = \frac{2}{l} \int_0^l p_{\omega}^{n-1}(x) \cos\left[\frac{\pi mx}{l}\right] dx. \quad (17e)$$

将式(16)的位移量和式(17)的载荷代入式(13), 我们可以得出如下一组关于位移幅度的线性代数方程,  $U_{1m}^n, U_{2m}^n, W_{1m}^n, W_{2m}^n$ :

$$\begin{cases} b_1 U_{1m}^n + b_2 U_{2m}^n + b_3 W_{1m}^n + b_4 W_{2m}^n = p_{\omega m}^{n-1}, \\ b_2 U_{1m}^n + b_5 U_{2m}^n + b_6 W_{1m}^n - b_7 W_{2m}^n = h_{\omega m}^{n-1}, \\ b_3 U_{1m}^n + b_6 U_{2m}^n + b_8 W_{1m}^n + b_9 W_{2m}^n = q_m + q_{\omega m}^{n-1}, \\ b_4 U_{1m}^n - b_7 U_{2m}^n + b_9 W_{1m}^n + b_{10} W_{2m}^n = g_{\omega m}^{n-1}, \end{cases} \quad (18)$$

式中, 参数  $b_i$  是通过系数  $a_n$  和参数  $m$  来表示的.

通过解式(18), 我们可以得出  $U_{1m}, U_{2m}, W_{1m}, W_{2m}$ . 此外, 根据式(16), 可以计算出所要求的位移函数. 最后, 受力层和夹芯的位移量就可以从式(1)得出, 变形量就可以从式(2)得出, 应力就可以从式(7)得出.

## 2 计算结果

对 D16F 聚四氟乙烯-D16T 材料制作的 3 层杆进行计算. 使用了不同刚度的基底, 相应的刚度系数分别为: 弱 ( $k_0 = 1$ )、一般 ( $k_0 = 100$ ) 和比较坚硬 ( $k_0 = 105 \text{ MPa/m}$ ). 杆的各层几何参数是  $h_1 = 0.04, h_2 = 0.02, h_3 = 0.18$ . 载荷有规律地分布在杆的整个长度上, 并将杆压向弹性基底. 其幅度是根据基底的刚度来选择的, 这样, 各层材料的非线性特性就得到充分展示, 但是, 变形量始终很小, 即, 在所述模型的极限值范围内.

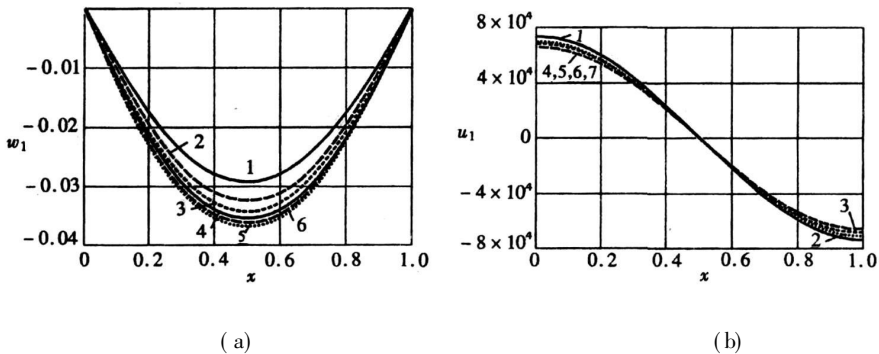
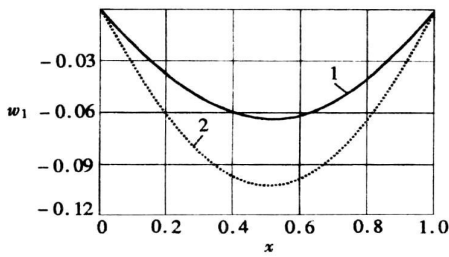
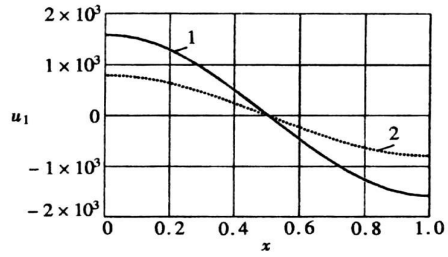


图2 弹塑性 3 层杆在刚度较小基底上的弹性解的收敛过程

图 2(a)、图 2(b) 给出了位于弹性基底上的弹塑性 3 层杆弯曲的弹性解的收敛性过程,  $k_0 = 1 \text{ MPa/m}$ , 且  $q = -6 \text{ MPa}$ . 在图 2 中, 曲线上的数字对应于迭代数目. 第 1 次迭代是弹性问题的求解, 而第 2 次迭代与第 1 次迭代平均相差为 11%. 在每次后续迭代时, 这种差别都会减小, 到第 7 次近似时, 就认为是可以接受的比较精确的解, 与第 6 次相差不到 1%. 进一步的收敛性验证表明, 后一步迭移小于 25%. 通过图 3(a)、(b), 可以判断出材料的塑性和物理非线性对第 1 层的额定下垂量  $w_1$  和纵向位移  $u_1$  的影响: 1—弹性杆, 2—弹塑性杆 ( $k_0 = 100 \text{ MPa/m}$ ).



(a)



(b)

图3 材料物理非线性对第1层(一般刚度基底)下垂  $w_1$  和纵向位移  $u_1$  的影响 (1—弹性杆,2—弹塑性杆)

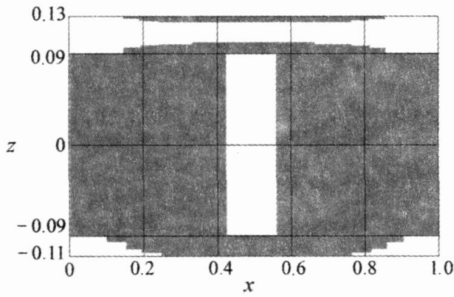


图4 对于一般刚度基底,各层材料的塑性和物理非线性区域(阴影部分)

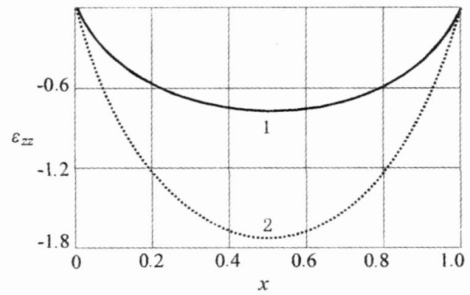


图5 沿杆轴线夹芯的应变  $\epsilon_{zz}$  的修正 (按百分比)(1—弹性杆,2—弹塑性杆 (一般刚度基底))

在弹塑性变形阶段,与弹性阶段相比,下垂量增加了 59%,而纵向位移量减小了 2 倍,负载  $q = -18 \text{ MPa}$ .

在图 4 中,给出了位于一般刚性基底上的杆的各层非线性变形区域(阴影部分). 夹芯变形量在 83% 时在物理上是非线性的. 受力层塑性的区域平均为材料体积的 35%.

图 5 显示出了考虑塑性后对相应横向变形进行修正的情况,  $\epsilon_{zz}$  是夹芯沿杆轴线的应变(以百分比): 1—弹性杆,2—弹塑性杆. 考虑了各层材料的塑性和物理非线性后,应变增大了 2.25 倍.

### 3 结 论

由 2 个受力层和 1 个夹芯组成的 3 层设计构件由于重量很小耐久性很高而得到广泛应用. 本文解决了位于弹性基底上的 3 层杆弯曲的复杂问题. 作为一个算例,对于具有一般刚度的基底,分析研究了各层材料塑性对杆的变形量的影响. 分析了所给出的弹性解的收敛性,保证本文给出的解决方案的可靠性. 计算结果说明,材料的塑性和物理非线性对位于基底上的夹层杆的变形影响很大. 在弹塑性变形时,与弹性相比,下垂增加了 59%,纵向位移量减小了 2 倍.

致谢 作者对国家自然科学基金委员会所给予的支持表示感谢.



## [参 考 文 献]

- [1] Hohe J, Goswami S, Becker W. Assessment of interface stress concentrations in layered composites with application to sandwich panels[J]. *Computational Materials Science*, 2003, **26**: 71-79.
- [2] Chanis C C, Aiello R A, Murthy P L N. Composite sandwich thermostructural behavior: computational simulation[A]. In: *Proceeding of the 27th Structure, Structural Dynamics, and Materials Conference*[C]. Texas USA: Part 1. San Antonio, TX, 1986, 370-381.
- [3] Chanis C C, Aiello R A, Murthy P L N. Fiber composite sandwich thermostructural behavior: computational simulation[J]. *J Compos Tech Res*, 1988, **10**(3): 93-99.
- [4] Elspass W, Flemming M. Analysis of precision sandwich structures under thermal loading[A]. In: *Proceeding of 17th Congress of the International Council Aeronautical Sciences* [C]. Sweden: Vol 2. Stockholm, Sweden, 1990, 1513-1518.
- [5] Burton W S, Noor A K. Three-dimensional solutions for thermomechanical stresses in sandwich panels and shells[J]. *J Eng Mech*, ASCE, 1994, **120**(10): 2044-2071.
- [6] Jeusette Jean-Pierre, Laschet Gottfried. Pre- and postbuckling finite element analysis of curved composite and sandwich panels[J]. *AIAA J*, 1990, **28**(7): 1233-1239.
- [7] Chai Gu-Boay, Seah Leong-Keey, Chuwa Lee Soon. Stress distribution in sandwich beams under tension[J]. *Composite Structure*, 1999, **45**(3): 195-204.
- [8] Petras A, Sutcliffe M P F. Indentation resistance of sandwich beams[J]. *Composite Structure*, 1999, **46**(4): 413-424.
- [9] Petras A, Sutcliffe M P F. Indentation failure analysis of sandwich beams[J]. *Composite Structure*, 2000, **50**(3): 311-318.
- [10] McCormack T M, Miller R, Kesler O, et al. Failure of sandwich beams with metallic foam cores[J]. *Internat J Solids Struct*, 2001, **38**(28/29): 4901-4920.
- [11] Kassapoglou C, Fantle S C, Chou J C. Wrinkling of composite sandwich structures under compression[J]. *Journal of Composites Technology & Research*, 1995, **17**(4): 308-316.
- [12] Maiti S K, Shanbhag M R, Eswaran K. Cracktip shielding in adhesive bounded sandwich panels[J]. *Internat J Fract*, 1992, **58**(4): 63-68.
- [13] Cantwell W J, Davies P. A test technique for assessing core-skin adhesion in composite sandwich structure[J]. *J Mater Sci Lett*, 1994, **13**(3): 203-205.
- [14] Scott Burton W, Noor A K. Structural analysis of the adhesive bond in a honeycomb core sandwich panel[J]. *Finite Elements Anal Design*, 1997, **26**(3): 213-227.
- [15] Huang S-J. An analytical method for calculating the stress and strain in adhesive layers in sandwich beams[J]. *Composite Structures*, 2003, **60**(1): 105-114.
- [16] 冯仁杰, 于九明. 蜂窝夹芯复合板及其在汽车工业中的应用[J]. *汽车工艺与材料*, 2003, (8): 30-32.
- [17] 张广平, 戴干策. 复合材料蜂窝夹芯板及其应用[J]. *纤维复合材料*, 2000, (2): 25-27.
- [18] 杨杰, 沈惠申. 复合材料层合夹芯板局部变形行为研究[J]. *工程力学*, 2002, **19**(1): 135-138.

---

## Elastic-Plastic Deformation of Sandwich Rod on the Elastic Basis

GU Yu

( Department of Engineering Mechanics, Tsinghua University,  
Beijing 100084, P. R. China )

**Abstract** The problem about bending of the three-layer elastic-plastic rod located on the elastic base, with a compressibly physical nonlinear core, was studied. The mechanical response of the designed three-layer elements consisting of two bearing layers and a core was examined. The complicated problem about curving of the three-layer rod located on the elastic base was solved. Convergence of the proposed method of elastic solutions was examined to convince that the solution is acceptable. The calculated results indicate that the plasticity and physical nonlinearity of materials have a great influence on the deformation of the sandwich rod on the elastic basis.

**Key words:** sandwich composite rod; elastic base; elastic-plastic deformation