文章编号: 1000-0887(2008) 03-0369-10

美式利率期权的最佳实施边界的分析*

易法槐, 彭新玲, 陈映珊

(华南师范大学 数学科学学院, 广州 510631)

(周哲玮推荐)

摘要: 在 Vasicek 利率模型的假设下, 应用变分不等式方法分析了美式利率期权自由边界的性质. 首先我们得到美式利率期权自由边界的下界, 然后把自由边界问题化为变分不等式, 通过引入惩罚函数证明了该变分不等式解的存在唯一性, 最后证明了自由边界的单调性、有界性和 C^∞ 光滑性.

关 键 词: 利率期权; 自由边界; 变分不等式

中图分类号: O175.26 文献标识码: A

引 言

美式期权, 能在到期日之前(包括到期日)的任何时刻实施, 这个提前实施的特征常导出一个自由边界问题, 它类似于物理中融化和凝固问题所引出的 Stefan 问题(见文献[1-2]).

在本文中, 我们将考虑利率的看涨和看跌期权. 利率看跌期权的购买者预计利率将下降, 在到期日或期满前, 美式利率看跌期权持有者实施期权获得收益为 $\max\{E - r, 0\}$, 其中 r 是期权所依赖的瞬时利率, E 为敲定利率. 利率看涨期权的购买者预计利率将上升, 在到期日或期满前, 美式利率看涨期权持有者实施期权获得收益为 $\max\{r - E, 0\}$, 利率看跌期权的购买者可在利率水平大幅下降时得到保护, 而在利率上升时得益. 利率看涨期权的购买者可在利率水平大幅上升时得到保护, 而在利率下降时得益. 因此看跌利率期权是规避低利率的有效工具, 而看涨利率期权是规避高利率的有效工具. 这两种利率期权可以在投资组合中单独或结合使用.

我们要对利率期权进行定价, 首先必须建立描述利率变化趋势的模型. 在文献[3]中有大量常用的利率模型, 一种常用的模型是由 Vasicek 于 1977 年提出的 Vasicek 模型[4]:

$$dr = (a - br)dt + \sigma dX,$$

其中 dX 是以 0 为期望, 以 dt 为方差的标准正态分布, a、b 和 σ 都是正常数, σ 是利率波动率. 这个模型有一个很好的性质, 即平均利率为常数 b/a, 而且由于它比较容易处理, 利用它有可能找到许多欧式利率期权的显式表达式, 因此该模型在理论上很常用. Vasicek 模型中另一个显著的特点是利率 r 有可能是负的.

* 收稿日期: 2007-09-11; 修订日期: 2008-01-21

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10371045; 10671075); 广东省自然科学基金资助项目(5005930); 高等学校博士学科点专项科研基金资助项目(20060574002)

作者简介: 易法槐(1948—), 男, 教授, 博士(联系人. Tel: + 86-20-85216013; E-mail: fhyi@scnu.edu.cn).

构造一个无风险投资组合，利用 Δ-对冲原理，容易得到利率期权的价格 $V(r,t)$ 满足的偏微分方程（见文献[5]）

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+(a-br)\frac{\partial V}{\partial r}-rV=0.$$

这个方程必须配以适当的终值条件才能得到解决．在到期日，看跌利率期权收益为 $V(r,T)=(E-r)^+$，看涨利率期权收益为 $V(r,T)=(r-E)^+$．

因为我们考虑的是美式利率期权，持有者能在到期日之前的任何时刻实施，这使得期权的价格不会低于立刻实施所得的收益．而且期权的价格和其对 r 的微商必须连续的通过自由边界，即 $V(r_{\mathrm{f}}(t),t)=E-r_{\mathrm{f}}(t)$，$\partial_r V(r_{\mathrm{f}}(t),t)=-1$．这个事实和常见美式期权本质上是一致的，它同样体现了美式利率期权的定价原则，即期权持有人执行最佳实施策略，使得期权价位达到极大．其中期权对 r 的导数的条件是高接触性条件（见文献[6]）．

由于看跌利率期权和看涨利率期权的对称性，本文我们仅讨论看跌利率期权问题．当 $r\geqslant E$ 时，$(E-r)^+=0$，此时持有者不能实施期权，因此在自由边界上 $(E-r)^+=E-r$．在文献[5]中作者已经推导了则美式利率看跌期权的自由边界模型：

$$\begin{cases}\partial_t V+\dfrac{1}{2}\sigma^2\partial_{rr}V+(a-br)\partial_r V-rV=0, & r_{\mathrm{f}}(t)<r<+\infty,0<t<U,\\ V>(E-r)^+, & r_{\mathrm{f}}(t)<r<+\infty,\ 0<t<T,\\ V(r_{\mathrm{f}}(t),t)=E-r_{\mathrm{f}}(t), & \\ \partial_r V(r_{\mathrm{f}}(t),t)=-1,\ V(r,T)=(E-r)^+. & \end{cases}\tag{1}$$

文献[5]中作者应用渐进展开方法分析了在到期日附近自由边界的性质，本文的目的是分析自由边界 $r_{\mathrm{f}}(t)\,(t\in[0,T])$ 的性质．有两种方法可以解决系统(1)．第1种方法是引进1个新的未知函数 $v(r,t)=\partial_t V(r,t)$，并对系统(1)关于 t 求偏导数，则 $v(r,t)$ 是Stefan问题的1个解（见文献[7]）．这种方法的使用有1个限制条件，即收益函数的二阶导数没有奇点．第2种方法是把问题(1)变成1个障碍问题（或变分不等式）

$$\begin{cases}\partial_t V+\sigma^2\partial_{rr}V/2+(a-br)\partial_r V-rV\leqslant 0, & -\infty<r<+\infty,\ 0<t<T,\\ V\geqslant(E-r)^+, & \\ \left[\partial_t V+\sigma^2\partial_{rr}V/2+(a-br)\partial_r V-rV\right][V-(E-r)^+]=0, & \\ V(r,T)=(E-r)^+. & \end{cases}\tag{2}$$

注意到当 $r<0$ 且 $|r|$ 足够大时，美式利率看跌期权的持有者应该实施这张期权，即

$$V(r,t)=E-r\qquad(\text{当 } r \text{ 足够小时}).$$

另一方面

$$\begin{aligned}&\partial_t(E-r)+\sigma^2\partial_{rr}(E-r)/2+(a-br)\partial_r(E-r)-r(E-r)=\\&\quad r^2-(E-b)r-a>0\qquad(\text{当 } r \text{ 足够小时}).\end{aligned}\tag{3}$$

这与系统(2)中的第1个不等式相矛盾．这个事实告诉我们，在把自由边界问题(1)变成障碍问题(2)之前，我们应该找到自由边界的下界 r_*，并且仅仅在区域 $\{r>r_*\}$ 上把(1)式变成(2)式．由(3)式我们猜测 r_* 应该是代数方程 $r^2-(E-b)r-a=0$ 的负根．

在第1节我们将找出自由边界的下界 r_*，且在区域 $\{r>r_*\}$ 上把自由边界问题(1)变成障碍问题(2)；第2节我们证明障碍问题解的存在唯一性；在第3节证明自由边界 $r_{\mathrm{f}}(t)\in C^\infty[-\infty,T)$ 且是严格单调增的．

1 自由边界的下界

由于问题(1)是倒向的，故令 $u(r,t)=V(r,T-t)$ 和 $h(t)=r_f(T-t)$，(1)式变成

$$\begin{cases}\partial_t u-\sigma^2\partial_{rr}u/2-(a-br)\partial_r u+ru=0, & h(t)<r<+\infty,\ 0<t\leqslant T,\\ u>(E-r)^+, & h(t)<r<+\infty,\ 0<t\leqslant T,\\ u(h(t),t)=E-h(t),\\ \partial_r u(h(t),t)=-1,\ u(r,0)=(E-r)^+ .\end{cases}\tag{4}$$

引理 1 设 $(u(r,t),h(t))$ 是问题(4)的解，$h(t)\in C^2(0,T]$，则

$$\partial_{rr}u(h(t),t)\geqslant 0,\qquad t>0.\tag{5}$$

证明 由假设 $h(t)\in C^2(0,+\infty]$，则 $\partial_t u$ 和 $\partial_{rr}u$ 是连续到自由边界 $r=h(t)$，$t\in(0,T]$（见文献[8-9]）。假设结论(5)不对，则存在 $t_0\in(0,+\infty]$，使得 $\partial_{rr}u(h(t_0),t_0)<0$。

由于 $\partial_r u(h(t_0),t_0)=-1$，则存在 $\delta>0$，使得

$$\partial_r u(r,t_0)<-1,\qquad \text{对于 } h(t_0)<r<h(t_0)+\delta.\tag{6}$$

由条件 $u(h(t_0),t_0)=E-h(t_0)$ 和(6)式可得

$$u(r,t_0)<E-r,\qquad \text{对于 } h(t_0)<r<h(t_0)+\delta,$$

这与 $u(r,t)\geqslant(E-r)^+\geqslant E-r$ 相矛盾.

引理 2 在引理 1 的假设条件下，有

$$r_*\leqslant h(t)\leqslant r^*,\qquad t>0,\tag{7}$$

其中 r_* 和 r^* 是代数方程 $r^2-(E-b)r-a=0$ 的 2 个根，即，

$$r_*=\frac{E-b-\sqrt{(E-b)^2+4a}}{2},\quad r^*=\frac{E-b+\sqrt{(E-b)^2+4a}}{2}.\tag{8}$$

证明 自由边界条件 $u(h(t),t)=E-h(t)$ 两边关于 t 求偏导数，得

$$\partial_r u(h(t),t)h'(t)+\partial_t u(h(t),t)=-h'(t),$$

由 $\partial_r u(h(t),t)=-1$，得

$$\partial_t u(h(t),t)=0.\tag{9}$$

在(4)式的第 1 个方程中令 $r=h(t)$，我们得到

$$\partial_t u(h(t),t)-\sigma^2\partial_{rr}u(h(t),t)/2-\\ (a-bh(t))\partial_r u(h(t),t)+h(t)u(h(t),t)=0,$$

利用(9)式、(4)式和(5)式中的自由边界条件，我们有

$$-h^2(t)+(E-b)h(t)+a\geqslant 0,$$

因此

$$r_*\leqslant h(t)\leqslant r^*.$$

引理 2 证完.

如果我们定义

$$u(r,t)=E-r,\qquad r_*\leqslant r<h(t),\ 0<t>0,$$

则自由边界问题(4)变成 1 个障碍问题

$$\begin{cases}\mathscr{L}u\geqslant 0,\ u-(E-r)^+\geqslant 0,\ r_*<r<+\infty,\ 0<t>0,\\ [\mathscr{L}u][u-(E-r)^+]=0,\\ u(r,0)=(E-r)^+,\\ u(r_*,t)=E-r_*.\end{cases}\tag{10}$$

其中

$$\mathscr{L}u = \partial_t u - \sigma^2\partial_{rr}u/2 - (a - br)\partial_r u + ru,$$

r_* 由(8) 式定义.

2　问题(10) 解的存在唯一性

按照文献[10] 中思想, 构造惩罚函数 $\beta_\varepsilon(t)$ (见图 1), 满足

$$\beta_\varepsilon(t) \in C^2(-\infty, +\infty),\quad \beta_\varepsilon(t) \leqslant 0,$$

$$\beta_\varepsilon(0) = -C_0,$$

$$\beta_\varepsilon'(t) \geqslant 0,\quad \beta_\varepsilon'' \leqslant 0,$$

其中

$$C_0 = a - br_* + (E+1)(E - r_*) > 0, \tag{11}$$

并且

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\beta_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & t > 0, \\ -\infty, & t < 0. \end{cases}$$

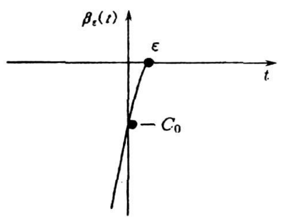

图 1

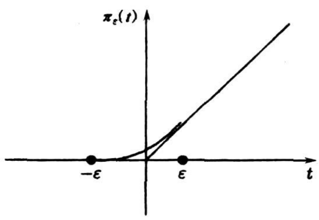

图 2

同时我们定义 1 个逼近 t^+ 的光滑函数 $\pi_\varepsilon(t)$ (见图 2)

$$\pi_\varepsilon(t) = \begin{cases} t, & t \geqslant \varepsilon, \\ \nearrow, & |t| \leqslant \varepsilon, \\ 0, & t \leqslant -\varepsilon, \end{cases}$$

$\pi_\varepsilon(t) \in C^\infty$, $0 \leqslant \pi_\varepsilon' \leqslant 1$, $\pi_\varepsilon''(t) \geqslant 0$, $\lim_{\varepsilon\to 0}\pi_\varepsilon(t) = t^+$ 在 $\mathbf{R}$ 上一致收敛.

考虑(10) 式的逼近问题

$$\begin{cases} \mathscr{L}u_\varepsilon + \beta_\varepsilon(u_\varepsilon - \pi_\varepsilon(E - r)) = 0, & r_* < r < +\infty,\ 0 < t \leqslant T, \\ u_\varepsilon(r, 0) = \pi_\varepsilon(E - r),\quad u_\varepsilon(r_*, t) = E - r_*. \end{cases} \tag{12}$$

记 $\Omega_T = (r_*, +\infty) \times (0, T]$.

引理 3　对固定的 $\varepsilon > 0$, 非线性问题(12) 有唯一解 $u_\varepsilon \in W_{p,\mathrm{loc}}^{2,1}(\Omega_T)$, $1 < p < +\infty$. 且

$$\pi_\varepsilon(E - r) \leqslant u_\varepsilon \leqslant E - r_*, \tag{13}$$

$$-C_0 \leqslant \beta_\varepsilon(u_\varepsilon - \pi_\varepsilon(E - r)) \leqslant 0, \tag{14}$$

其中 C_0 由(11) 式定义.

证明　由于 Ω_T 是无界区域, 我们首先考虑问题(12) 在有界区域 $\Omega_T^R = (r_*, R) \times (0, T]$, $\forall R > 0$ 的定解问题:

$$\begin{cases} \mathscr{L}u_{\varepsilon,R} + \beta_\varepsilon(u_{\varepsilon,R} - \pi_\varepsilon(E - r)) = 0, & (r, t) \in \Omega_T^R, \\ u_{\varepsilon,R}(r, t) = \pi_\varepsilon(E - r), & \text{在 } \partial_p\Omega_T^R \text{ 上}, \end{cases} \tag{15}$$

其中 $\partial_p \Omega_T^R$ 是 Ω_T^R 的抛物边界.

对固定的 ε、R, 应用 Schauder 不动点定理(见文献[11])可证明(15)式有 1 个解 $u_{\varepsilon,R} \in W_p^{2,1}(\Omega_T^R)$, $1 < p < +\infty$. 由于证明是标准的, 我们省略证明过程.

现在我们证明 $u_{\varepsilon,R} \geqslant \pi_\varepsilon(E-r)$. 事实上

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\pi_\varepsilon(E-r) &= -\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}\pi_\varepsilon(E-r) - (a-br)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\pi_\varepsilon(E-r) + r\pi_\varepsilon(E-r) = \\ &- \sigma^2\pi_\varepsilon''(E-r)/2 + (a-br)\pi_\varepsilon'(E-r) + r\pi_\varepsilon(E-r) \leqslant \\ &a - br_* + r\pi_\varepsilon(E-r).\end{aligned}$$

注意到当 $E-r \leqslant -\varepsilon$ 时,

$$\pi_\varepsilon(E-r) = 0,$$

当 $E-r > -\varepsilon$ 时, $r < E+\varepsilon$ 且

$$E-r \leqslant E-r_*,$$

$$r\pi_\varepsilon(E-r) \leqslant (E+\varepsilon)\pi_\varepsilon(E-r_*) = (E+\varepsilon)(E-r_*),$$

因此当 $\varepsilon \leqslant 1$ 时

$$\mathscr{L}\pi_\varepsilon(E-r) \leqslant a - br_* + (E+1)(E-r_*) = C_0 = -\beta_\varepsilon(0),$$

故 $\pi_\varepsilon(E-r)$ 是问题(15)的1个下解, 因此 $u_{\varepsilon,R} \geqslant \pi_\varepsilon(E-r)$. 另一方面易得 $E-r_*$ 是问题(15)的 1 个上解, 则

$$\pi_\varepsilon(E-r) \leqslant u_{\varepsilon,R} \leqslant E-r_*. \tag{16}$$

由(16)式的左边和 β_ε 的定义, 得

$$-C_0 \leqslant \beta_\varepsilon(u_{\varepsilon,R} - \pi_\varepsilon(E-r)) \leqslant 0. \tag{17}$$

令 $R \to +\infty$, 存在函数 $u_\varepsilon(r,t) \in W_{p,\mathrm{loc}}^{2,1}(\Omega_T)$ 和 $\{u_{\varepsilon,R}\}$ 的 1 个子列(仍记作 $\{u_{\varepsilon,R}\}$), 使得

$$u_{\varepsilon,R} \to u_\varepsilon, \qquad (\text{在 } W_{p,\mathrm{loc}}^{2,1}(\Omega_T) \text{ 中弱}),$$

且 $u_\varepsilon(r,t)$ 是问题(12)的 1 个解. 在(16)式和(17)式中令 $R \to +\infty$ 得到(13)和(14)式.

唯一性的证明是标准的, 我们省略证明.

定理 1 问题(10)有唯一解 $u \in C(\Omega_T)$. 且 $\forall R > 0$, $\forall \delta > 0$, $u \in W_p^{2,1}(\Omega_T^R \setminus B_\delta(P_0))$, 其中 $P_0 = (E,0)$, $B_\delta(P_0)$ 是以 P_0 为心, δ 为半径的圆盘. 且

$$u_\varepsilon \to u, \qquad (\text{在 } \Omega_T^R \text{ 中一致}), \tag{18}$$

$$(E-r)^+ \leqslant u \leqslant E-r_*, \tag{19}$$

$$\partial_t u \geqslant 0. \tag{20}$$

证明 $\forall 0 < \alpha < 1$, 对问题(12)应用 $C^{\alpha,\alpha/2}$ 估计, 我们有

$$|u_\varepsilon|_{C^{\alpha,\alpha/2}(\Omega_T^R)} \leqslant C,$$

其中 C 与 ε 无关, 与 R 有关. 因此 $\exists\, u \in C(\Omega_T)$, 使得 $u_\varepsilon \to u$, 在 $C(\Omega_T^R)$ 一致收敛. 且 $\forall R > 0$, $\forall \delta > 0$

$$|u_\varepsilon|_{W_p^{2,1}(\Omega_T^R \setminus B_\delta(P_0))} \leqslant C,$$

其中 C 与 ε 无关. 因此存在 $\{u_\varepsilon\}$ 的子列收敛到 u, 在 $W_{p,\mathrm{loc}}^{2,1}(\Omega_T)$ 弱收敛. 下面证明 u 是问题(10)的解.

在 $\mathscr{L}u_\varepsilon \geqslant 0$ 中, 令 $\varepsilon \to 0$, 得

$$\mathscr{L}u \geqslant 0 \qquad (\text{在 } \Omega_T^R \setminus B_\delta(P_0) \text{ 中}).$$

由 R、δ 的任意性知

$$\mathscr{L}u \geqslant 0 \qquad (\text{在 } \Omega_T \text{ 中}),$$

又在(13)式中令 $\varepsilon \to 0$ 可得到(19)式. 最后只要证

$$\mathscr{L}u = 0 \qquad (\text{在}\{u > (E - r)^+\}\text{中}).$$

事实上, $\forall (r_0, t_0) \in \{u > (E - r)^+\}$,

$$u(r_0, t_0) > (E - r_0)^+ .$$

于是 $\exists\, \delta > 0$, 当 ε 充分小时,

$$u_\varepsilon(r_0, t_0) > \pi_\varepsilon(E - r_0) + \delta,$$

从而当 $\varepsilon \to 0$ 时,

$$\beta_\varepsilon(u_\varepsilon(r_0, t_0) - \pi_\varepsilon(E - r_0)) \geqslant \beta_\varepsilon(\delta) \to 0,$$

于是在 (r_0, t_0) 点, 在(12)式的方程中令 $\varepsilon \to 0$, 我们得到

$$\mathscr{L}u = 0 \qquad (\text{在}(r_0, t_0)\text{处}).$$

下面证明唯一性. 设(10)式有 2 个解 u_1 和 u_2, 不妨设$\{u_1 > u_2\}$不为空集, 则在$\{u_1 > u_2\}$上

$$u_1 > u_2 \geqslant (E - r)^+,$$

于是

$$\mathscr{L}u_1 = 0 \qquad (\text{在}\{u_1 > u_2\}\text{中}),$$
$$\mathscr{L}u_2 \geqslant 0 \qquad (\text{在}\{u_1 > u_2\}\text{中}),$$

所以

$$\mathscr{L}(u_1 - u_2) \leqslant 0 \qquad (\text{在}\{u_1 > u_2\}\text{中}),$$
$$u_1 - u_2 = 0 \qquad (\text{在 } \partial_p\{u_1 > u_2\}\text{ 上}),$$

其中 $\partial_p\{u_1 > u_2\}$ 是$\{u_1 > u_2\}$的抛物边界. 由下解的极大值原理知在$\{u_1 > u_2\}$上, $u_1 - u_2 \leqslant 0$. 这与区域$\{u_1 > u_2\}$的定义相矛盾.

最后我们证明(20)式. 事实上 $\forall \delta > 0$, 由(12)式, $v_\varepsilon(r, t) = u_\varepsilon(r, t + \delta)$ 满足

$$\begin{cases} \mathscr{L}v_\varepsilon + \beta_\varepsilon(v_\varepsilon - \pi_\varepsilon(E - r)) = 0, & r_* < r < +\infty,\ 0 < t \leqslant T - \delta, \\ v_\varepsilon(r, 0) = u_\varepsilon(r, \delta) \geqslant \pi_\varepsilon(E - r), & (\text{由}(13)\text{式}), \\ v_\varepsilon(r_*, t) = E - r_* . \end{cases} \tag{21}$$

对初边值问题(12)和(21)应用比较原理, 我们有

$$u_\varepsilon(r, t) \leqslant u_\varepsilon(r, t + \delta), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T - \delta.$$

令 $\varepsilon \to 0$, 我们得到(20)式.

3 自由边界的性质

引理 4 若 $u(r, t)$ 是问题(10)的解, 则

$$u(r, t) > 0, \qquad r \geqslant r_*,\ 0 < t \leqslant T. \tag{22}$$

证明 由

$$\begin{cases} \partial_t u - (\sigma^2/2)\partial_{rr}u - (a - br)\partial_r u + ru \geqslant 0, & r > r_*,\ 0 < t \leqslant T, \\ u(r, 0) = (E - r)^+ \geqslant 0, \\ u(r_*, t) = E - r_* \geqslant 0 \end{cases}$$

及强极值原理 $u(r, t) > 0$, $t \in (0, T]$.

下面我们讨论自由边界的性质. 定义持有区域

$$\mathscr{C}_{\mathrm{R}} := \left\{ (r,t) \in [r_*, +\infty) \times [0,T] \mid u(r,t) > (E-r)^+ \right\}$$

及实施区域

$$\mathscr{S}_{\mathrm{R}} := \left\{ (r,t) \in [r_*, +\infty) \times [0,T] \mid u(r,t) = (E-r)^+ \right\}.$$

且基于(20)式我们定义1个函数

$$F: [r_*, +\infty) \to [0,T],\quad F(r) = \sup\left\{ t \mid u(r,t) = (E-r)^+ \right\}.$$

定理2 $F(r)$ 是单调减的.

证明 由(20)式知

$$\mathscr{S}_{\mathrm{R}} = \left\{ (r,t) \mid r_* \leqslant r < +\infty, 0 \leqslant t \leqslant F(r) \right\}.$$

下面证明 $F(r)$ 是单调减的. 事实上, 当 $r \geqslant E$ 时, $(E-r)^+ = 0$, 由(22)式我们得到

$$F(r) = 0, \qquad r \geqslant E.$$

因此 $F(r_0) > 0$ 时, 有 $r_0 < E$. 定义1个新函数 $u(r,t)$ 满足

$$u(r,t) = \begin{cases} u(r,t), & (r,t) \in (r_0, +\infty) \times [0, F(r_0)], \\ E-r, & (r,t) \in [r_*, r_0] \times [0, F(r_0)]. \end{cases}$$

由于$\left\{ (r_0, t) \mid 0 \leqslant t \leqslant F(r_0) \right\} \subset \mathscr{S}_{\mathrm{R}}$, u 和$\partial_r u$ 在$[r_*, +\infty) \times [0, F(r_0)]$ 上连续. 下面我们证明 $u(r,t)$ 是问题(10) 在区域$[r_*, +\infty) \times [0, F(r_0)]$ 上的解. 事实上

(a) $u(r,t) \geqslant (E-r)^+$;

(b) $u(r,0) = (E-r)^+$, $u(r_*, t) = E - r_*$;

(c) 在区域$(r_0, +\infty) \times [0, F(r_0)]$ 上,

$$\mathscr{L}u = \mathscr{L}u \geqslant 0,\ (\mathscr{L}u)(u-(E-r)^+) = (\mathscr{L}u)(u-(E-r)^+) = 0$$

及在区域$[r_*, r_0] \times [0, F(r_0)]$ 上,

$$(\mathscr{L}u)(u-(E-r)^+) = 0.$$

下证在区域$[r_*, r_0] \times [0, F(r_0)]$ 上, $\mathscr{L}u \geqslant 0$ 事实上

$$\mathscr{L}u = \mathscr{L}(E-r) = -r^2 + (E-b)r + a.$$

由于$\left\{ (r_0, t) \mid 0 \leqslant t \leqslant F(r_0) \right\} \subset \mathscr{S}_{\mathrm{R}}$, 因此

$$-r^2 + (E-b)r + a \geqslant 0, \qquad r = r_0,$$

于是

$$-r^2 + (E-b)r + a \geqslant 0, \qquad r_* \leqslant r \leqslant r_0,$$

即

$$\mathscr{L}u \geqslant 0, \qquad (r,t) \in [r_*, r_0] \times [0, F(r_0)].$$

由(a)、(b)和(c)知 u 是问题(10) 在$[r_*, +\infty) \times [0, F(r_0)]$ 上的解. 由(10)式解的唯一性得

$$u(r,t) = u(r,t), \qquad (r,t) \in [r_*, +\infty) \times [0, F(r_0)].$$

于是

$$u = (E-r)^+, \qquad (r,t) \in [r_*, r_0] \times [0, F(r_0)],$$

因此$[r_*, r_0] \times [0, F(r_0)] \in \mathscr{S}_{\mathrm{R}}$, 于是

$$F(r) \geqslant F(r_0), \qquad r_* \leqslant r \leqslant r_0,$$

故 $F(r)$ 是单调减的.

定理3 $F(r)$ 在$\left\{ r \mid 0 < F(r) < T \right\}$ 上严格单调减.

证明 假设定理的结论不正确, 则存在 r_1 和r_2, $r_1 < r_2$, 使得$0 < F(r_1) = F(r_2) < T$.

记 $t_0 = F(r_1)$, 则

$$u(r, t_0) = E - r, \qquad r \in [r_1, r_2],$$

且

$$\partial_t u - \frac{\sigma^2}{2}\partial_{rr} u - (a - br)\partial_r u + ru = 0, \qquad (r, t) \in (r_1, r_2) \times [t_0, T],$$

则在水平段 $\{t = t_0, r_1 \leqslant r \leqslant r_2\}$ 上,

$$\partial_t u = \sigma^2 \partial_{rr} u/2 + (a - br)\partial_r u - ru = r^2 - (E - b)r - a,$$

而在重合集 $\mathscr{R}$ 上,

$$\mathscr{L}u = \mathscr{L}(E - r) = - r^2 + (E - b)r + a \geqslant 0,$$

则

$$\partial_t u = r^2 - (E - b)r - a \leqslant 0, \qquad t = t_0,\ r_1 \leqslant r \leqslant r_2.$$

显然

$$r^2 - (E - b)r - a \neq 0,$$

则在 $\{t = t_0, r_1 \leqslant r \leqslant r_2\}$ 上存在某点满足 $\partial_t u < 0$, 这与(20)式矛盾. 因此 $F(r)$ 在 $\{r \mid 0 < F(r) < T\}$ 上严格单调减. 定理 3 证完.

根据定理 3 的严格单调性, $t = F(r)$ 存在连续且单调减的反函数 $r = h(t), 0 < t < T$. 注意到 $F(r)$ 的连续性等价于 $h(t)$ 的严格单调性. 而我们没有证明 $F(r)$ 的连续性, 因此下面证明 $h(t)$ 的严格单调性.

定理 4 自由边界 $r = h(t)$ 在 $(0, T)$ 是严格单调减的, 且 $h(t) \in C^\infty(0, T]$.

证明 假设 $h(t)$ 不是严格单调减的, 则存在 t_1 和 t_2, $0 < t_1 < t_2 < T$, 使得

$$h(t) = r_0, \qquad t_1 < t < t_2.$$

则

$$\begin{cases} \mathscr{L}u = 0, & (r, t) \in (r_0, +\infty) \times (t_1, t_2), \\ u(r_0, t) = E - r_0, & t_1 < t < t_2. \end{cases}$$

这个系统关于 t 求导, 得到

$$\begin{cases} \mathscr{L}u_t = 0, & (r, t) \in (r_0, +\infty) \times (t_1, t_2), \\ u_t(r_0, t) = 0, \ u_t \geqslant (\neq) 0. \end{cases}$$

由 Hopf 引理, 得 $u_{rt}(r_0, t) > 0$, $t \in (t_1, t_2)$. 另一方面 $u_r(r_0, t) = -1$, $t \in (t_1, t_2)$, 得 $u_{rt}(r_0, t) = 0$, $t \in (t_1, t_2)$, 矛盾. 故 $r = h(t)$ 是严格单调减的.

基于(20)式和 $h(t)$ 的连续性, 应用文献[12]中的方法, 最后我们可得到 $h(t)$ 的 C^∞ 正则性. 证明过程是标准的, 我们省略证明.

由 $h(t)$ 的单调性知 $\lim\limits_{t \to 0^+} h(t)$ 存在, 定义

$$h(0) = \lim_{t \to 0^+} h(t).$$

定理 5

$$h(0) = \begin{cases} E, & a \geqslant bE, \\ r^*, & a < bE, \end{cases} \tag{23}$$

其中 r^* 由(8)式定义.

证明 由于 $u > 0$, 因此 $h(t) \leqslant E$, 故 $h(0) \leqslant E$.

情形 1: $a \geqslant bE$, 欲证 $h(0) = E$.

假设 $h(0) < E$, 则存在 $\delta > 0$, 使得

$$\mathscr{L}u = 0, \qquad h(0) < r < E,\ 0 \leqslant t \leqslant \delta$$

则在水平段$\{t = 0, h(0) < r < E\}$ 上, 有

$$\partial_t u(r,0) = (\sigma^2/2)\partial_{rr}(E - r) + (a - br)\partial_r(E - r) - r(E - r) =$$
$$r^2 - (E - b)r - a.$$

记

$$f(r) = r^2 - (E - b)r - a,$$

注意到当 $r > (E - b)/2$ 时, $f'(r) = 2r - (E - b) > 0$. 因此当$(E - b)/2 < r < E$ 时, $\partial_t u(r, 0) = f(r) < f(E) = bE - a \leqslant 0$, 这与(20) 式相矛盾, 因此 $h(0) = E$.

情形 2: $a < bE$. 由(8) 式我们有 $r^* < E$. 欲证 $h(0) = r^*$. 由(7) 式我们首先有 $h(0) \leqslant r^*$.

另一方面如果 $h(0) < r^*$, 则存在 $\delta > 0$, 使得

$$\mathscr{L}u = 0, \qquad h(0) < r < r^*,\ 0 \leqslant t \leqslant \delta.$$

应用与情形1 相同的方法, 得到

$$\partial_t u(r,0) = r^2 - (E - b)r - a = f(r).$$

由$f(r^*) = 0$, 得

$$\partial_t u < 0, \qquad h(0) < r < r^*,$$

这与(20) 式矛盾. 故我们得到(23) 式.

定理 6 自由边界不会碰到边界 $r = r_*$, 即

$$h(t) > r_*,$$

其中 r_* 由(8) 式定义.

证明 根据定理 4, $h(t) \in C^\infty(0, T]$, 因此我们可以应用第1节中的所有结论. 系统(4) 关于 t 求导, 得到

$$\begin{cases} \mathscr{L}u_t = 0, & h(t) < r < +\infty, 0 < t < T, \\ \partial_t u(h(t), t) = 0 & (\text{由(9) 式}), \\ u_t \geqslant (\not\equiv) 0. \end{cases}$$

应用 Hopf 引理, 得到

$$\partial_{rt} u(h(t), t) > 0. \tag{24}$$

自由边界条件 $u_r(h(t), t) = -1$ 关于 t 求导, 得到

$$u_{rr}(h(t), t)h'(t) + u_{rt}(h(t), t) = 0. \tag{25}$$

由(24) 式和(25) 式知 $h'(t) \neq 0$, 故

$$u_{rr}(h(t), t) = \frac{-u_{rt}(h(t), t)}{h'(t)} > 0.$$

由(24) 式和 $h'(t) < 0$, 则在自由边界上

$$0 = \mathscr{L}u\,|_{r = h(t)} = (\partial_t u - \sigma^2\partial_{rr}u/2 - (a - br)\partial_r u + ru)\,|_{r = h(t)} <$$
$$(a - br + ru)\,|_{r = h(t)} = -h^2(t) + (E - b)h(t) + a.$$

由 r_* 是 $r^2 - (E - b)r - a = 0$ 的负根, 因此 $h(t) > r_*$.

注 因为实施边界 $r_f(t) = h(T - t)$, 所以 $r_f(t) \in C^\infty[0, T)$, 且

$$r_* < r_f(t) \leqslant \min\left\{E, r^*\right\},$$

$r_f(t)$ 在$[0, T]$ 上严格单调增.

[参 考 文 献]

[1] JIANG Li-shang. Well-posedness for a free boundary problem of a nonlinear parabolic equation[J]. Acta Math Sinica, 1962, **12**(3): 369-388.

[2] JIANG Li-shang. Existence and differentiability of the solution of a two-phase Stefan problem for quasi-linear parabolic equations[J]. Acta Math Sinica, 1965, **15**(6): 749-764.

[3] Wilmott P. Derivatives, The Theory and Practice of Financial Engineering[M]. West Sussex, England: John Wiley & Sons Ltd, 1998.

[4] Vasicek O A. An equilibrium characterization of the term structure[J]. Financial Economics, 1977, **5**(2): 177-188.

[5] Alobaidi G, Mallier R. Interest rate options close to erpiry[J]. SUT Journal of Mathematics, 2004, **40**(1): 13-40.

[6] Samuelson P A. Rational theory of warrant pricing[J]. Industrial Management Review, 1965, **6**(1): 13-31.

[7] JIANG Li-shang, BIAN Bao-jun, YI Fa-huai. A parabolic variational inequality arising from valuation of fixed rate mortgages}[J]. European J Appl Math, 2005, **16**(3): 361-383.

[8] Cannon J R. The One-Dimensional Hear Equation[M]. Menlo Park, California: Addison-Wesley Publishing Company, Inc, 1984.

[9] Ladyzenskaja O A, Solonnikov V A, Ural' ceva N N. Linear and Quasi-linear Equations of Parabolic Type[M]. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 1968.

[10] Friedman A. Variational Principle and Free boundary Problems[M]. New York: John Wiley & Sons, 1982.

[11] Gilbarg D, Trudinger N. S. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1983.

[12] Friedman A. Parabolic variational inequalities in one space dimension and smoothness of the free boundary[J]. Journal of Functional Analysis, 1975, **18**(2): 151-176.

Analysis of the Exercise Boundary of an American Interest Rate Option

YI Fa-huai, PENG Xin-ling, CHEN Ying-shan

(School of Mathematical Sciences, South China Normal University, Guangzhou 510631, P.R. China)

Abstract: By applying the variational inequality technique, the behavior of the exercise boundary of the american-style interest rate option is analyzed under the assumption that the interest rates obey a mean-reverting random walk as given by the Vasicek model. The monotonicity, boundedness and C^∞-smoothness of the exercise boundary are proved.

Key words: interest rate option; exercise boundary; variational inequality