文章编号: 1000-0887(2008) 04-0447-06

一类基于比率的捕食-食饵系统的全局稳定性分析*

鲁铁军, 王美娟, 刘 妍

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

(刘曾荣推荐)

摘要: 研究一类基于比率和具第III类功能性反应的捕食-食饵系统. 通过分析正平衡点的局部稳定性给出了系统正平衡点全局渐近稳定以及系统存在极限环的条件. 运用 Hopf 分支理论讨论了当正平衡点是非双曲型时的情形.

关 键 词: 比率; 全局渐近稳定; 功能性反应; Hopf 分支

中图分类号: O175.13 文献标识码: A

引 言

我们研究基于一类比率的捕食-食饵系统

$$\begin{cases} x' = x(a - bx) - cx^2y/(m^2y^2 + x^2), \\ y' = y[-d + fx^2/(m^2y^2 + x^2)], \end{cases} \tag{1}$$

这里 $a/b > 0$ 表示食饵种群承载能力, $d > 0$ 表示捕食者种群的自然死亡率. a、c、m 和 f 都是非负数且分别表示内禀增长率、最大食饵消耗率、半饱和常数和转化率. 近来, 建立在 Holling II功能性反应的捕食-食饵模型已经得到了很好的研究(见文献[1-4]), 本文考虑基于 Holling III功能性反应的捕食-食饵模型. 文献[5]给出了系统平衡点全局吸引以及不存在正周期解的条件. 文献[6]对系统进行较为完整的参数分析, 得到了奇点全局渐近稳定的条件, 并且指出, 系统的持续生存不仅与参数有关, 还与其初值有关. 本文对正平衡点的局部稳定性进行了完整的分析, 给出了系统正平衡点全局渐近稳定以及系统存在极限环的条件, 较文献[5-6]更具有一般性, 并且在此基础上运用 Hopf 分支理论讨论了当正平衡点是非双曲型时的情形.

考虑生物学意义, 均假设 $x(0) > 0$, $y(0) > 0$. 注意到 $x = 0$, $y = 0$ 是系统(1) 的不变流形, 则 $x(t) > 0, y(t) > 0$. 以下均在 $R_+^2 = \{(x, y): x > 0, y > 0\}$ 讨论.

1 平衡点分析

为方便计算, 首先对系统作无量纲化处理, 作变换

$$t \to at,\ x \to \frac{b}{a}x,\ y \to \frac{bm}{a}y,$$

* 收稿日期: 2007-08-12; 修订日期: 2008-02-27
作者简介: 鲁铁军(1982—), 男, 浙江宁波人, 硕士(联系人. Tel: +86-574-81339720; E-mail: ltj1982@163.com).

系统(1)可化为

$$\begin{cases} x' = x(1-x) - ex^2y/(x^2+y^2) \stackrel{\triangle}{=} P(x,y), \\ y' = y[-w + hx^2/(x^2+y^2)] \stackrel{\triangle}{=} Q(x,y), \end{cases} \tag{2}$$

这里, $e = c/(am)$, $w = d/a$, $h = f/a$.

对于系统(2),有2个平衡点 $O(0,0)$ 和 $A(1,0)$,并且在下列条件满足时有唯一的正平衡点 $B(x^*, y^*)$:

(Ⅰ) $h > w$;

(Ⅱ) $h - e\sqrt{(h-w)w} > 0$;

这里 $x^* = (1/h)(h - e\sqrt{(h-w)w})$, $y^* = \sqrt{(h-w)/w}\,x^*$. 如果 $h > w$, 则 $h = h - w + w \geqslant 2\sqrt{(h-w)w}$. 所以, 若 $e < 2$, $h > w$, 则系统(2)有唯一的正平衡点.

引理1[6] 系统(2)的所有初值在第一象限的解正向有界.

引理2[6] 对于系统(2), 如果 $h \geqslant w$, 则 $A(1,0)$ 是鞍点, 若 $h < w$, 则 $A(1,0)$ 是稳定结点.

系统(2)在 $B(x^*, y^*)$ 的 Jacobi 矩阵:

$$\boldsymbol{J}_B = \begin{pmatrix} -x^* + \dfrac{ex^*y^*(x^{*2}-y^{*2})}{(x^{*2}+y^{*2})^2} & -\dfrac{ex^{*2}(x^{*2}-y^{*2})}{(x^{*2}+y^{*2})^2} \\ \dfrac{2hx^*y^{*3}}{(x^{*2}+y^{*2})^2} & -\dfrac{2hx^{*2}y^{*2}}{(x^{*2}+y^{*2})^2} \end{pmatrix},$$

$$\det(\boldsymbol{J}_B) = 2hx^{*3}y^{*2}/(x^{*2}+y^{*2})^2 > 0,$$

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{J}_B) = [-h^2 + 2ew\sqrt{(h-w)w} - 2hw(h-w)].$$

设 $\alpha = \sqrt{(h-w)w}$ $(\alpha > 0)$, 则

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{J}_B) = \frac{1}{h^2w^2}[-(1+2w)\alpha^4 - 2w^2(1+w)\alpha^2 + 2ew^3\alpha - w^4] \quad (\alpha > 0).$$

记 $$g(\alpha) = -(1+2w)\alpha^4 - 2w^2(1+w)\alpha^2 + 2ew^3\alpha - w^4,$$

那么

$$g'(\alpha) = -4(1+2w)\alpha^3 - 4w^2(1+w)\alpha + 2ew^3,$$

$$g''(\alpha) = -12(1+2w)\alpha^2 - 4w^2(1+w) < 0,$$

故 $y = g'(\alpha)$ 在 $(0, +\infty)$ 是单调递减的, 又 $g'(0) > 0$, $\lim\limits_{\alpha\to\infty} g'(\alpha) = -\infty$, 所以 $g'(\alpha_1) = 0$ 有唯一正实根 α_1. 所以 $y = g(\alpha)$ 在 $(0, \alpha_1)$ 上是单调递增的, 在 $(\alpha_1, +\infty)$ 上是单调递减的. 这样可以得到

(Ⅰ) $g(\alpha_1) < 0$, 此时有 $g(\alpha) < 0$ 恒成立;

(Ⅱ) $g(\alpha_1) = 0$, 当 $\alpha \neq \alpha_1$ 时, 有 $g(\alpha) < 0$ 成立;

(Ⅲ) $g(\alpha_1) > 0$, 注意到 $g(0) < 0$, $\lim\limits_{\alpha\to\infty} g(\alpha) = -\infty$, 故 $g(\alpha) = 0$ 有2个正实根 α_2、α_3($\alpha_2 < \alpha_3$).

进一步可以得到 $g(\alpha) < 0$, $\alpha \in (0, \alpha_2) \cup (\alpha_3, +\infty)$, 以及 $g(\alpha) > 0$, $\alpha \in (\alpha_2, \alpha_3)$.

$$g(\alpha_1) = -(1+2w)\alpha_1^4 - 2w^2(1+w)\alpha_1^2 + 2ew^3\alpha_1 - w^4.$$

注意到 α_1 是 $g'(\alpha) = 0$ 的正实根, 可以得到

$$\frac{\alpha_1 g'(\alpha_1)}{4} = -(1+2w)\alpha_1^4 - w^2(1+w)\alpha_1^2 + \frac{1}{2}ew^3\alpha_1 = 0,$$

所以

$$g(\alpha_1) = -w^2\left[(1+w)\alpha_1^2 - \frac{3}{2}ew\alpha_1 + w^2\right].$$

考虑函数 $y = (1+w)x^2 - (3/2)ewx + w^2$, 当 $\Delta = w^2[9e^2/4 - 4(1+w)] < 0$ 时, 即 $9e^2/4 - 4(1+w) < 0$ 时, $y > 0$ 恒成立, 此时就有 $g(\alpha_1) < 0$; 当 $9e^2/4 - 4(1+w) = 0$ 时, 若 $\alpha_1 = 3ew/(4(w+1))$, 则 $g(\alpha_1) = 0$, 若 $\alpha_1 \neq 3ew/(4(w+1))$, 则 $g(\alpha_1) < 0$; 当 $9e^2/4 - 4(1+w) > 0$ 时, 记 x_1、$x_2(x_1 < x_2)$ 是方程 $(1+w)x^2 - (3/2)ewx + w^2 = 0$ 的 2 个正实根, 我们可以得到

(Ⅰ) $g(\alpha_1) < 0$, $\alpha_1 \in (0, x_1) \cup (x_2, +\infty)$;

(Ⅱ) $g(\alpha_1) > 0$, $\alpha_1 \in (x_1, x_2)$.

我们还需要比较 α_1、x_1 与 x_2 的大小. 考虑 α_1 是 $g'(\alpha) = 0$ 的唯一正实根, 且 $y = g'(\alpha)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是单调递减的, 所以由 $g'(x_1) > 0 (< 0) = g'(\alpha_1)$, 可以得到 $\alpha_1 > x_i (< x_i)$. 而

$$g'(x_i) = -4(1+2w)x_i^3 - 4w^2(1+w)x_i + 2ew^3,$$

这里 $x_i(i = 1, 2)$ 满足 $(1+w)x_i^2 - (3/2)ewx_i + w^2 = 0$. 通过化简

$$g'(x_i) = (x_i/3)\left(w\sqrt{9e^2 - 16(1+w)} + 2\sqrt{w^2+8w+4}\,x_i\right) \times \left(w\sqrt{9e^2 - 16(1+w)} - 2\sqrt{w^2+8w+4}\,x_i\right),$$

记 $A_i = w\sqrt{9e^2 - 16(1+w)} - 2\sqrt{w^2+8w+4}\,x_i$, 则

$$A_1 = w\sqrt{9e^2 - 16(1+w)} - 2\sqrt{w^2+8w+4}\,x_1 = w\sqrt{9e^2 - 16(1+w)} - \sqrt{w^2+8w+4}\,\frac{3e - \sqrt{9e^2 - 16(1+w)}}{2(1+w)} = \frac{w}{2(w+1)}\Big(2(w+1)\sqrt{9e^2 - 16(1+w)} - 3e\sqrt{w^2+8w+4} + \sqrt{w^2+8w+4}\sqrt{9e^2 - 16(1+w)}\Big).$$

若 $A_1 = 0$, 则

$$2(w+1)\sqrt{9e^2 - 16(1+w)} - 3e\sqrt{w^2+8w+4} + \sqrt{w^2+8w+4}\sqrt{9e^2 - 16(1+w)} = 0,$$

经过计算可得

$$9e^2 = 16(1+w)\Big\backslash\left(1 - \frac{w^2+8w+4}{5w^2+16w+8+4(1+w)\sqrt{w^2+8w+4}}\right) \overset{\Delta}{=} K_1,$$

所以

(Ⅰ) 当 $9e^2 > K_1$ 时, $g'(x_1) > 0$, $x_1 < \alpha_1$;

(Ⅱ) 当 $9e^2 = K_1$ 时, $g'(x_1) = 0$, $x_1 = \alpha_1$;

(Ⅲ) 当 $9e^2 < K_1$ 时, $g'(x_1) < 0$, $x_1 > \alpha_1$.

$$A_2 = w\sqrt{9e^2 - 16(1+w)} - 2\sqrt{w^2+8w+4}\,x_2 = \frac{w}{2(w+1)}\Big(2(w+1)\sqrt{9e^2 - 16(1+w)} - 3e\sqrt{w^2+8w+4} - \sqrt{w^2+8w+4}\sqrt{9e^2 - 16(1+w)}\Big).$$

因为

$$\frac{\sqrt{w^2+8w+4}}{2(w+1)-\sqrt{w^2+8w+4}}>1,\ 9e^2>9e^2-16(1+w).$$

故
$$\sqrt{9e^2-16(1+w)}<3e<3e\frac{\sqrt{w^2+8w+4}}{2(w+1)-\sqrt{w^2+8w+4}},$$

从而
$$2(w+1)\sqrt{9e^2-16(1+w)}-3e\sqrt{w^2+8w+4}-\sqrt{w^2+8w+4}\sqrt{9e^2-16(1+w)}<0,$$

所以 $g'(x_2)<0$. 即 $x_2>\alpha_1$. 从而可以得到表 1.

表 1

$\mathrm{tr}(\boldsymbol{J}_B)<0$	$\mathrm{tr}(\boldsymbol{J}_B)=0$	$\mathrm{tr}(\boldsymbol{J}_B)>0$
$9e^2<K_1$ $9e^2>K_1, \alpha\in(0,\alpha_2)\cup(\alpha_3,+\infty)$ $9e^2=K_1, \alpha\neq\alpha_1$	$9e^2=K_1, \alpha=\alpha_1=x_1$ $9e^2>K_1, \alpha=\alpha_i(i=1,2)$	$9e^2>K_1, \alpha\in(\alpha_2,\alpha_3)$

2 主要结果

定理 1 当下列条件成立时, 系统(2) 的正平衡点 $B(x^*, y^*)$ 是全局渐近稳定的.

(Ⅰ) $h>w$;

(Ⅱ) $9e^2<\min\left\{K_1, 36\right\}$;

其中
$$K_1=16(1+w)\left(1-\frac{w^2+8w+4}{5w^2+16w+8+4(1+w)\sqrt{w^2+8w+4}}\right).$$

证明 此时系统有唯一的正平衡点 $B(x^*, y^*)$, 且为稳定的焦(结) 点; 由(Ⅰ), $A(1,0)$ 是鞍点; 条件(Ⅰ) 蕴涵 $e<2$, 所以 $\lim\limits_{t\to\infty}\inf x(t)\geqslant 1-e/2>0$; 而由引理 1 知, 系统(2) 的所有初值在第一象限的解正向有界的. 所以只需要证明系统(2) 不存在周期解. 事实上, 若系统(2) 存在一个周期解 Γ, 考虑其发散量

$$\Delta=\int_0^T\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)_{(x,y)\in\Gamma}\mathrm{d}t,$$

因为 $B(x^*, y^*)$ 是局部渐近稳定的, 所以有 $\Delta\geqslant 0$. 在文献[6] 中, 作者指出:

$$\Delta=\int_0^T\left(\frac{-u^4+2eu^3-2(1+h)u^2-2}{1+u^2}\right)_{(x,y)\in\Gamma}\mathrm{d}t,$$

其中 $u=x/y$, 并且给出系统(2) 不存在周期解的条件

$$e<\frac{4}{3}\sqrt{h+1},\ \mathrm{tr}(\boldsymbol{J}_B)<0.$$

考虑到 $-u^4+2eu^3-2(1+h)u^2-2<-u^4+2eu^3-2(1+w)u^2-2$, 记 $S(u)=-u^4+2eu^3-2(1+w)u^2-2$, $S'(u)=-2u(2u^2-3eu+2(1+w))$, 从而

(Ⅰ) 当 $9e^2<16(1+w)$ 时, $S'(u)<0$ 恒成立, $S(0)<0$, 故 $S(u)<0$ 恒成立;

(Ⅱ) 当 $9e^2\geqslant 16(1+w)$ 时, $y=S(u)$ 有极大值点 $u=u_1$, 其中 $u_1=(3e+\sqrt{9e^2-16(1+w)})/4$. 考虑到 $S(u_1)=-u_1^4+2eu_1^3-2(1+w)u_1^2-2$, u_1 满足 $2u_1^2-3eu_1+2(1+w)=0$, 所以

$$u_1^4=\frac{3}{2}eu_1^3-(1+w)u_1^2,\quad u_1^3=\frac{3}{2}eu_1^2-(1+w)u_1.$$

经过计算可以得到

$$S(u_1) = \left[\frac{3e^2}{4} - \frac{4}{3}(1+w)\right]u_1^2 - \left[\frac{(w+1)^2}{3} + 2\right],$$

所以当 $9e^2 < K_1$ 时, $S(u_1) < 0$, 即有 $S(u) < 0$ 恒成立. 所以 $\Delta < 0$, 矛盾, 得证.

定理 2 当下列条件成立时, 系统(2) 至少存在一个极限环.

(Ⅰ) $e < 2$;

(Ⅱ) $\sqrt{(h-w)w} \in (\alpha_2, \alpha_3)$;

(Ⅲ) $9e^2 > K_1$;

其中 $$K_1 = 16(1+w)\bigg/\left(1 - \frac{w^2+8w+4}{5w^2+16w+8+4(1+w)\sqrt{w^2+8w+4}}\right),$$

α_2 和 α_3 是方程 $g(\alpha) = 0$ 的 2 个实根.

证明 此时系统(2) 有唯一的正平衡点 $B(x^*, y^*)$, 且为不稳定的焦(结) 点, 由引理 1 及 Bendixson 环域定理直接得到结论(见文献[7]).

当 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{J}_B) = 0$ 时, 正平衡点 $B(x^*, y^*)$ 是非双曲型的, 此时可产生 Hopf 分支(见文献[8]). 为方便计算, 作下列变换:

$$x \to x,\ y \to \sqrt{\frac{w}{h-w}}\,y,\quad t \to \frac{h-w}{w}\bigg/\left(\frac{wy^2}{h-w} + x^2\right)t,$$

系统(2) 可转换为

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x}{w}(1-x)(Ax^2+y^2) - \dfrac{B}{w}x^2y, \\ y' = y(x^2-y^2), \end{cases} \tag{3}$$

其中 $A = w/(h-w)$, $B = e\sqrt{w/(h-w)}$.

系统(3) 有唯一的正平衡点 (x_0, x_0), 且有 $x_0 = 1 - B/(1+A)$. 当 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{J}_B) = 0$ 时, $-2Ax_0 + A - 1 - 2w = 0$. 令

$$x = x - x_0,\ y = y - y_0,\ X = x - y,\ Y = y.$$

系统(3) 可转换为

$$\begin{cases} X' = by + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + \\ \qquad a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 + F_4(x, y), \\ Y' = 2x_0^2x + x_0x^2 + 4x_0xy + x^2y + 2xy^2, \end{cases} \tag{4}$$

其中 $F_4(x, y)$ 是 4 次多项式, 且

$$a_{20} = \frac{x_0}{w}(-5Ax_0 + 2A + x_0 - w),\quad a_{11} = \frac{2x_0}{w}(-4Ax_0 + A - 2w),$$

$$a_{02} = \frac{x_0}{w}(-3Ax_0 + 1 - 2x_0),\quad a_{30} = \frac{A}{w}(1 - 4x_0),\quad a_{12} = \frac{4x_0}{w}(1+3A).$$

由文献[7], 系统(4) 的 Liapunov 系数

$$\sigma = 3\pi x_0\Big\{4a_{11}a_{02} - (1+A)^2x_0^3(2a_{20} + 4x_0) + 2x_0(1+A)[a_{11}a_{02} + 3(1+A)x_0^3a_{30} - 2x_0^2a_{12} - (1+A)x_0^3]\Big\}\Big/\left[2(1+A)(2(1+A)x_0^5)^{3/2}\right].$$

经计算可以得到如下结论:

当 $e < 2$, $w < h < w + 1 - e^2/(w+1)$ 时, $\sigma < 0$.

定理 3 当下列条件成立时, 系统(2) 存在一个稳定的极限环.

(Ⅰ) $w < h < w + 1 - \frac{e^2}{w+1}$, $e < 2$;

(Ⅱ) $\sqrt{(h-w)w} = \alpha_1 = x_1$或 $\sqrt{(h-w)w} \in (\alpha_2, \alpha_3)$;

(Ⅲ) $9e^2 \geqslant K_1$;

其中 $$K_1 = 16(1+w) \Bigg/ \left(1 - \frac{w^2+8w+4}{5w^2+16w+8+4(1+w)\sqrt{w^2+8w+4}}\right),$$
α_2和 α_3是 $g(\alpha) = 0$的2个正实根, x_1 是方程$(1+w)x^2 - (3/2)ewx + w^2 = 0$的较小实根.

[参 考 文 献]

[1] Berezovskaya F, Karev G, Arditi R. Parametric analysis of the ratio-dependent predator-prey model [J]. J Math Biol, 2001, **43**(3): 221-246.

[2] XIAO Dong-mei, RUAN Shi-gui. Global dynamics of a ratio-dependent predator-prey system[J]. J Math Biol, 2001, **43**(3): 268-290.

[3] Kuang Y, Beretta E. Global qualitative analysis of a ratio-dependent predator-prey system[J]. J Math Biol, 1998, **36**(4): 389-406.

[4] Hsu S-B, Hwang T-W, Kuang Y. Global analysis of the Michaelis-Menten type ratio-dependent predator-prey system[J]. J Math Biol, 2001, **43**(4): 221-246.

[5] 王琳琳. 自治Holling(Ⅲ)类功能性反应的捕食-食饵系统的定性分析[J]. 西北师范大学学报(自然科学版), 2005, **41**(1): 1-6.

[6] 鲁铁军, 王美娟, 刘妍. 一类基于比率的捕食-食饵系统的参数分析[J]. 数学的实践与认识, 2007, **37**(17): 98-104.

[7] Perko L. Differential Equations and Dynamical Systems[M]. 2nd Ed. Texts in Applied Mathematics 7. Moscow: Springer-Verlag, 1996, 344.

[8] Guckenheimer J, Holmes P. Nonlinear Oscillation, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields[M]. New York: Springer-Verlag, 1980.

Global Stability Analysis of a Ratio-Dependent Predator-Prey System

LU Tie-jun, WANG Mei-juan, LIU Yan

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, P. R. China)

Abstract: A ratio dependent predator-prey system with Holling type Ⅲ functional response was considered. The sufficient condition of the global asymptotic stability for the positive equilibrium and the existence of the limit cycle were given by studying the locally asymptotic stability of the positive equilibrium. At last, the condition when the positive equilibrium is no hyperbolic equilibrium was discussed by Hopf bifurcation.

Key words: ratio-dependent; global asymptotic stability; functional response; Hopf bifurcation