

材料各向异性对热弹性接触问题的影响^{*}

S·P·马瑞克¹, M·卡诺瑞², P·K·乔德辉²

(1. 戈巴丹格欣达学院 数学系, 西孟加拉邦, 印度;

2. 加尔各答大学 应用数学系, 加尔各答-700009, 印度)

(郭兴明推荐)

摘要: 研究一个绝热刚性冲头和各向异性弹性传热半空间之间的稳态平面接触问题. 由于冲头在半空间表面上的滑移, 在接触区域内摩擦生热, 并且热辐射到接触区域之外的区域. 利用 Fourier 积分变换, 将问题简化为两个奇异积分方程构成的方程组. 利用 Gauss-Jacobi 梯形求积公式, 数值地求解该方程组. 给出了各向异性和热效应的图例.

关键词: 横观各向同性介质; Fourier 变换; 摩擦热; 冲头; 热辐射; 奇异积分方程; Fredholm 积分方程

中图分类号: O343.3; O343.6 **文献标识码:** A

引 言

当两个固体间接触时, 确定介质中的应力状态, 已有多年的研究, 通常将此类问题称为接触问题. 接触问题是固体力学中一个重要的课题, 从接触意义上考虑, 解决荷载在变形体上的作用, 是该类问题的首要方法. 通常接触问题有以下两种类型:

(a) 接触物体结合在一起, 因此接触区域是已知的, 主要任务是确定介质中的应力分布.

(b) 接触的物体并不相互结合, 因此接触区域并不已知. 这类问题中, 增加了一个确定接触区域(它依赖于物体的几何特征以及系统中的荷载分布)的任务.

在荷载作用下, 接触面积可能会增加, 也可能会减少或始终保持不变. 因此接触问题可分为推进的、退缩的或不变的 3 类.

很多学者在对这类接触问题的研究中, 并没有考虑接触面上的摩擦力. 这些研究工作中, 可以举出一些: Comez 等人^[1]、Chaudhuri 和 Ray^[2-3]、El-borgi 等人^[4]、Jing 和 Liao^[5]、Fabrikant^[6]、Shvets 等人^[7]、Barik 等人^[8]. 摩擦是接触问题研究中另一个主要因素. 如果固体的接触表面不光滑, 并且由于固体间的相对运动, 接触面是变化的, 从而在接触区域上由于摩擦作用而生热, 产生的热引起接触面明显的热弹性变形, 从而影响接触压力的分布.

此类问题有几点值得注意: (i) 动热源; (ii) 固体间法向和切向荷载作用; (iii) 未知的接触面积.

已有很多研究者讨论过各向同性弹性固体间的接触问题, 如 Adams 等人^[9]、Barber^[10]、

* 收稿日期: 2007-10-15; 修订日期: 2007-12-31

作者简介: P. K. Chaudhuri(联系人, Tel: + 91-33-23373633; E-mail: pranay_chandhuri@yahoo.co.in).

本文原文为英文, 吴承平译, 张禄坤校.

Ciavarella 和 Johansson^[11]、Ciavarella 和 Barber^[12]、Ke 和 Wang^[13]、Crilitskii 和 Pauk^[14]、Gwamy 和 Pauk^[15]、Hills 和 Barber^[16-17]、Yevtushenko 和 Pauk^[18-19]、Jang^[20]、Matysiak 和 Pauk^[21]、Ma 和 Korsunsky^[22]。

近几十年来,各向异性材料已有愈来愈多的应用。如锌、镁、蓝宝石、木材、某些岩石和晶体,这些材料自然是各向异性的,还有一些人造材料,例如增强纤维复合材料,也显示出各向异性的特性。在强度、弹性和其它性能方面,复合材料都优于传统材料^[23]。增强材料可以近似看作均匀、各向异性弹性介质,由于增强的对称性,该类材料具有某种对称性。如某种玻璃纤维增强塑料,可看作横观各向同性材料。因此,固体力学问题不应该仅限于各向同性介质。各向异性材料应用的日益增加,也要求把研究工作拓展到各向异性介质。因此,本文分析研究的接触问题包含了各向异性介质中热的产生和辐射。

如果接触表面并不光滑,则接触表面上的任意点,必处于下面两种状态之一:1)“粘结(stick)”状态。该状态下没有相对运动,总切向附着摩擦力为 f_p ,其中 f 为摩擦系数, p 为法向附着摩擦力;2)“滑移(slip)”状态。该状态下存在相对运动,切向附着摩擦力大小为 f_p ,方向与瞬时滑移方向相反。Pauk^[24-26]、Pauk 等人^[27-29]、Marzedo 等人^[30]讨论了弹性各向同性材料在第2)种状态下的问题。本文的主要目的是,研究一个绝热刚性冲头,在传热的横观各向同性弹性半空间上滑动时的稳态平面接触问题。按照 Pauk^[24]的方法,我们数值地求解了包含表面温度和接触压力的两个积分方程。通过数值计算,评价了考虑材料各向异性对表面温度和接触压力的影响。

1 问题的数学描述

我们考虑一个圆柱形绝热的刚性冲头,在弹性半空间表面上以速度 V 匀速移动,移动方向取为 x -轴的负向。假设弹性半空间的材料是横观各向同性和传热的。冲头以在法向合力 P 形式压在半空间上。取运动坐标系为 (x, y) ,其 y -轴固定在冲头上,方向沿着离开半空间的法线方向,并随冲头一起运动。对于冲头来说,接触面积 $S = (a, b)$ 保持固定。显然, a 、 b 取决于作用的荷载和弹性材料的性质。常数 a 、 b 在本文中是未知的。进一步,假定 y -轴方向与半空间横观各向同性材料的各向同性平面正交。由于冲头的滑动,将引起摩擦生热,并且假定产生的热通量 $q(x)$ 仅指向冲头。设冲头中的热弹性过程是二维和稳态的。问题的几何关系示于图1。冲头的滑动,将在接触面内产生 Coulomb 摩擦,从而出现切向摩擦力。切向摩擦力处处正比于法向摩擦力 $p(x)$,比例系数为摩擦因数 f 。在接触区域之外,热辐射遵循 Newton 定律。从数学角度看,该问题可以归结为求热弹性方程的解^[31]:

(i) 平衡方程

$$\begin{cases} c_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{2}(c_{11} + c_{12}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \beta_1 \frac{\partial T}{\partial x}, \\ \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + c_{11} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1}{2}(c_{11} + c_{12}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \beta_1 \frac{\partial T}{\partial y}; \end{cases} \quad (1)$$

(ii) 热传导方程

$$k_1 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_2 \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0; \quad (2)$$

边界条件为: $y = 0$ 时,

$$k_2 \frac{\partial T}{\partial y} = \begin{cases} -q(x), & x \in \Gamma, \\ hT(x), & x \notin \Gamma, \end{cases} \quad (3)$$

$$\sigma_{yy}(x) = \begin{cases} -p(x), & x \in \Gamma, \\ 0, & x \notin \Gamma, \end{cases} \quad (4)$$

$$\sigma_{xy}(x) = \begin{cases} fp(x), & x \in \Gamma, \\ 0, & x \notin \Gamma, \end{cases} \quad (5)$$

$$q(x) = -fVp(x), \quad x \in \Gamma, \quad (6)$$

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{x}{R}, \quad x \in \Gamma, \quad (7)$$

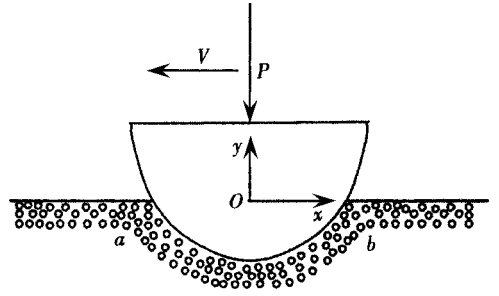


图1 接触问题的几何关系

其中热模数 $\beta_1 = (c_{11} + c_{12})\alpha_1 + c_{13}\alpha_2$, α_1, α_2 为热膨胀系数, k_1, k_2 为导热系数, u, v 为位移, $\sigma_x, \sigma_{xy}, \sigma_{yy}$ 为应力, T 为温度, p 为常压力, c_{11}, c_{12}, c_{13} 为各向异性弹性常数, $q(x)$ 为热通量, h, f 分别为辐射系数和 Coulomb 摩擦因数, R 为圆柱半径.

2 解法

对热传导方程(2)进行 Fourier 变换, 并利用边界条件(3), 有

$$T(\xi, y) = \frac{I(\xi)e^{-|\xi|y/k}}{|\xi|/k + h/k_2} \quad (8)$$

其中 T 表示 T 的 Fourier 变换, $k^2 = k^2/k_1$, 且

$$I = \frac{1}{k_2 \sqrt{2\pi}} \int_a^b [q(x) + hT(x, 0)] e^{-i\xi x} dx.$$

对方程(8)应用 Fourier 逆变换, 求得冲头中的温度, 它满足以下的积分方程:

$$T(x, y) = \frac{1}{\pi k_2} \int_a^b [q(x') + hT(x', 0)] L(x - x', y) dx', \quad (9)$$

其中

$$L(x, y) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\xi x}}{|\xi|/k + h/k_2} e^{-|\xi|y/k} d\xi. \quad (10)$$

对方程(1)、(4)、(5)使用 Fourier 变换, 表面的法向位移 v 可以表示为弹性位移 v^e 和热位移 v^{th} 的和, 即

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv^e}{dx} + \frac{dv^{th}}{dx}. \quad (11)$$

表面的弹性位移 $v^e(x)$ 可以由下式确定^[32]:

$$\frac{dv^e}{dx} = \frac{L_1}{\pi} \int_a^b \frac{p'(x_1)}{x - x_1} dx_1 - L_2 p'(x), \quad (12)$$

其中

$$p' = \frac{p}{G}, \quad L_1 = \frac{2x_1 x_2}{x}, \quad L_2 = \frac{x_1 - x_2^2 x_3 - 3x_2 x_3}{x},$$

$$x_1 = \frac{c_{11}}{G}, \quad x_2 = \frac{c_{12}}{G}, \quad x_3 = \frac{2G}{c_{11} + c_{12}}, \quad G = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}),$$

$$x = (x_3 - x_1 x_3 - 1)(x_1 - x_2^2 x_3 - 3x_2 x_3) - 2x_1 x_3(x_2 x_3 - x_1 + x_2^2 x_3).$$

表面的热位移 v^{th} 满足方程

$$\frac{dv^{\text{th}}}{dx} = \frac{L_3 \beta'}{k_2 \pi} \int_a^b [q(x') + hT(x', 0)] R_1(x - x') dx', \quad (13)$$

其中

$$\begin{cases} L_3 = \frac{x_5(x_1 - x_2^2 x_3 - 3x_2 x_3) - 2k x_4 x_1 x_3}{k x_1 x(1 - k^2)} - \frac{k}{x_1(1 - k^2)}, & \beta = \frac{\beta_1}{G}, \\ R_1(z) = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\xi z}}{|\xi|/k + h/k_2} \text{sgn}(\xi) d\xi. \end{cases} \quad (14)$$

将式(12)、(13)代入式(11), 并利用边界条件(7), 得到如下奇异积分方程:

$$\begin{aligned} -L_2 f p'(x) + \frac{L_1}{\pi} \int_a^b \frac{p'(x')}{x - x'} dx' + \\ \frac{L_3 \beta'}{k_2 \pi} \int_a^b [q(x') + hT(x', 0)] R(x - x') dx' = -\frac{x}{R}. \end{aligned} \quad (15)$$

再利用 $y = 0$ 时的积分方程(9), 导出第二类 Fredholm 型积分方程

$$T(x) - \frac{1}{\pi k_2} \int_a^b [q(x') + hT(x')] L(x - x') dx' = 0. \quad (16)$$

接触压力必须满足平衡条件

$$\int_a^b p(x) dx = -P. \quad (17)$$

为了得到无量纲形式的方程组(15)~(17), 我们引入如下记号:

$$\begin{aligned} s = \frac{x - b_0}{a_0}, \quad r = \frac{x_1 - b_0}{a_0}, \quad t = \frac{y}{a_0}, \quad a_0 = \frac{b - a}{2}, \quad b_0 = \frac{b + a}{2}, \\ G^* = \frac{a_0}{P} G, \quad p^* = \frac{a_0}{P} p = p' G^*, \quad T^* = \frac{k_2}{f P V} T, \end{aligned}$$

则无量纲形式的方程组(15)~(17)为

$$\begin{aligned} f B p^*(s) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{r - s} + 2f P e H R^*(s - r) \right] p^*(r) dr - \\ \frac{2f P e H B i}{\pi} \int_{-1}^1 T^*(r) R^*(s - r) dr = \frac{A^2 s + C P_H}{2\pi \alpha \beta} \frac{1}{P}, \quad |s| \leq 1, \end{aligned} \quad (18)$$

$$T^*(s) - \frac{B i}{\pi} \int_{-1}^1 T^*(r) L^*(s - r) dr + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 p^*(r) L^*(s - r) dr = 0, \quad (19)$$

$$\int_{-1}^1 p^*(r) dr = -1, \quad (20)$$

其中

$$\begin{cases} A = \frac{a_0}{aH}, \quad \delta = \frac{L_3 \beta'}{k_2}, \quad H = \frac{G \delta \kappa}{L_1}, \quad C = \frac{b_0}{bH} (1 - 2\alpha) A, \\ B i = \frac{h a_0}{k_2} \text{ (Biot 数)}, \quad B = \frac{L_2}{L_1} \text{ (Dunder 参数)}, \\ P e = \frac{V a_0}{2\kappa} \text{ (Peclet 数)}, \quad \kappa = \text{热扩散系数}, \\ aH = \text{相应恒温问题中的半宽}, \\ bH = \text{相应恒温问题中的接触区域位置}, \\ P_H = \text{相应恒温问题中的荷载}, \\ \alpha = \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{1}{f B}\right) + N_0, \quad \beta = -\frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{1}{f B}\right) + M_0, \end{cases} \quad (21)$$

其中 N_0 和 M_0 为任意整数, 由问题的物理性质确定.

变量 a_H 、 b_H 、 P_H 满足如下关系^[33]:

$$b_H = (1 - 2\alpha) a_H, \quad a_H^2 = \frac{P_H R L_1}{2\pi\alpha\beta G}.$$

积分方程(19)和(20)的核 $L^*(z)$ 和 $R^*(z)$ 为

$$L^*(z) = \frac{k}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ik\zeta}}{|\zeta|/k + Bi} d\zeta = k \int_0^{\infty} \frac{\cos(k\zeta)}{\zeta + Bi} d\zeta, \quad (22)$$

$$R^*(z) = \frac{ik}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ik\zeta}}{|\zeta|/k + Bi} \operatorname{sgn}(\zeta) d\zeta = k \int_0^{\infty} \frac{\sin(k\zeta)}{\zeta + Bi} d\zeta. \quad (23)$$

利用特殊函数^[34], 计算以上两个积分核

$$\begin{cases} L^*(z) = -k[\operatorname{ci}(kzBi)\cos(kzBi) + \operatorname{si}(kzBi)\sin(kzBi)], \\ R^*(z) = k[\operatorname{ci}(kzBi)\sin(kzBi) - \operatorname{si}(kzBi)\cos(kzBi)], \end{cases} \quad (24)$$

其中 $\operatorname{si}(\cdot)$ 和 $\operatorname{ci}(\cdot)$ 分别为正弦积分和余弦积分, 即

$$\operatorname{si}(u) = -\int_u^{\infty} \frac{\sin\theta}{\theta} d\theta, \quad \operatorname{ci}(u) = -\int_u^{\infty} \frac{\cos\theta}{\theta} d\theta. \quad (25)$$

显然, 函数 $R^*(z)$ 是正则的, $L^*(z)$ 有对数奇异.

3 积分方程的解

奇异积分方程(18)是一个具有未知函数 $p^*(x)$ 的 Cauchy 型奇异积分方程, 未知函数 $p^*(x)$ 可由函数 $T^*(r)$ 和某些已知函数表达. 积分方程(19)是一个具有未知函数 $T^*(r)$ 的第二类 Fredholm 型积分方程, 未知函数 $T^*(r)$ 可由函数 $p^*(r)$ 和某些已知函数表达. 设常压力 $p^*(r)$ 为

$$p^*(r) = \phi(r)(1-r)^\alpha(1+r)^\beta, \quad |r| < 1, \quad (26)$$

其中 $\phi(r)$ 为正则函数, $r = \pm 1$ 时, 既不为 0, 也不趋于无穷大; α, β 由方程(21)定义. 由于 $r = \pm 1$ 时为光滑接触, 问题的物理意义要求 α 和 β 均为正数. 这可由方程(21)中取 $N_0 = 0$ 和 $M_0 = 1$ 来实现, 即 κ (奇异积分方程(18)的指数) = $-(\alpha + \beta) = -(N_0 + M_0) = -1$. 利用 Krenk^[35] 提供的方法, 得到方程(18)~(20)的离散化形式:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^N \phi(r_k) W_k^N \left[\frac{1}{r_k - s_m} + 2f \operatorname{PeHR}^*(s_m - r_k) \right] - \\ \frac{2f \operatorname{PeHBi}}{\pi} \sum_{k=1}^N \frac{2}{N} T^*(\rho_k) R^*(s_m - r_k) = \frac{A^2 s_m + C P_H}{2\pi\alpha\beta} \frac{P}{P}, \\ m = 1, \dots, N+1, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} T^*(\rho_m) - \frac{Bi}{\pi} \sum_{k=1}^N T^*(\rho_k) \Delta_{km} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^N \phi(r_k) W_k^N L^*(\rho_m - r_k) = 0, \\ m = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\sum_{k=1}^N W_k^N \phi(r_k) = -1, \quad (29)$$

其中

$$\begin{aligned} P_N^{(\alpha, \beta)}(r_k) = 0, \quad W_k^N = -2^\kappa \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} \frac{P_{N-k}^{(-\alpha, -\beta)}(r_k)}{P_N^{(\alpha, \beta)'}(r_k)}, \quad k = 1, \dots, N, \\ P_{N-k}^{(-\alpha, -\beta)}(s_m) = 0, \quad m = 1, \dots, N+1, \end{aligned}$$

$$\rho_k = -1 + \frac{2k-1}{N}, \quad k = 1, \dots, N,$$

$$\Delta_{km} = \frac{\pi}{2Bi} [\text{sgn}(X_1) - \text{sgn}(X_2)] - \frac{1}{Bi} [R^*(X_1) - R^*(X_2)],$$

$$X_1 = \frac{2}{N}(m - k + 0.5), \quad X_2 = \frac{2}{N}(m - k - 0.5), \quad k, m = 1, \dots, N,$$

$P_N^{(\alpha, \beta)}(\cdot)$ 是指数为 α, β 的 N 阶 Jacobi 多项式. 关系式 (27) ~ (29) 构成了 $2N + 2$ 阶线代数方程组, 确定 $2N + 1$ 个未知数 $\phi(r_k), T^*(\rho_k)$ ($k = 1, \dots, N$) 和 P_H/P . 对于方程 (27), 在 $N + 1$ 种可能的配置中选择 N 种是足够的. 与实际应用是一致的, 额外的方程用于积分区间的归一化.

4 数值结果和讨论

本文主要研究热弹性接触问题中材料各向异性的影响. 本文问题的解, 需要求解方程组 (27) ~ (29). 只需采用常规的计算方法, 求解上述代数方程组的数值解. 在我们的数值计算中, 考虑材料的参数值是横观各向同性的. 材料的弹性常数列于表 1^[31, 36-37].

表 1 3种横观各向同性材料的基本常数

参数	材料		
	蓝宝石	镁	石墨
$c_{11}/(\text{N/m}^2)$	4.96×10^{11}	5.974×10^{10}	1.628×10^{11}
$c_{12}/(\text{N/m}^2)$	1.64×10^{11}	2.624×10^{10}	0.362×10^{11}
k	1.029	1.6	1.056

如同文献[24], 我们假设横观各向同性情况时的接触区域与恒温情况相同, 即 $a_0/a_H = b_0/b_H = 1$. 计算参数选用 f, Pe, H, Bi . 本文取 $f = 0.4, fPeH = 0.5$ ^[24]. 横观各向同性石墨材料, 在不同 Biot 值时的表面温度的变化示于图 2. 可以看到, Biot 数的变化, 即热辐射的变化, 引起了表面温度的变化. 图 2 表明了表面温度的变化特性. 图 3 和图 4 显示了对两种 Biot 值, 材料的各向异性对表面温度的影响. 图 5 示出, 在各向同性和横观各向同性半空间中, P_H/P 值随参数 $fPeH$ 的增大而线性减小, 也表明了材料各向异性的影响. 图 6 示出, 在接触区域上, 材料各向异性对归一化应力分布的影响. 图 7 示出, 在接触区域上, 温度对归一化应力分布的影响.

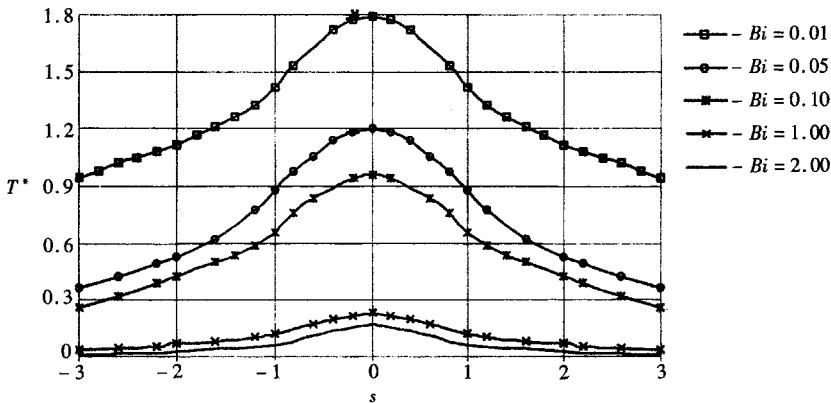


图 2 $fPeH = 0.5$ 时, 横观各向同性半空间中, 不同 Biot 值时的表面温度

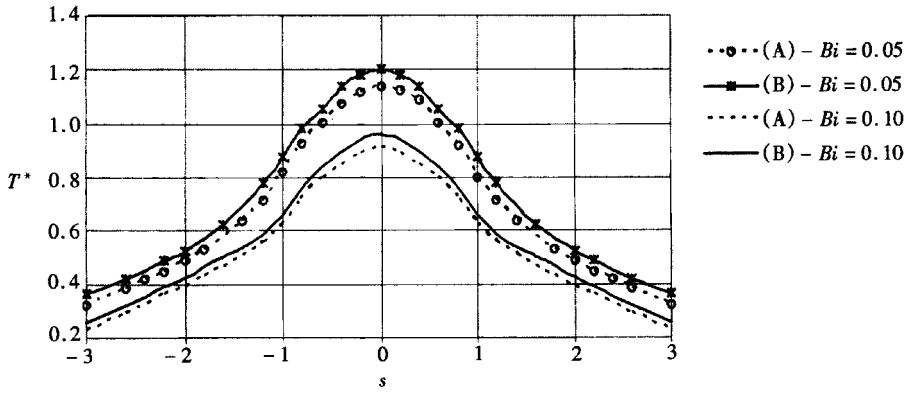


图3 各向同性(A)和横观各向同性(B)半空间中,表面温度的比较

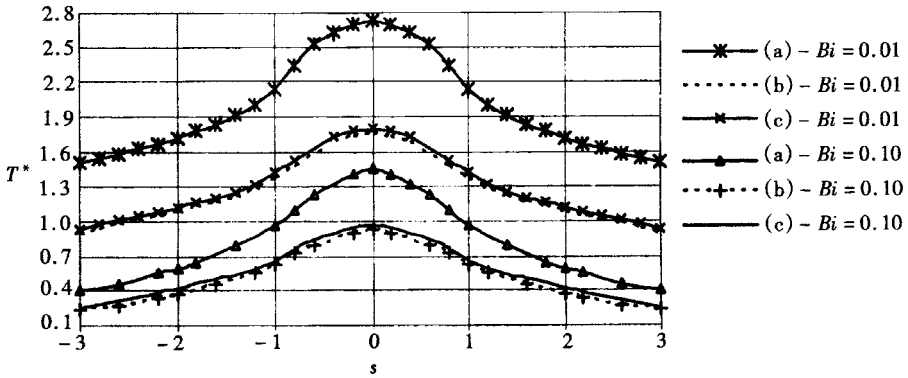


图4 $fPeH = 0.5$ 时,不同横观各向同性半空间中((a) 镁; (b) 蓝宝石; (c) 石墨), 在不同 Biot 值时的表面温度

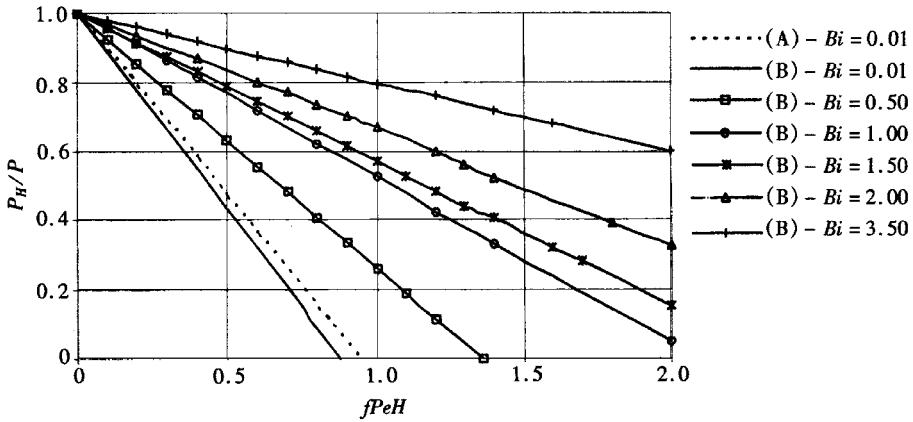
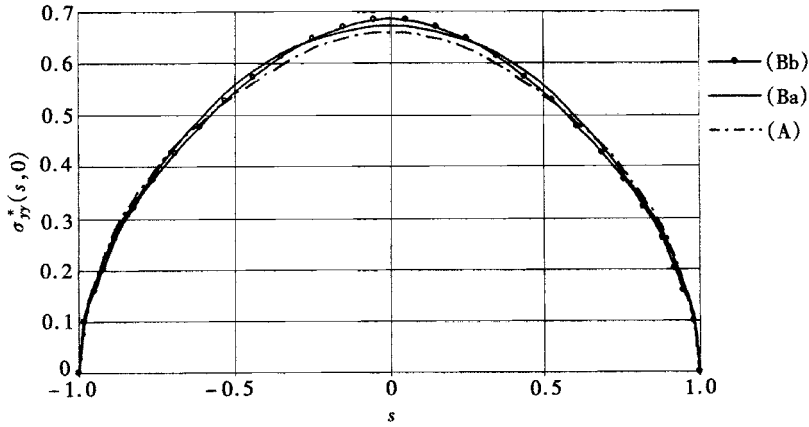


图5 各向同性(A)和横观各向同性(B)半空间中, Biot数和材料各向异性对 P_H/H 的影响

5 结 论

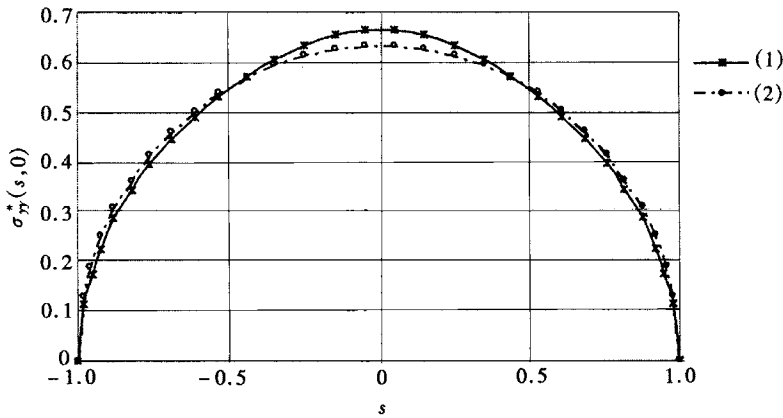
在适当的辐射条件下, 本文研究了刚性绝热冲头在横观各向同性半空间上的滑移问题, 得到如下结论:

- (a) 在半空间表面和内部, 温度随辐射的增大而下降.



((A) 各向同性; (Ba) 石墨; (Bb) 镁)

图6 接触区域上, 材料的各向异性对法向应力分布的影响



((1) 摩擦接触生热; (2) 光滑接触)

图7 接触区域上, 温度对法向应力分布的影响

(b) 图3表明, 各向异性材料对表面温度分布的影响高于各向同性介质.

(c) 图5给出 P_H/P 和 $fPeH$ 之间的关系表明, P_H/P 随 $fPeH$ 的增大而减小.

(d) 图6给出接触区域法向应力的分布, 在原点附近各向异性介质略大于各向同性介质, 而在其它部分则相反.

(e) 温度对法向应力的影响示于图7. 在原点附近, 有摩擦力作用时, 摩擦产生的温度效应引起更大的应力, 而在接触区域的其它部分则相反.

致谢 作者真诚地感谢审稿人提出的宝贵意见.

[参 考 文 献]

- [1] Comez I, Birinci A, Erdol R. Double receding contact problem for a rigid stamp and two elastic layers [J]. European J Mech A Solids, 2004, 23(6): 909-924.
- [2] Chaudhuri P K, Ray S. Receding contact between an orthotropic layer and an orthotropic half-space [J]. Archives of Mechanics, 1998, 50(4): 743-755.
- [3] Chaudhuri P K, Ray S. Receding axisymmetric contact between a transversely isotropic layer and a transversely isotropic half-space [J]. Bull Calcutta Math Soc, 2003, 95(2): 151-164.

- [4] El-borgi S, Abdelmoula R, Keer L. A receding contact plane problem between a functionally graded layer and a homogeneous substrate[J]. *Internat J Solids and Structures*, 2006, **43**(12): 658-674.
- [5] Jing H S, Liao M L. An improved finite element scheme for elastic contact problems with friction[J]. *Computers and Structures*, 1990, **35**(5): 571-578.
- [6] Fabrikant V I. Elementary solution of contact problems for a transversely isotropic layer bonded to a rigid foundation[J]. *Z Angew Math Phys*, 2006, **57**(3): 464-490.
- [7] Shvets R M, Martyniak R M, Kryshfovych A A. Discontinuous contact of an anisotropic half-plane and a rigid base with disturbed surface[J]. *Internat J Engrg Sci*, 1996, **34**(2): 183-200.
- [8] Barik S P, Kanoria M, Chaudhuri P K. Contact problem for an anisotropic elastic layer lying on an anisotropic elastic foundation under gravity[J]. *J Indian Acad Math*, 2006, **28**(1): 205-223.
- [9] Adams C G, Barber J R, Ciavarella M, et al. A paradox in sliding contact problems with friction[J]. *J Appl Mech*, 2005, **72**(1): 1-3.
- [10] Barber J R. Some thermoelastic contact problems involving frictional heating[J]. *Quart J Mech Appl Math*, 1976, **29**(1): 1-13.
- [11] Ciavarella M, Johansson L, Afferrante L, et al. Interaction of thermal contact resistance and frictional heating in thermoelastic instability[J]. *Internat J Solids and Structures*, 2003, **40**(21): 5583-5597.
- [12] Ciavarella M, Barber J R. Stability of thermoelastic contact for a rectangular elastic block sliding against a rigid wall[J]. *European J Mech A Solids*, 2005, **24**(3): 371-376.
- [13] KE Liao-liang, WANG Yue-sheng. Two dimensional sliding frictional contact of functionally graded materials[J]. *European J Mech A Solids*, 2007, **26**(1): 171-188.
- [14] Grilitskii D V, Pauk V I. The plane contact problem of steady thermoelasticity taking heat generation into account[J]. *J Appl Math Mech*, 1997, **61**(6): 1007-1012.
- [15] Gwamy M, Pauk V J. Plane contact problem involving frictional heating for a thermoelastic wedge[J]. *J Thermal Stresses*, 2002, **25**(6): 573-583.
- [16] Hills D A, Barber J R. Steady motion of an insulating rigid flat-ended punch over a thermally conducting half-plane[J]. *Wear*, 1985, **102**(1/2): 15-22.
- [17] Hills D A, Barber J R. Steady sliding of a circular cylinder over a thermally conducting half-plane[J]. *Internat J Mech Sci*, 1986, **28**(9): 613-622.
- [18] Yevtushenko A A, Pauk V J. The non-stationary contact problem for rough bodies taking heat generation by friction into account[J]. *J Appl Math Mech*, 1996, **60**(4): 687-692.
- [19] Yevtushenko A A, Pauk V J. Steady state frictional heat generation on the periodical sliding contact[J]. *Mathematical Methods and Physicomechanical Fields*, 1999, **42**(1): 95-99.
- [20] Jang Y H. Effects of thermal contact resistance on transient thermoelastic contacts for an elastic foundation[J]. *J Appl Mech*, 2005, **72**(6): 972-977.
- [21] Matysiak S J, Pauk V J. Plane contact problem for periodic laminated composite involving frictional heating[J]. *Archive of Applied Mechanics*, 1995, **66**(1): 82-89.
- [22] Ma L F, Korsunsky A M. Fundamental formulation for frictional contact problems of coated systems[J]. *Internat J Solids and Structures*, 2004, **41**(11/12): 2837-2854.
- [23] Lekhnitskii S G. *Theory of Elasticity of an Anisotropic Body* [M]. Moscow: Mir Publishers, 1981.
- [24] Pauk V J. Plane contact problem involving heat generation and radiation[J]. *J Theory Appl Mech*, 1994, **32**(4): 829-839.
- [25] Pauk V J. Plane contact problem for a layer involving frictional heating[J]. *Internat J Heat and Mass Transfer*, 1999, **42**(14): 2583-2589.
- [26] Pauk V. Contact problem involving frictional heating for rough half-space[J]. *J Appl Mech*, 2004, **71**

- (2): 287-290.
- [27] Pauk V, Wozniak M. Frictional heating effects in the plane contact of a layer and a rigid flat punch [J]. *J Tech Phys*, 2003, **44**(3): 237-244.
- [28] Pauk V, Zastrau B. 2D rolling contact problem involving frictional heating[J]. *Internat J Mech Sci*, 2002, **44**(12): 2573-2584.
- [29] Pauk V J, Yevtushenko A. A frictional heating in a sliding contact of two thermoelastic bodies[J]. *Internat J Solids and Structures*, 1997, **34**(12): 1505-1516.
- [30] Marzeda J, Pauk V, Wozniak M. Contact of a rigid body flat punch with a wedge supported by the winkler foundation[J]. *J Theory Appl Mech*, 2001, **39**(3): 563-575.
- [31] Dhaliwal R S, Singh A. *Dynamic Coupled Thermoelasticity* [M]. India: Hindustan Publishing Co, 1980.
- [32] Vorovich I I, Aleksandov V A, Babeshko A. *Non-Classical Contact Problem of Elasticity* [M]. Moscow: Nauka, 1974.
- [33] Timoshenko S P, Goodier J N. *Theory of Elasticity* [M]. Maidenhead: McGraw-Hill, 1934.
- [34] Abramowitz M, Stegun I. *Handbook of Mathematical Functions* [M]. New York: National Bureau of Standards, 1964.
- [35] Krenk S. On quadrature formulas for singular integral equations of the first and the second kind[J]. *Quart Appl Math*, 1975, **33**(3): 225-232.
- [36] S·P·马瑞克, M·卡诺瑞, P·K·乔德辉. 无限横观各向同性弹性圆柱中刚性圆盘的扭转振动[J]. *应用数学和力学*, 2006, **27**(7): 799-804.
- [37] Noda N, Ashida F. Transient thermoelastic fields in a transversely isotropic infinite solid with a penny-shaped crack[J]. *J Appl Mech*, 1987, **54**(4): 854-860.

Effect of Anisotropy on Thermoelastic Contact Problem

Sakti Pada Barik¹, M. Kanoria², P. K. Chaudhuri²

(1. Department of Mathematics, Gobardanga Hindu College,
Khantura, 24-Parganas (N), West Bengal, India;

2. Department of Applied Mathematics, University of Calcutta,
92, A. P. C. Road, Kolkata - 700 009, India)

Abstract: The stationary plane contact of an insulated rigid punch and a half space which is elastically anisotropic but thermally conducting are concerned with. The frictional heat generation inside the contact region due to the sliding of the punch over the half-space surface and the heat radiation outside the contact region are taken into account. With the help of Fourier integral transform the problem was reduced to a system of two singular integral equations. The equations were solved numerically by using Gauss-Jacobi and trapezoidal-rule quadratures. The effects of anisotropy and thermal effects were shown graphically.

Key words: transversely isotropic medium; Fourier transform; frictional heating; punch; heat radiation; singular integral equation; Fredholm integral equation