应用数学和力学, 第 29 卷 第 4 期
2008 年 4 月 15 日出版

Applied Mathematics and Mechanics
Vol. 29, No. 4, Apr. 15, 2008

文章编号: 1000-0887(2008) 04-0469-08

应用数学和力学编委会, ISSN 1000-0887

超 Lévy 过程的粒子的最大速度

林正炎[1], 程宗毛[1,2]

(1. 浙江大学 数学系, 杭州 310027;
2. 杭州电子科技大学 应用数学与工程计算研究所, 杭州 310018)

(周哲玮推荐)

摘要: 引进了超 Lévy 过程, 研究了在它的域(range)和支撑中粒子的最大速度问题. 历史的超 Lévy 过程的状态是一个轨道集的测度. 研究了在给定的时间集 E 里全部粒子的最大速度, 结果表明它是 E 的 packing 维数的函数. 最后还计算了在历史的超 Lévy 过程的域和支撑中的 α- 快轨道集的 Hausdorff 维数.

关 键 词: 超 Lévy 过程; 连续模; Hausdorff 维数; Lévy 过程; α- 快轨道; Brown 运动

中图分类号: O211.6 文献标识码: A

1 引言和主要结果

设 $w = \{w(t), 0 \le t \le 1\}$ 是 Brown 运动. 它的轨道是几乎确定连续和几乎确定无处可导的. 这就引发人们考虑以 Brown 轨道运动的粒子的最大速度问题. 以下的 Lévy 的一致连续模定理回答了这个问题

$$\lim_{h \to 0} \sup_{0 \le t_1 \le t_2 \le 1, t_2 - t_1 \le h} \frac{|w(t_2) - w(t_1)|}{\sqrt{h \ln(1/h)}} = \sqrt{2} \quad \text{a.s.} \tag{1}$$

由 Dawson 和 Perkins[1] 引进的超 Brown 运动是一个连续的 Markov 过程 $\mathscr{X} = \{\mathscr{X}_t, t \ge 0\}$, 它在时刻 t 的状态是一个由在最终寿命 τ 停止的轨道产生的空间

$$X = \{(w, \tau): w: [0, \infty) \to R^d \text{ 连续且对所有 } s \ge \tau \ge 0 \text{ 有 } w(s) = w(\tau)\}$$

上的 Wiener 测度. 有时候把 (w, τ) 简写成 w 或 $w(\tau)$. 实际上, 状态 $\mathscr{X}_t$ 是一个以 $\tau = t$ 为终止时间的运动轨道集为支撑的随机测度.

在超 Brown 运动中, 通常粒子是以 Brown 轨道运动的, 因此依据(规范)样本测度 $\mathscr{X}_t$ 选取的轨道的后验分布是 Wiener 测度. 由式(1), 对 $t > 0$, $\mathscr{X}_t$- 几乎每个轨道 w, 几乎确定地有,

$$\sup_{s > 0} \lim_{h \to 0} \sup \frac{|w(s) - w(s - h)|}{\sqrt{h \ln(1/h)}} = \sqrt{2} \tag{2}$$

(历史的) 超 Brown 运动的域(range)是由下式定义的:

收稿日期: 2007-02-01; 修订日期: 2008-02-25
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10571159); 教育部博士点专项基金资助项目(20060335032)
作者简介: 林正炎(1941—), 男, 杭州人, 教授, 博士生导师;
程宗毛(1964—), 男, 江西玉山人, 副教授, 博士(联系人. Tel: +86-571-88235051;
E-mail: zmcheng@hdu.edu.cn).

$$\text{range}\,\mathscr{X} = \underset{>0}{} \ \overline{\underset{t>}{} \text{supp}\,\mathscr{X}_t}, \tag{3}$$

它是一个不可数的轨道集 一个重要的问题是在超 Brown 运动的域中是否可能存在具有较高速度的异常轨道 Dawson 和 Perkins[1] 给了这个问题的肯定回答, 他们证明存在某些特殊的粒子, 它们具有比一般 Brown 运动更快的速度 更准确地说, 几乎确定地有

$$\sup_{s>0}\ \sup_{(w,\ )\ \ \text{range}\,\mathscr{X}}\ \limsup_{h\ \ 0} \frac{|w(s)-w(s-h)|}{\sqrt{h\ln(1/h)}} = \ 2 \tag{4}$$

类似地, Verzani[2] 获得如下结果: 在任意固定的时刻 $t>0$, 对于 $\{\mathscr{X}_t \quad 0\}$, 几乎确定地有

$$\sup_{w\ \ \text{range}\,\mathscr{X}}\ \limsup_{h\ \ 0} \frac{|w(t)-w(t-h)|}{\sqrt{h\ln(1/h)}} = \sqrt{2} \tag{5}$$

按 Brown 运动轨道运动的粒子的最大速度问题已经在文献[2-7]中进行了深刻的研究 为了对出现在式(2)、(4)以及(5)右边的值有更为深刻的理解, M rters 在文献[8]中, 对于时间的 Borel 集 $E \quad (0,\ \ )$, 探求了在 E 中所有时刻全部粒子的最大速度, 指出它是一个与 E 的 packing 维数(记为 $\dim_p(E)$)有关的量 不熟悉这方面基本知识的读者请参阅文献[9] 对于 $d \quad 1$ 的 $\mathscr{X}$ 和 Borel 集 $E \quad (0,t)$, M rters[8] 把文献[10-11]中的技术应用到超过程情形中去, 证明了关于 $\{\mathscr{X}_t \quad 0\}$- 几乎确定地有

$$\sup_{s\ \ E}\ \sup_{w\ \ \text{range}\,\mathscr{X}}\ \limsup_{h\ \ 0} \frac{|w(s)-w(s-h)|}{\sqrt{h\ln(1/h)}} = \sqrt{2+\dim_p(E)} \tag{6}$$

令 $\mathscr{R} = \overline{\underset{t\ \ E}{} \text{supp}\,\mathscr{X}_t}$, dim 表示距离空间的 Hansdorff 维数 M rters[8] 给出了在 E 中的快轨道集的维数的界: 对 $a \quad [0, \sqrt{2+2\dim_p(E)}]$,

$$2+2\dim(E)-a^2$$

$$\dim\left\{w \quad \mathscr{R}(E): \limsup_{h\ \ 0} \frac{|w(\ \ )-w(\ \ -h)|}{\sqrt{h\ln(1/h)}} \quad a\right\} \quad 2+2\dim_p(E)-a^2$$

但是这些结果仅仅是关于 Brown 运动的 一个自然的问题是: 这种特殊的过程能否被更一般的过程(比如 L vy 过程)取代而获得类似的结果 在本文里, 我们首先回顾关于 L vy 过程的某些基本事实, 它的局部时以及 Brown 运动和 L vy 过程的关系; 然后引进超 L vy 过程的域和支撑的概念; 我们的目的是将上述关于 Brown 运动的结果推广到 L vy 过程上去

一个取值于 R^d 的随机过程 $x = \{x(t); t \quad 0\}$, 如果它具有平稳和独立增量, 而且 $t \mid x(t)$ 以概率连续并具有由如下 L vy-Khintchine 公式给出的特征函数:

$$E\exp\{i \quad , x(t)\} = \exp\{-t \quad (\ \ )\}, \qquad R^d, \tag{7}$$

其中

$$(\ \ ) = i\ a, \quad + \frac{1}{2} \quad , \quad + \int_{R^d} [1 - e^{i\ u,} \quad + i\ u, \quad 1\{|u| \quad 1\}] \quad du, \tag{8}$$

这里 $a \quad R^d$ 是一个固定向量, $u = (u_1, \quad , u_d) \quad R^d$, 是一个 $d \quad d$ 非负定矩阵, 是一个 $R^d \setminus \{0\}$ 上的满足

$$\int_{R^d} (1 \qquad u \quad ^2) \quad du < \tag{9}$$

的 Borel 测度, 我们称此过程为 L vy 过程, 其中 称为 $\{x(t), t \quad 0\}$ 的 L vy 指数, 而 称为 L vy 测度

关于 L vy 过程有以下众所周知的结论(参见文献[12])

引理 1.1 对取值于 R^d 的 L vy 过程 $x = \{x(t), t \quad 0\}$, 存在一个轨道几乎确定右连续且

有左极限的可分修正 x^*

因此总可以认为 L vy 过程是一个轨道几乎右连续且有左极限的过程

设 y_1, , y_n, 是在 $R^d \setminus \{0\}$ 上分布都为 v 的独立随机变量, $S(n) = y_1 + \quad + y_n$ 是相应的随机游动 引进一个参数为 且与 y_n 独立的 Poisson 过程 $N = \{N(t), t \quad 0\}$ 由于指数分布具有无记忆性, 易证时间连续过程

$$e(t) = \begin{cases} y_n, & 若\ N(t-) < n = N(t), \\ 0, & 否则 \end{cases}$$

是一个具有特征测度 v 的 Poisson 点过程, 其中 0 是一个孤立点 时变随机游动

$$S\ N(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} y_i = \sum_{0 \quad s \quad t} e(s) \qquad (t \quad 0)$$

是一个 L vy 过程, 称为具有 L vy 测度 v 的复合 Poisson 过程 且有

$$E(\exp\{i \quad , S\ N(t)\}) = \exp\{- \ t \ (\ )\}, \qquad R^d,$$

其中

$$(\ ) = \int_{R^d} (1 - e^{i \ , u}) v\, du$$

引理 1.2 设 $a \quad R^d$, 半正定对称矩阵 , 常数 和一个 $R^d \setminus 0$ 上的分布 v 假定测度 $= \quad v$ 满足式(9) 对于每个 R^d, 记

$$(\ ) = i\ a, \ + \frac{1}{2} \ , \qquad + \int_{R^d} [1 - e^{i\ u,} + i\ u, \quad 1\{|u| \quad 1\}] \quad du$$

那么存在唯一的概率测度 P, 在此测度下, 具有平稳和独立增量的过程 x 是一个带有特征指数 的 L vy 过程 而且 x 的跳过程 $x = \{ \quad x(t), t \quad 0\}$, 是一个 具有特征测度 的 Poisson 点过程

此引理的证明请参阅文献[12]

考虑一个取值于 R^d 的 Brown 运动 $W = \{W(t); t \quad 0\}$ 设 Q 是一个使 $Q\ Q = \quad$ 成立的矩阵, 再令 $x_1(t) = \quad QW(t) - At(t \quad 0)$, 其中

$$A = a + \left(\int_{R^d} u_1 1\{|u| \quad 1\} \quad du, \quad , \int_{R^d} u_d 1\{|u| \quad 1\} \quad du \right)$$

由 W 的 Gauss 性, x_1 是一个具有特征指数

$$_1(\ ) = i\ A, \ + \frac{1}{2}$$

的 L vy 过程 设 x_2 是一个具有特征指数

$$_2(\ ) = \int_{R^d} (1 - e^{i \ , u}) \quad du \tag{10}$$

的 L vy 过程, 而且 x_2 和 x_1 是相互独立的 部分和 $\sum_{0 \quad s \quad t} x(s)\ (t \quad 0)$ 是一具有平稳独立增量、样本轨道右连续且存在左极限的随机过程 从文献[12] 和引理 1.2 知, $\sum_{0 \quad s \quad t} x(s)$ 是一个 L vy 过程(实际上, 它是一个复合 Poisson 过程, 这是因为记 x 的跳的数目的过程是一个参数为 的非退化的 Poisson 过程) , 它的特征指数由式(10) 给出 因此我们有

$$x_2(t) \overset{d}{=} \sum_{0 \quad s \quad t} x(s) \tag{11}$$

和

$$x \overset{d}{=} x_1 + x_2, \tag{12}$$

其中 $\overset{d}{=}$ 表示以分布相等

Blumenthal 和 Getoor[13] 引进 L vy 过程 $x(t)$ 的下指数 ^{low}

$$^{low} = \sup\left\{ \quad 0: \lim \quad ^{-} \mathrm{Re} \quad (\quad) = \quad \right\}$$

设 $x(t)$ 是一个取值于 R^d 定义在 $\mathbf{R}_+$ 上的Borel 向量, $_N(\quad)$ 表示在 R_+^N 上的Lebesgue测度 对于任意 Borel 集 $T \quad \mathbf{R}$, x 在 T 上的占有时测度定义为

$$_T(\quad) = \quad _1\left\{ t \quad T: x(t) \quad \right\}$$

如果 $_T$ 关于 $_d$ 是绝对连续的, 我们就说 $x(t)$ 在 T 上有局部时, 并把它定义作 $_T$ 关于 $_d$ 的 Radon-Nikodym 导数, 记为 $L(\quad, T)$ 也就是说

$$L(u, T) = \frac{\mathrm{d} \; _T}{\mathrm{d} \; _d}(u), \qquad u \quad R^d,$$

其中 u 是所谓的空间变量, T 是时间变量 有时将 $L(u, [0, t])$ 简写成 $L(u, t)$

由关于鞅和单调类的理论, 局部时有满足下列占有时密度公式的可测修正: 对每个 Borel 集 $T \quad \mathbf{R}$ 以及每个可测函数 $f: R^d \quad \mathbf{R}$

$$_T f(x(t))\mathrm{d}t = \quad _{R^d} f(u) L(u, T)\mathrm{d}u \tag{13}$$

假如对矩形 $T = [a, a + h]$, 我们能够选取 $R^d \quad [a, a+h] \quad (u, t) \mid \quad L(u, [a, a+t])$ 的一个连续修正, 就说 x 在 T 上有联合连续的局部时 具有联合连续性的局部时 $L(u, \quad)$ 能够延拓成支撑在水平集

$$x_T^{-1}(u) = \left\{ t \quad T: x(t) = u \right\}$$

上, 具有更多优良特性的 Borel 测度

从 Khoshnevisan 和 Xiao[14] 知, 如果

$$_{R^d}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1 + \quad (u)} \right) \mathrm{d}u < \quad , \tag{14}$$

那么 L vy 过程 x 在任意区间 I 上都有均方可积的局部时

Khoshnevisan, Xiao 和 Zhong[15] 证明: 如果

$$^{low} > \quad d, \tag{15}$$

那么对于任意区间 $T = [a, a + h]$, x 几乎确定地有联合连续的局部时 $L = \left\{ L(u, t); (u, t) \quad R^d \quad [a, a + h] \right\}$

现在引进超 L vy 过程 $\mathscr{Y} = \left\{ \mathscr{Y}_t, t \quad 0 \right\}$ 它是一个 Markov 过程, 它在时刻 t 的值为由以下终止时刻为 的停止轨道 x 组成的空间上的 L vy 测度:

$$Y = \left\{ (x, \quad): x: [0, \quad) \; y \; R^d \text{ 右连续且有左极限, 对 } s \setminus \; N \setminus \; 0 \text{ 有 } x(s) = x(N) \right\} 1$$

有时侯把 (x, N) 简写为 x 或 $x(\#) 1$ 在超 L vy 过程中, 通常的粒子都按 L vy 过程的轨道运动, 它的样本测度 $\mathscr{Y}_t$ 是 L vy 测度 1 超 L vy 过程的状态 $\mathscr{Y}_t$ 是一个定义在以寿命为 N= t 的轨道集为支撑的 Y 上的随机测度 1 直观地说, supp $\mathscr{Y}_t$ 里的每个轨道终止于时刻 t 1 因此, 这个模型描述所有粒子的单个运动 1 任何 xc, xd I supp $\mathscr{Y}_t$ 都来自于 $x: [0, \quad] \;] \; y \; R^d$ 在时刻 N= $\sup\left\{ r: \text{在 } [0, r] \text{ 上 } xc = xd \right\}$ 的分支: 对 s [N, 有 $x(s) = xc(s) = xd(s)$; 对 $s \setminus N$, 有 $x(s) = x(N)$ 1 以下定理的第 1 个结果相应于超 Brown 运动的 L vy 连续模定理 1 第 2 个结果表明某些特殊的粒子运动速度会比一般的 L vy 粒子快 1 在超 Brown 运动的情形, 类似的结果被 Dawson 和 Perkins[1] 所证明 1 第 3 个结论是关于在给定的时间集 E 中的一个特殊时刻所有粒子的最大速

度问题。在超 Brown 运动的情形，类似的结果由 Verzani[2] 证明。类似于式(3)，(历史的)超 Lévy 过程的域(range)由下式定义：

$$\mathrm{range}\,\mathscr{Y}=\bigcap_{\varepsilon>0}\overline{\bigcup_{t>\varepsilon}\mathrm{supp}\,\mathscr{Y}_t}。$$

对于满足式(9)、(14)和(15)的 Lévy 过程 x，有以下定理。

定理 1.1　对任意 $t>0$，几乎确定地对于 $\mathscr{Y}_t$-几乎每个轨道 x 有

$$\sup_{s>0}\lim_{h\downarrow 0}\sup\frac{|x(s)-x(s-h)|}{\sqrt{h\ln(1/h)}}=\sqrt{2K},\tag{16}$$

其中 $K=\max_{1\le i\le d}k_i$，$k_1,\dots,k_d$ 是 2 的特征值。而且几乎确定地有

$$\sup_{s>0}\sup_{x\in\mathrm{range}\,\mathscr{Y}}\lim_{h\downarrow 0}\sup\frac{|x(s)-x(s-h)|}{\sqrt{h\ln(1/h)}}=2\sqrt{K}。\tag{17}$$

而在任何固定时刻 $t>0$，几乎确定地在 $\{\mathscr{Y}_t\neq 0\}$ 上，有

$$\sup_{x\in\mathrm{range}\,\mathscr{Y}}\lim_{h\downarrow 0}\sup\frac{|x(t)-x(t-h)|}{\sqrt{h\ln(1/h)}}=\sqrt{2K}。\tag{18}$$

以下的定理 1.2 和 1.3，分别给出了在给定时期内粒子的最大速度和维数谱。在超 Brown 运动的情形，类似的结果由 Mörters[8] 给出。

定理 1.2　设 $E\subset(0,t)$ 是一个 Borel 集。那么，几乎确定地在 $\{\mathscr{Y}_t\neq 0\}$ 上，有

$$\sup_{s\in E}\sup_{x\in\mathrm{range}\,\mathscr{Y}}\lim_{h\downarrow 0}\sup\frac{|x(s)-x(s-h)|}{\sqrt{h\ln(1/h)}}=\sqrt{(2+2\dim_{\mathrm{p}}(E))K}。\tag{19}$$

定理 1.3　设 $E\subset(0,t)$ 是一个固定的闭集，维数 $d\ge 2$。那么，几乎确定地在 $\{\mathscr{Y}_t\neq 0\}$ 上，对任何 $a\in[0,\sqrt{(2+2\dim_{\mathrm{p}}(E))K}]$，有

$$\begin{aligned}2+2\dim(E)-Ka^2&\le\\ \dim\Big\{(x,N)\in\mathscr{R}(E):\lim_{h\downarrow 0}\sup\frac{|x(N)-x(N-h)|}{\sqrt{h\ln(1/h)}}\ge a\Big\}&\le\\ 2+2\dim_{\mathrm{p}}(E)-Ka^2&。\end{aligned}\tag{20}$$

如果 $\dim_{\mathrm{p}}(E)<Ka^2/2-1$，那么，$a$-快轨道集

$$\Big\{(x,N)\in\mathscr{R}(E):\lim_{h\downarrow 0}\sup\frac{|x(N)-x(N-h)|}{\sqrt{h\ln(1/h)}}\ge a\Big\}=\varnothing。\tag{21}$$

特别地，对于任何 $a\in[0,2\sqrt{K}]$，几乎确定地有

$$\dim\Big\{(x,N)\in\mathrm{range}\,\mathscr{Y}:\lim_{h\downarrow 0}\sup\frac{|x(N)-x(N-h)|}{\sqrt{h\ln(1/h)}}\ge a\Big\}=4-Ka^2。\tag{22}$$

此外对于任意 $t>0$，$a\in[0,\sqrt{2K}]$，在 $\{\mathscr{Y}_t\neq 0\}$ 上，几乎确定地有

$$\dim\Big\{(x,N)\in\mathrm{supp}\,\mathscr{Y}_t:\lim_{h\downarrow 0}\sup\frac{|x(N)-x(N-h)|}{\sqrt{h\ln(1/h)}}\ge a\Big\}=2-Ka^2。\tag{23}$$

2　定理的证明

为了证明这些定理，需要一些引理。

引理 2.1　设 x_2 是由式(11)定义的 Lévy 过程。那么对任意 $s\in(0,\infty)$，有

$$\lim_{h\downarrow 0}\frac{|x_2(s)-x_2(s-h)|}{\sqrt{h\ln(1/h)}}=0,\qquad \text{a.s.}\tag{24}$$

证明　由式(5)，有

$$x_2(s)-x_2(s-h)\overset{d}{=}\sum_{s-h<t\le s}\Delta x(t)。$$

x 和 Poisson 过程 $N=\{N(t),t\ge 0\}$ 都是具有平稳和独立增量的过程,因此有

$$N(s)-N(s-h)\overset{d}{=}N(h)-N(0)\overset{d}{=}N(h),\tag{25}$$

$$x_2(s)-x_2(s-h)\overset{d}{=}\sum_{n=1}^{N(h)}\Delta x(t_n),\tag{26}$$

其中 t_n 是 $x(\cdot)$ 在 $[0,h]$ 内的第 n 个间断点。这时有

$$P\left\{\frac{\left|\sum\limits_{s-h\le t\le s}\Delta x_2(t)\right|}{\sqrt{h\ln\left(\frac{1}{h}\right)}}>\varepsilon\right\}\le P\left\{\frac{\sum\limits_{n=1}^{N(h)}|\Delta x(t_n)|}{\sqrt{h\ln\left(\frac{1}{h}\right)}}>\varepsilon\right\}\le$$

$$P\{N(h)\ne 0\}=1-\exp(-\lambda h)=\lambda h+o(h),\qquad h\to 0。$$

设 $h_n=n^{-2}$,那么有

$$\sum_{n=1}^{\infty}P\left\{\frac{\sum\limits_{s-h_n<t\le s}|\Delta x_2(t)|}{\sqrt{h_n\ln\left(\frac{1}{h_n}\right)}}>\varepsilon\right\}<\infty。$$

由 Borel-Cantelli 引理,可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{s-h_n<t\le s}|\Delta x_2(t)|}{\sqrt{h_n\ln(1/h_n)}}=0,\qquad \text{a.s.}\tag{27}$$

对 $h\in(0,1)$,存在 $n\ge 1$ 使得 $h_n\le h\le h_{n-1}$。由式(27)可以得到

$$\lim_{h\downarrow 0}\frac{|x_2(s)-x_2(s-h)|}{\sqrt{h\ln(1/h)}}\le\lim_{h\downarrow 0}\frac{\sum\limits_{s-h<t\le s}|\Delta X(t)|}{\sqrt{h\ln(1/h)}}\le$$

$$\lim_{n\to 0}\frac{\sum\limits_{s-h_{n-1}<t\le s}|\Delta x(t)|}{\sqrt{h_n\ln(1/h_n)}}=0,\qquad \text{a.s.}$$

式(24)得证。

设 $\hat{w}=(\sqrt{k_1}w_1(t),\cdots,\sqrt{k_d}w_d(t))$,其中 $w_1(t),\cdots,w_d(t)$ 是取值于 $\mathbf{R}$ 的标准 Brown 运动 $W(t)$ 的独立复制。对 $\hat{w}$ 定义超过程 $\hat{\mathscr{X}}$。使用文献[5]、[8]和[16]中类似的证明方法,可得以下引理。

引理 2.2　(ⅰ) 对每个 $t>0$,几乎确定地,对 $\hat{\mathscr{X}}_t$-几乎每一轨道 $\hat{w}$ 有,

$$\sup_{s>0}\lim_{h\downarrow 0}\sup\frac{|\hat{w}(s)-\hat{w}(s-h)|}{\sqrt{h\ln(1/h)}}=\sqrt{2K},\tag{28}$$

其中 $K=\max_{1\le i\le d}\{k_i\}$。进一步几乎确定地有

$$\sup_{s>0}\sup_{\hat{w}\in\text{range}\hat{\mathscr{X}}}\lim_{h\downarrow 0}\sup\frac{|\hat{w}(s)-\hat{w}(s-h)|}{\sqrt{h\ln(1/h)}}=2\sqrt{K}。\tag{29}$$

且在任意固定的时刻 $t>0$,几乎确定地在 $\{\hat{\mathscr{X}}_t\ne 0\}$ 上,有

$$\sup_{X\in\text{range}\hat{\mathscr{X}}}\lim_{h\downarrow 0}\sup\frac{|\hat{w}(t)-\hat{w}(t-h)|}{\sqrt{h\ln(1/h)}}=\sqrt{2K}。\tag{30}$$

(ⅱ) 设 $E\subset(0,t)$ 是一个 Borel 集。那么,几乎确定地在 $\{\hat{\mathscr{X}}_t\ne 0\}$ 上,有

$$\sup_{s\in E}\sup_{w\in\text{range}\hat{\mathscr{X}}}\lim_{h\downarrow 0}\sup\frac{|\hat{w}(s)-\hat{w}(s-h)|}{\sqrt{h\ln(1/h)}}=\sqrt{K}\sqrt{2+2\dim_p(E)}。\tag{31}$$

( ) 设 $E \subset (0, t)$ 是一个闭集, 维数 $d \geq 2$。那么, 几乎确定地在 $\{\mathscr{X}_t^c \neq 0\}$ 上, 对任意 $a \in [0, \sqrt{(2+2\dim_p(E))K}]$, 有

$$2+2\dim(E)-Ka^2 \leq \dim\left\{(wc, N) \in \mathscr{R}(E): \limsup_{h\to 0} \frac{|wc(N)-wc(N-h)|}{\sqrt{h\ln(1/h)}} \geq a\right\} \leq 2+2\dim_p(E)-Ka^2。 \tag{32}$$

而且, 如果 $\dim_p(E) < Ka^2/2-1$, 那么, a 快轨道集

$$\left\{(wc, N) \in \mathscr{R}(E): \limsup_{h\to 0} \frac{|wc(N)-wc(N-h)|}{\sqrt{h\ln(1/h)}} \geq a\right\} = 。 \tag{33}$$

特别地, 对任意 $a \in [0, 2\sqrt{K}]$, 几乎确定地有

$$\dim\left\{(wc, N) \in \operatorname{range}\mathscr{X}_c: \limsup_{h\to 0} \frac{|wc(N)-wc(N-h)|}{\sqrt{h\ln(1/h)}} \geq a\right\} = 4-Ka^2。 \tag{34}$$

而且, 对任意 $t > 0$, $a \in [0, \sqrt{2K}]$, 几乎确定地在 $\{\mathscr{X}_t^c \neq 0\}$ 上, 有

$$\dim\left\{(wc, N) \in \operatorname{supp}\mathscr{X}_t^c: \limsup_{h\to 0} \frac{|wc(N)-wc(N-h)|}{\sqrt{h\ln(1/h)}} \geq a\right\} = 2-Ka^2。 \tag{35}$$

定理 1.1 的证明　写

$$|x_1(s)+x_2(s)-x_1(s-h)-x_2(s-h)| \leq |x_1(s)-x_1(s-h)|+|x_2(s)-x_2(s-h)|。$$

在 wc 的定义里, 取 $k_1, \cdots, k_d$ 是矩阵 2 的特征值。我们有

$$|wc(s)-wc(s-h)| = |Qw(s)-Qw(s-h)|$$

和

$$\lim_{h\to 0} \frac{|As-A(s-h)|}{\sqrt{h\ln(1/h)}} = 0,$$

其中 Q 和 A 是 x_1 的定义中的矩阵和向量。那么有

$$\limsup_{h\to 0} \frac{|x_1(s)-x_1(s-h)|}{\sqrt{h\ln(1/h)}} = \limsup_{h\to 0} \frac{|wc(s)-wc(s-h)|}{\sqrt{h\ln(1/h)}}, \quad \text{a. s.} \tag{36}$$

由引理 2.1 和引理 2.2( ), 定理 1.1 就可获证。

利用类似于文献[13]中定理 1.1 的证明时使用的方法, 从引理 2.2( ) 可得证定理 1.2。

定理 1.3 的证明　从式(24), 我们有

$$\dim\left\{(x, N): \limsup_{h\to 0} \frac{|x(N)-x(N-h)|}{\sqrt{h\ln(1/h)}} \geq a\right\} = \dim\left\{(wc, N): \limsup_{h\to 0} \frac{|wc(N)-wc(N-h)|}{\sqrt{h\ln(1/h)}} \geq a\right\}。$$

因此由引理 2.2( ) 可推出定理 1.3。

致谢　作者感谢杭电基金(KYS091506042)对本文的资助。

[参 考 文 献]

[1] Dawson D A, Perkins E A. Historical processes[J]. Memoirs Amer Math Soc, 1991, **93**(454): 1-184.

[2] Verzani J. The slow points in the support of historical super-Brownian motion[J]. Ann Probab, 1995, **23**(1): 56-70.

[3] Cox T, Durrett R, Perkins E A. Rescaled particale systems converging to super-Brownian motion[A].

Perplexing Problems in Probability [C]. Birkh user: Basel, 1999, 269-284.

[4] Le Gall J F. Spatial Branching Processes, Random Snakes and Partial Differential Equations [M]. Birkh user: Basel, 1999.

[5] Revuz D, Yor M. Continuous Martingales and Brownian Motion [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1991.

[6] Serlet L. Some dimension results for super-Brownian motion [J]. Probab Thorey Relat Fields, 1995, **101** (3): 371-391.

[7] Slade G. Lattice trees, percolation and super-Brownian motion [A]. In: Bramson M, Durrett R, Eds. Perplexing Problems in Probability [C]. Birkh user: Basel, 1996, 35-53.

[8] M rters P. How fast are the particles of super-Brownian motion? [J]. Probab Theory Relat Fields, 2001, **121** (2): 171-197.

[9] Deheuvels P, Mason D M. Random fractal functional laws of the iterated logarithm [J]. Studia Sci Math Hungar, 1998, **34** (1): 89-106.

[10] Khoshnevisan D, Peres Y, Xiao Y. Limsup random fractals [J]. EI J Probab, 2000, **5** (4): 1-24.

[11] Khoshnevisan D, Shi Z. Fast sets and points for fractional Brownian motion [A]. S minaire de Probabiliti s [C]. **34. Springer-Verlag,** 2003, 393-416.

[12] Bertoin J. L vy Processes [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.

[13] Blumenthal R M, Getoor R K. Sample functions of stochastic processes with stationary independent increments [J]. J Math Mech, 1961, **10** (3): 493-516.

[14] Khoshnevisan D, Xiao Y. Level sets of additive L vy processes [J]. Ann Probab, 2002, **30** (1): 62-100.

[15] Khoshnevisan D, Xiao Y, Zhong Y. Local time of additive L vy processes [J]. Stoch Proc Appl, 2003, **104** (2): 193-216.

[16] Lin Z Y, Lu C R, Zhang L X. Path Properties of Gaussian Processes [M]. Hangzhou: Zhejiang University Press, 2001.

Maximal Speed of the Particles of Super-L vy Process

LIN Zheng-yan[1], CHENG Zong-mao[1,2]

(1. Department of Mathematics, Zhejiang University, Hangzhou 310027, P. R. China;

2. Institute of Applied Mathematics and Engineering Computation, Hangzhou Dianzi University 310018, P. R. China)

Abstract: Super-L vy process was introduced. Maximal speed of all particles in the range and the support of a supper-L vy process was studied. The state of historical super-L vy process is a measure on the set of paths. The maximal speed of all particles was studied, during a given time period E, which turns out to be function of the packing dimension of E. The Hausdorff dimension of the set of a-fast paths in the support and the range of the historical super-L vy process were calculated.

Key words: super-L vy process; modulus ofcontinuity; Hausdorff dimension; L vy process; a-fast path; Brownian motion