应用数学和力学, 第 29 卷 第 4 期
2008 年 4 月 15 日出版

Applied Mathematics and Mechanics
Vol. 29, No. 4, Apr. 15, 2008

文章编号: 1000-0887(2008) 04-0477-06

二阶椭圆问题带单位分解技巧的两重网格方法*

王 [1], 黄自萍[2], 李立康[3]

(1. 同济大学 数学系, 上海 200092;
2. 同济大学 中德学院, 上海 200092;
3. 复旦大学 数学系, 上海 200433)

(叶志明推荐)

摘要: 标准的两重网格方法是一种求解二阶椭圆问题的局部并行方法, 其计算所得数值解在整个求解区域上并不连续. 使用单位分解技术, 将各个子区域上的局部解粘合在一起, 从而得到全局连续解, 并证明此解在 H^1 范数意义下最优. 更进一步, 可以证明通过在粗网格上修正, 能够改善其 L^2 误差. 数值例子验证了理论的正确性.

关 键 词: 二阶椭圆问题; 两重网格方法; 单位分解
中图分类号: O242.21; O246 文献标识码: A

引 言

自 Babuška 和 Melenk 的文献[1] 发表以来, 单位分解方法引起了众多数学工作者和工程科研人员的关注. 其重要特征是: 对若干已知逼近性的局部解, 单位分解方法能构造一个具有一定的逼近性的全局解. 因此, 这种方法特别适用于区域分裂算法的构造. 文献[2] 中, Bank 和 Holst 提出了一种针对自适应有限元方法而设计的带单位分解技巧的并行算法. 黄云清和许进超[3] 通过该方法设计出一种适用于不匹配网格的新的二阶椭圆问题有限元离散格式, 后 Bacuta 等又将这一思路应用到 Stokes 问题上.

本文将单位分解方法与两重网格方法耦合, 提出一种带单位分解技巧的两重网格方法. 两重网格方法最早由许进超提出, 以解决非对称、非线性椭圆问题[4-5]. 后又被其他研究者进一步深入研究[6-9]. 受 Ritz-Galerkin 方法内估计的启发, 许进超[10] 设计出一组局部并行协调有限元算法用以求解二阶椭圆边值问题. 然而, 这些算法通常得到的是不连续解, 且其 L^2 误差的阶数并不比 H^1 误差高. 尽管文献[10] 中给出了解决办法, 但须多求解一组局部问题. 本文通过使用单位分解技术, 避免了这一额外的计算量, 且保证了与文献[10] 中算法 C2 相同的收敛速度.

* 收稿日期: 2007-10-03; 修订日期: 2008-03-03
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(40074031); 上海市科学技术委员会基金资助项目
作者简介: 王 (1979—), 男, 合肥人, 博士生(E-mail: ewalexandre@hotmail.com);
黄自萍, 博士, 教授, 博士生导师(联系人. E-mail: huangziping@mail.tongji.edu.cn).

1 模型问题及其有限元离散

考虑以下二阶椭圆问题:

$$\begin{cases} Lu := -\nabla\cdot(A\nabla u) + b\cdot\nabla u + cu = f, & \text{在 } \Omega \text{ 内}, \\ u = 0, & \text{在 } \Gamma \text{ 上}, \end{cases} \tag{1}$$

其中, Γ 为二维平面 R^2 上有界区域 Ω 的边界, 实函数矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{2\times 2} \in (W^{1,\infty}(\Omega))^4$ 在 Ω 上一致正定, $\boldsymbol{b} = [b_1, b_2]^{\mathrm{T}} \in (W^{1,\infty}(\Omega))^2, 0 \leqslant c \in L^\infty(\Omega)$. 本文将采用标准的Sobolev 空间及其范数、半范的定义[11], 并用 C 或 c 表示任一与网格参数等无关的正定常数, 且在不同位置可以表示不同的值.

方程(1)的等价变分问题为: 寻找 $u \in H_0^1(\Omega)$, 使满足

$$a_\Omega(u, v) = (f, v)_\Omega, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega), \tag{2}$$

这里, 以及本文其他地方, 对任一区域 $V \subset R^2$, $(\bullet, \bullet)_V$ 表示空间 $L^2(V)$ 上的内积, 且

$$a_V(w, v) = \int_V \left(\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} \frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{2} b_i \frac{\partial w}{\partial x_i} v + cwv \right) \mathrm{d}x. \tag{3}$$

由Lax-Milgram 定理知, 问题(2) 有恰只有 1 个解. 不妨假设, $u \in H^{1+\alpha}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, 且满足正则性

$$\| u \|_{1+\alpha,\Omega} \leqslant C \| f \|_{-1+\alpha,\Omega}, \qquad \alpha \in (0, 1]. \tag{4}$$

设三角剖分 $T_h(\Omega)$ 是正则的, 拟一致的[11], h 为其网格尺度. 定义 $S^h(\Omega)$ 为网格 $T_h(\Omega)$ 上协调有限元空间, 且令 $S_0^h(\Omega) = S^h(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. 更进一步, 构造空间

$$S_h^0(\Omega_0) = \left\{ v : v \in S^h(\Omega) \text{ 且 } \operatorname{supp} v \subset\subset \Omega_0 \right\},$$

此处, 当 $G \subset \Omega_0$ 时, 用 $G \subset\subset \Omega_0$ 表示 $\operatorname{dist}(\partial G \setminus \partial\Omega, \partial\Omega_0 \setminus \partial\Omega) > 0$ (详见文献[10]).

如文献[10]所述, 假设空间 $S_0^h(\Omega)$ 有如下性质:

A.1 存在常数 $r \geqslant 1$, 使得对任意函数 $w \in H_0^1(\Omega)$, 成立

$$\inf_{v \in S_0^h(\Omega)} \left(\| h^{-1}(w - v) \|_{0,\Omega} + \| w - v \|_{1,\Omega} \right) \leqslant Ch^s \| w \|_{1+s,\Omega},$$
$$0 \leqslant s \leqslant r. \tag{5}$$

A.2 对任意 $v \in S^h(\Omega_0)$, 成立

$$\| v \|_{1,\Omega_0} \leqslant Ch^{-1} \| v \|_{0,\Omega_0}. \tag{6}$$

A.3 对 $G \subset \Omega$, 设函数 $\omega \in C_0^\infty(\Omega)$ 且其支集 $\operatorname{supp}\omega \subset\subset G$. 则对任意函数 $w \in S^h(G)$, 存在 $v \in S_h^0(G)$, 使得

$$\| h^{-1}(\omega w - v) \|_{1,G} \leqslant C \| w \|_{1,G}. \tag{7}$$

变分问题(2)的有限元离散格式为: 寻找 $u_h \in S_0^h(\Omega)$, 使满足

$$a_\Omega(u, v) = (f, v)_\Omega, \qquad \forall v \in S_0^h(\Omega). \tag{8}$$

2 两重网格方法

本节将简要介绍并分析文献[10]中所提出的求解二阶椭圆边值问题的两重网格方法.

首先, 给出所谓的两重网格剖分的定义: 给定初始粗网格 $T_H(\Omega)$; 将区域 Ω 分解成一系列互不覆盖的子区域 D_j, 且满足 $\Omega = \sum_{j=1}^{M} D_j$; 再扩大 D_j 得到一系列凸多边形区域 Ω_j. 这里要求, 对任意的三角形单元 $K \in T_H(\Omega)$, 必存在子区域 D_j(和 Ω_j) 使得 $K \subset D_j$(和 $K \subset \Omega_j$). 细

分粗网格 $T_H(\Omega)$, 可得到全局加细网格 $T_h(\Omega)$ $(h \ll H)$, 将 $T_h(\Omega)$ 限制到 Ω_j, 可得到一系列局部加细网格 $T_h(\Omega_j)$. 本文假设所有的剖分都是正则的、拟一致的.

基于上面所述的两重网格剖分, 标准的两重网格方法(TG)描述如下:

第一步: 寻找全局粗网格解 $u_H \in S_0^H(\Omega)$, 使得

$$a_\Omega(u_H, v) = (f, v)_\Omega, \qquad \forall v \in S_0^H(\Omega).$$

第二步: 并行地寻找局部细网格修正 $e_h^j \in S_0^h(\Omega_j)$ $(j = 1, \cdots, M)$, 使得

$$a_{\Omega_j}(e_h^j, v) = (f, v)_{\Omega_j} - a_{\Omega_j}(u_H, v), \qquad \forall v \in S_0^h(\Omega_j).$$

第三步: 令 $u^h = u_H + e_h^j$, 在 D_j 内$(j = 1, \cdots, M)$.

考虑到算法第二步的修正问题, 我们需要如下局部正则性假设: 对任意函数 $f \in L^2(\Omega_j)$, 存在唯一解 $w \in H_0^1(\Omega_j)$ 满足

$$a_{\Omega_j}(v, w) = (f, v)_{\Omega_j}, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega_j). \tag{9}$$

且成立 $\|u\|_{1+\alpha, \Omega_j} \leqslant C\|f\|_{-1+\alpha, \Omega_j}$.

对每个子区域, 成立如下估计:

定理 2.1[10] 假设 $u^h \in S^h(\Omega_j)$ 是由算法TG所得, u_h 是问题(8)的全局有限元逼近. 则

$$\|u_h - u^h\|_{1, D_j} \leqslant CH^{r+\alpha}\|u\|_{1+r, \Omega}.$$

定义范数 $|||\cdot|||$ 为

$$|||u_h - u^h||| := \sum_{i=1}^{M}\|u_h - u^h\|_{1, D_i}. \tag{10}$$

由上述范数定义和定理 2.1 可得到算法 TG 的误差估计.

定理 2.2[10] 假设 $u^h \in S^h(\Omega_0)$ 是由算法TG所得, u_h 是问题(8)的全局有限元逼近. 则

$$|||u_h - u^h||| \leqslant CH^{r+\alpha}\|u\|_{1+r, \Omega}. \tag{11}$$

注 1 算法 TG 所得解 u^h 是由一系列互不覆盖子区域上的局部解组合而成. 通常情况下, 它并不在 Ω 上连续.

注 2 $\|u_h - u^h\|_{0, \Omega}$ 的收敛阶数并不比 $|||u_h - u^h|||$ 的高. 事实上, 这一结论在第4节的数值试验中得到了证实. 下节将给出的带单位分解技巧的两重网格方法, 其全局连续解的误差估计在 H^1 范数意义下为 $O(H^{r+\alpha})$ 阶, 在 L^2 范数意义下为 $O(H^{r+2\alpha})$ 阶. 并且, 数值结果表明其 L^2 误差估计不可再改进.

3 带单位分解技巧的两重网格方法

首先, 修改上节所描述的两重网格剖分, 将区域 Ω 分解成一系列重叠的子区域D_j, 令 $G_j = \sum_{i \neq j} D_i$, $\gamma_j^{(1)} = \partial D_j \cap G_j$, $\gamma_j^{(2)} = \partial G_j \cap D_j$, 要求 $\mathrm{dist}(\gamma_j^{(1)}, \gamma_j^{(2)}) \geqslant d_j$, 其中 d_j 为一正常数. 其余关于剖分的描述均与上节相同. 假设$\{D_j\}$满足最大点覆盖数条件: 存在正常数 M 使得

$$\mathrm{card}\{j: x \in D_j\} \leqslant M, \qquad \forall x \in \Omega.$$

对于子区域集合$\{D_j\}$, 函数集$\{\psi_j\}$ 被称为 Lipschitz 单位分解, 如果下列条件成立:

$$\mathrm{supp}(\psi_j) \subset \mathrm{closure}(D_j), \qquad \forall j = 1, \cdots, M, \tag{12}$$

$$\sum_{j=1}^{M}\psi_j \equiv 1, \qquad 在\ \Omega\ 内, \tag{13}$$

$$\psi_j \in W^{1,\infty}(\Omega), \tag{14}$$

$$\|\psi_j\|_{\infty, \Omega} \leqslant C_\infty, \tag{15}$$

$$\| \nabla \psi_j \|_{\infty, \Omega} \leqslant C_G / d_j. \tag{16}$$

设 V_i 是一组局部逼近函数空间, 则单位分解方法所定义的全局逼近函数空间 V 为:

$$V := \sum_{j=1}^{M} \psi_j V_j = \left\{ \sum_{j=1}^{M} \psi_j v_j \mid v_j \in V_j \right\}.$$

此时, 单位分解方法构造全局逼近解为 $u_{PU} = \sum_{j=1}^{M} \psi_j v_j \in V \subset H^1(\Omega)$. 该全局解的逼近性质如下:

定理 3.1[1] 假设 $u \in H^1(\Omega)$ 是待逼近的函数. 假设局部逼近空间 V_j 有如下性质: 对每个子区域 D_j, 存在函数 $v_j \in V_j$ 逼近 u 且满足

$$\| u - v_j \|_{0, D_j} \leqslant \epsilon_1(j), \quad \| \nabla (u - v_j) \|_{0, D_j} \leqslant \epsilon_2(j).$$

则函数 u_{PU} 有如下估计:

$$\| u - u_{PU} \|_{0, \Omega} \leqslant \sqrt{M} C_\infty \left(\sum_j \epsilon_1^2(j) \right)^{1/2},$$

$$\| \nabla (u - u_{PU}) \|_{0, \Omega} \leqslant \sqrt{2M} \left(\sum_j \left(\frac{C_G}{d_j} \right)^2 \epsilon_1^2(j) + C_\infty^2 \epsilon_2^2(j) \right)^{1/2}.$$

下面, 给出带单位分解技巧的两重网格算法(TGPU) 的具体定义.

第一步: 寻找全局粗网格解 $u_H \in S_0^H(\Omega)$, 使得

$$a_\Omega(u_H, v) = (f, v)_\Omega, \qquad \forall v \in S_0^H(\Omega).$$

第二步: 并行地寻找局部细网格修正 $e_h^j \in S_0^h(\Omega_j)(j = 1, \cdots, M)$, 使得

$$a_{\Omega_j}(e_h^j, v) = (f, v)_{\Omega_j} - a_{\Omega_j}(u_H, v), \qquad \forall v \in S_0^h(\Omega_j).$$

第三步: 令 $u_j^h = u_H + e_h^j$, 在 $D_j (j = 1, \cdots, M)$ 内, 且 $u^h = \sum_{j=1}^{M} \psi_j u_j^h$.

第四步: 寻找粗网格修正 $e_H \in S_0^H(\Omega)$, 使得

$$a(e_H, v) = (f, v) - a(u^h, v), \qquad \forall v \in S_0^H(\Omega).$$

第五步: 更新 $u^h = u^h + e_H$, 在 Ω 内.

为了方便算法分析, 定义伽辽金(Galerkin) 投影算子 $P_H : H_0^1(\Omega) \to S_0^H(\Omega)$ 为

$$a(w - P_H w, v) = 0, \qquad \forall v \in S_0^H(\Omega).$$

由问题(2) 的解正则性假设(4), 根据椭圆算子 L 的定义以及文献[10] 中的引理 2.1 和引理 2.2 可得

$$\| w - P_H w \|_{0, \Omega} \leqslant C H^\alpha \| w - P_H w \|_{1, \Omega}. \tag{17}$$

现在, 给出算法 TGPU 的误差估计.

定理 3.2 假设 u^h 和 u^h 是由算法 TGPU 所得, u_h 是问题(8) 全局有限元逼近. 则

$$\| u_h - u^h \|_{1, \Omega} \leqslant C H^{r+\alpha} \| u \|_{1+r, \Omega}, \tag{18}$$

$$\| u_h - u^h \|_{0, \Omega} \leqslant C H^\alpha \| u_h - u^h \|_{1, \Omega}. \tag{19}$$

证 由单位分解函数的定义知

$$\| u_h - u^h \|_{1, \Omega} = \left\| \sum_{j=1}^{M} \psi_j (u_h - u_j^h) \right\|_{1, \Omega} \leqslant C \sum_{j=1}^{M} \| \psi_j (u_h - u_j^h) \|_{1, D_j} \leqslant$$

$$C \sum_{j=1}^{M} \left(\| \nabla \psi_j (u_h - u_j^h) \|_{0, D_j}^2 + \| \psi_j \nabla (u_h - u_j^h) \|_{0, D_j}^2 \right)^{1/2} \leqslant$$

$$C \sum_{j=1}^{M} \left\{ \frac{C_G^2}{d_j^2} \| u_h - u_j^h \|_{0, D_j}^2 + C_\infty^2 \| (u_h - u_j^h) \|_{1, D_j}^2 \right\}^{1/2},$$

再利用定理2.1和定理2.2可得结论(18).

剩下式(19)未证明．事实上,由于

$$u_h - u^h = (I - P_H)(u_h - u^h),$$

结论(19)可立即由式(17)得到. □

注3 算法TGPU中使用的是有限元离散格式．若使用有限体积离散格式,也可得到类似定理3.2的结论.

4 数值实验

考虑矩形求解区域 $\Omega = (0, 1) \times (0, 1/4)$ 和一致三角形网格 $T^h(\Omega)$ (见图1)．为方便起见,只考虑两个子区域的情况:

$$\Omega_1 = (0, 3/4) \times (0, 1/4),$$
$$\Omega_2 = (1/4, 1) \times (0, 1/4),$$

且相应的 D_j 将取不同的重叠尺度:

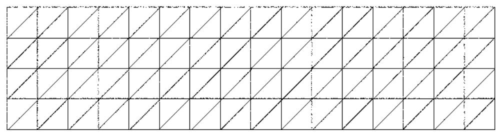

图1 剖分示意图

第1种情况: $D_1 = (0, 1/2) \times (0, 1/4)$,

$D_2 = (1/2, 1) \times (0, 1/4)$;

第2种情况: $D_1 = (0, 33/64) \times (0, 1/4)$, $D_2 = (31/64, 1) \times (0, 1/4)$.

其中,第1种情况为算法TG所使用,第2种情况为算法TGPU所使用.

模型问题为

$$-\Delta u = 2((1-x)x + (0.25-y)y^2), \quad \text{在 } \Omega \text{ 内},$$
$$u = 0, \quad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}.$$

选择不同的细网格尺度 h 以及相应的粗网格尺度 $H = h^{1/2}$, 使用连续分片线性有限元空间,应用算法TG和算法TGPU来求解该模型问题．此时, $r = \alpha = 1$．由定理3.2和标准有限元估计知

$$\| u - u^h \|_{1,\Omega} = O(H^2) = O(h), \quad \| u - u^h \|_{0,\Omega} = O(H^3) = O(h^{3/2}).$$

表1 算法TG的计算结果(第1种情况)

h	$\lvert\lvert\lvert u - u^h \rvert\rvert\rvert$	收敛速度	$\| u - u^h \|_{0,\Omega}$	收敛速度
6.944 44E-03	1.783 61E-06		1.394 58E-07	
3.906 25E-03	9.640 16E-07	1.0	7.614 02E-08	1.1
2.500 00E-03	6.053 98E-07	1.0	4.808 74E-08	1.0
1.736 11E-03	4.161 20E-07	1.0	3.316 24E-08	1.0

表2 算法TGPU的计算结果(第2种情况)

h	$\| u - u^h \|_{1,\Omega}$	收敛速度	$\| u - u^h \|_{1,\Omega}$	收敛速度	$\| u - u^h \|_{1,\Omega}$	收敛速度
6.944 44E-03	1.203 58E-006		7.736 65E-008		2.819 45E-008	
3.906 25E-03	6.926 83E-007	1.0	4.047 77E-008	1.1	1.146 33E-008	1.6
2.500 00E-03	4.366 51E-007	1.0	2.510 07E-008	1.1	5.770 50E-009	1.5
1.736 11E-03	3.071 29E-007	1.0	1.714 97E-008	1.0	3.283 65E-009	1.5

实际计算结果如表1、2所列．从表1可知,算法TG的计算结果,其 L^2 误差的收敛速度并不比分片 H^1 误差快．从表2可知,算法TGPU的计算结果与理论分析一致,且其 L^2 误差估计的阶

数不可再改进.

致谢 本文得到同济大学青年优秀人才培养行动计划资助(2007kj008),特致感谢.

[参 考 文 献]

[1] Babuška I, Melenk J M. The partition of unity finite method[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1997, **40**(4): 727-758.

[2] Bank R E, Holst M J. A new paradigm for parallel adaptive meshing algorithms[J]. SIAM Journal of Scientific Computing, 2001, **22**(4): 1411-1443.

[3] HUANG Yun-qing, XU Jin-chao. A conforming finite element method for overlapping and nonmatching grids[J]. Math Comp, 2003, **72**(243): 1057-1066.

[4] Xu J C. A new class of iterative methods for nonself adjoint or indefinite problems[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1992, **29**(2): 303-319.

[5] Xu J C. Two-grid discretization techniques for linear and nonlinear PDEs[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1996, **33**(5): 1759-1777.

[6] Axelsson O, Layton W. A two-level discretization of nonlinear boundary value problems[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1996, **33**(6): 2359-2374.

[7] Dawson C N, Wheeler M F. Two-grid methods for mixed finite element approximations of nonlinear parabolic equations[J]. Contemp Math, 1994, **180**: 191-203.

[8] Dawson C N, Wheeler M F, Woodward C S. A two-grid finite difference scheme for nonliear parabolic equations[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1998, **35**(2): 435-452.

[9] Marion M, Xu J C. Error estimates on a new nonlinear Galerkin method based on two-grid finite elements[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1995, **32**(4): 1170-1184.

[10] Xu J C, Zhou A H. Local and parallel finite element algorithms based on two-grid discretizations[J]. Mathematics of Computation, 2000, **69**(231): 881-909.

[11] Ciarlet P G. The Finite Element Method for Elliptic Problems[M]. Amsterdam: North-Holland, 1978.

Two-Grid Partition of Unity Method for Second Order Elliptic Problems

WANG Cheng[1], HUANG Zi-ping[2], LI Li-kang[3]

(1. Department of Mathematics, Tongji University, Shanghai 200092, P. R. China;

2. Chinese-German College, Tongji University, Shanghai 200092, P. R. China;

3. Department of Mathematics, Fudan University, Shanghai 200433, P. R. China)

Abstract: A two-grid partition of unity method for second order elliptic problems was proposed and analyzed. The standard two-grid method is a local and parallel method which usually leads to a discontinuous solution in the whole computational domain. Partition of unity method was employed to glue all the local solutions together to get global continuous one, which is optimal in H1-norm. Furthermore, it is shown that the L2 error can be improved by using the coarse grid correction. Numerical experiments are reported to support the theory.

Key words: second order elliptic problems; two-grid method; partition of unity