文章编号: 1000- 0887(2008)05- 0515- 10

拟变分包含及不动点问题公解的算法*

张石生[1], 李向荣[2], 陈志坚[2]

(1. 宜宾学院 数学系, 四川 宜宾 644007;
2. 香港理工大学 应用数学系, 香港 九龙)

(我刊编委张石生来稿)

摘要: 介绍了一种新的迭代算法, 在 Hilbert 空间的框架下, 用以寻求具多值极大单调映象和逆- 强单调映象的变分包含的解集与非扩张映象的不动点集的公共元. 在适当的条件下, 逼近于这一公共元的某些强收敛定理被证明. 所得结果是新的, 它不仅改进和推广了 Korpelevich [Ekonomika i Matematicheskie Metody, 1976, **12**(4): 747- 756] 的结果, 而且也推广和改进了 Iiduka 和 Takahashi [Nonlinear Anal, TMA, 2005, **61**(3): 341- 350], Takahashi 和 Toyoda [J Optim Theory Appl, 2003, **118**(2): 417- 428], Nadezhkina 和 Takahashi [J Optim Theory Appl, 2006, **128**(1): 191- 201] 及 Zeng 和 Yao [Taiwanese Journal of Mathematics, 2006, **10**(5): 1293- 1303] 等人的最新结果.

关 键 词: 变分包含; 多值极大单调映象; 逆- 强单调映象; 度量投影; 不动点; 非扩张映象

中图分类号: O177.91 文献标识码: A

1 引言与预备知识

本文处处假设 H 是一实的 Hilberth 空间, 并具有内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 和范数 $\|\cdot\|$, C 是 H 之一非空闭凸子集, 而 $F(T) = \{x \in H: Tx = x\}$ 是映象 T 的不动点集.

设 $A: H \to H$ 是一单值的非线性映象, $M: H \to 2^H$ 是一多值映象. "所谓的" 拟变分包含问题(见文献[1- 3]) 是求一点 $u \in H$ 使得

$$\theta \in A(u) + M(u). \tag{1}$$

在结构分析、力学及经济学中所产生的许多问题, 都可以归结为在这一变分包含的框架下进行研究(例如见文献[4]).

变分包含(1) 的解集, 记之以 $\mathrm{VI}(H, A, M)$.

特例

(Ⅰ) 如果 $M = \partial\phi: H \to 2^H$, 其中 $\phi: H \to \mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ 是一真凸下半- 连续泛函, 而 $\partial\phi$ 是 ϕ 的次- 微分, 则变分包含问题(1) 等价于求 $u \in H$ 使得

$$\langle Au, v - u\rangle + \phi(y) - \phi(u) \geqslant 0, \qquad \forall y \in H. \tag{2}$$

这一变分不等式称之为混合的拟- 变分不等式(见文献[5]).

---

* 收稿日期: 2007- 08-30; 修订日期: 2008-03-19

作者简介: 张石生(1934—), 男, 云南曲靖人, 教授(联系人. Tel: + 86- 28- 85415930; E- mail: sszhang_1@yahoo.com.cn).

(Ⅱ) 如果 $M=\partial\delta_C$, 其中 C 是 H 之一非空闭凸子集, $\delta_C:H\to[0,\infty]$ 是 C 的指示函数, 即

$$\delta_C(x)=\begin{cases}0, & x\in C,\\ +\infty, & x\notin C.\end{cases}$$

则变分包含问题(1)等价于求 $u\in C$ 使得

$$\langle A(u),v-u\rangle\geqslant 0,\qquad \forall v\in C. \tag{3}$$

这一问题称为 Hartman–Stampacchia 变分不等式问题(例如见文献[6–8]).

一映象 $S:H\to H$ 称为非扩张的, 如果

$$\|Sx-Sy\|\leqslant\|x-y\|,\qquad \forall x,y\in H.$$

定义 1.1 一映象 $A:H\to H$ 称为 α–逆–强单调的(见文献[9–11]), 如果存在 $\alpha>0$ 使得

$$\langle Ax-Ay,x-y\rangle\geqslant\alpha\|Ax-Ay\|^2,\qquad \forall x,y\in H.$$

一多值映象 $M:H\to 2^H$ 称为单调的, 如果对所有的 $x,y\in H$, $u\in Mx$ 及 $v\in My$ 有 $\langle u-v,x-y\rangle\geqslant 0$. 一多值映象 $M:H\to 2^H$ 称为极大单调的, 如果它是单调的, 而且如果对任意的 $(x,u)\in H\times H$, $\langle u-v,x-y\rangle\geqslant 0$ 对每一 $(y,v)\in\mathrm{graph}(M)$ (映象 M 的图象) 就蕴涵 $u\in Mx$.

命题 1.1 设 $A:H\to H$ 是一 α–逆强单调映象, 则

1) A 是一 $1/\alpha$–Lipschitz 连续的单调映象;

2) 如果 λ 是 $(0,2\alpha]$ 中的任一常数, 则映象 $I-\lambda A$ 是非扩张的, 其中 I 是 H 上的恒等映象.

证明 由 α–逆强单调映象的定义, 易知结论 1) 成立.

现证结论 2) 成立.

对任意的 $x,y\in H$ 有

$$\begin{aligned}\|(I-\lambda A)x-(I-\lambda A)y\|^2&=\|(x-y)-\lambda(Ax-Ay)\|^2=\\ &\|x-y\|^2-2\lambda\langle x-y,Ax-Ay\rangle+\lambda^2\|Ax-Ay\|^2\leqslant\\ &\|x-y\|^2+\lambda(\lambda-2\alpha)\|Ax-Ay\|^2.\end{aligned} \tag{4}$$

因为 $0<\lambda\leqslant 2\alpha$, 这表明 $I-\lambda A:H\to H$ 是一非扩张映象.

为了在 $F(S)\cap\mathrm{VI}(C,A)$ 中寻求一公共元, 在假定 C 是 H 之一非空闭凸子集, $S:C\to C$ 是一非扩张映象, $A:C\to H$ 是一 α–逆–强单调映象, $\mathrm{VI}(C,A)$ 是变分不等式(3)的解集且 $F(S)$ 是 S 的不动点集的条件下, Takahashi–Toyoda[12] 引入了下面的迭代程序:

$$x_{n+1}=\alpha_n x_n+(1-\alpha_n)SP_C(x_n-\lambda_n x_n),\qquad \forall n\geqslant 0, \tag{5}$$

其中 P_C 是 H 到 C 上的度量投影. 在适当的条件下, 他们证明序列 $\{x_n\}$ 弱收敛某一点 $z\in F(S)\cap\mathrm{VI}(C,A)$.

2005 年, Iiduka 和 Takahashi 在文献[13]中又引入下面的迭代程序:

$$x_{n+1}=\alpha_n x+(1-\alpha_n)SP_C(x_n-\lambda_n x_n),\qquad \forall n\geqslant 0, \tag{6}$$

其中 $x_1=x\in C$. 在适当的条件下, 他们证明了序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 $P_{F(S)\cap\mathrm{VI}(C,A)}x$.

受 Korpelevich[14] 的思想启发, 最近, Nadezhkina 和 Takahashi[15] 引入了“所谓”的超梯度法, 用以寻求非扩张映象的不动点集和变分不等式问题(3)的解集的公共元. 他们证明了下面的弱收敛定理:

定理 NT 设 C 是实 Hilbert 空间 H 之一非空闭凸子集. 设 $A:C\to H$ 是一单调的 k–Lipschitz 连续的映象, $S:C\to C$ 是一非扩张映象使得 $F(S)\cap\mathrm{VI}(C,A)\neq\varnothing$. 设 $\{x_n\}$ 及 $\{y_n\}$ 是由下式定义的序列:

$$\begin{cases} x_0 = x \in H, \\ y_n = P_C(x_n - \lambda_n A x_n), & \forall n \geqslant 0, \\ x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n) SP_C(x_n - \lambda_n A y_n), \end{cases} \tag{7}$$

其中 $\{\lambda_n\} \subset [a, b]$, $a, b \in (0, 1/k)$, 而且 $\{\alpha_n\} \subset [c, d]$, $c, d \in (0, 1)$. 则序列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 弱收敛于同一点 $P_{F(S)\cap \mathrm{VI}(C,A)} x_0$.

不久前, 受 Nadezhkina 和 Takahashi[15] 的启发, Zeng 和 Yao[16] 证明: 如果出现在定理NT 中的序列 $\{\lambda_n\}$ 和 $\{\alpha_n\}$ 满足下面的条件:

(a) $\{\lambda_n k\} \subset (0, 1-\delta)$ 对某一 $\delta \in (0, 1)$;

(b) $\{\alpha_n\} \subset (0, 1)$, $\alpha_n \to 0$ 且 $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$.

如果下面的条件满足:

$$\lim_{n\to\infty} \| x_{n+1} - x_n \| = 0.$$

则由(6)式定义的序列 $\{x_n\}$ 及 $\{y_n\}$ 强收敛于同一点 $P_{F(S)\cap \mathrm{VI}(C,A)} x_0$.

受 Korpelevich[14]、Iiduka 和 Takahashi[13]、Takahashi 和 Toyoda[12]、Nadezhkina 和 Takahashi[15] 及 Zeng 和 Yao[16] 的启发, 本文的目的是在 Hilbert 空间的框架下, 引入一种新的迭代程序, 用以寻求具多值极大单调映象和逆- 强单调映象的变分包含问题(1) 的解集与非扩张映象的不动点集的公共元. 在适当的条件下, 逼近于这一公共元的某些强收敛定理被证明. 本文所介绍的结果是新的, 它不仅改进和推广了 Korpelevich[14] 的结果, 而且也推广和改进了 Iiduka 和 Takahashi[13]、Takahashi 和 Toyoda[12]、Nadezhkina 和 Takahashi[15] 及 Zeng 和 Yao[16] 等人的最新结果.

为此, 我们首先追述某些定义、引理和符号.

以后, 我们分别用 $x_n \rightharpoonup x$ 和 $x_n \to x$ 表序列 $\{x_n\}$ 在空间 H 中的弱收敛和强收敛.

设 H 是一 Hilbert 空间, C 是 H 之一非空的闭凸子集. 对任意的 $x \in H$, 在 C 中存在唯一的最近点, 记为 $P_C x$, 使得

$$\| x - P_C x \| \leqslant \| x - y \|, \quad \forall y \in C.$$

这一由 H 到 C 上的映象 P_C 称为度量投影.

注 1　如所周知, 度量投影 P_C 具有下列性质:

1) $P_C: H \to C$ 是非扩张的;

2) P_C 是严格非扩张的, 即

$$\| P_C x - P_C y \|^2 \leqslant \langle P_C x - P_C y, x - y \rangle, \quad \forall x, y \in H;$$

3) 对每一 $x \in H$,

$$z = P_C(x) \Leftrightarrow \langle x - z, z - y \rangle \geqslant 0, \quad \forall y \in C.$$

定义 1.2　设 $M: H \to 2^H$ 是一多值的极大单调映象, 则由下式定义的单值映象 $J_{M,\lambda}: H \to H$

$$J_{M,\lambda}(u) = (I + \lambda M)^{-1}(u), \quad u \in H$$

称为 M 的预解算子, 其中 λ 是任一正数, 而 I 是一恒等映象.

命题 1.2　1) M 的预解算子 $J_{M,\lambda}$ 对所有的 $\lambda > 0$ 是单值的和非扩张的, 即

$$\| J_{M,\lambda}(x) - J_{M,\lambda}(y) \| \leqslant \| x - y \|, \quad \forall x, y \in H, \ \forall \lambda > 0.$$

2) 预解算子 $J_{M,\lambda}$ 是 1- 逆强单调的, 即

$$\| J_{M,\lambda}(x) - J_{M,\lambda}(y) \|^2 \leqslant \langle x - y, J_{M,\lambda}(x) - J_{M,\lambda}(y) \rangle, \quad \forall x, y \in H.$$

证明　结论 1) 是明显的(例如见文献[17]).

现证结论 2). 事实上, 对任意的 $x, y \in H$, 令

$$u = J_{M,\lambda}(x),\quad v = J_{M,\lambda}(y),$$

由定义 1.2 有

$$x - u \in \lambda M(u),\quad y - v \in \lambda M(v).$$

因 $M: H \to H$ 是极大单调, 故有

$$0 \leqslant \langle x - u - (y - v), u - v \rangle = \langle x - y, u - v \rangle - \| u - v \|^2,$$

即 $$\| J_{M,\lambda}(x) - J_{M,\lambda}(y) \|^2 \leqslant \langle x - y, J_{M,\lambda}(x) - J_{M,\lambda}(y) \rangle,\qquad \forall x, y \in H.$$

证毕.

定义 1.3 一单值映象 $A: H \to H$ 称为半- 连续的, 如果对任意的 $x, y, z \in H$, 函数 $t \mapsto \langle A(x + ty), z \rangle$ 在 $0+$ 是连续的.

已知每一连续映象必是半- 连续的.

在证明本文的主要结果时, 下面的一些引理是必需的:

引理 1.3[18] 设 X 是一实 Banach 空间, X^* 是 X 的对偶空间, $T: X \to 2^{X^*}$ 是具定义域 $D(T) = X$ 的一极大单调映象, 而 $P: X \to X^*$ 是一半- 连续的有界的单调映象. 则映象 $S = T + P: X \to 2^{X^*}$ 是一极大单调映象.

引理 1.4[19] 设 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 和 $\{c_n\}$ 是 3 个非负的实序列满足下面的条件:

$$a_{n+1} \leqslant (1 - \lambda_n) a_n + b_n + c_n,\qquad \forall n \geqslant n_0,$$

其中 n_0 是某一非负的整数, $\{\lambda_n\}$ 是 $(0, 1)$ 中之一序列, $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n = \infty$, $b_n = o(\lambda_n)$ 且 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n < \infty$, 则 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

引理 1.5[20-21] 设 X 是一致凸的 Banach 空间, C 是 X 之一非空闭凸子集, 而 $T: C \to X$ 是一具有不动点的非扩张映象, 则 $I - T$ 是半闭的, 即, 如果 $\{x_n\}$ 是 C 中之一序列使得 $x_n \rightharpoonup x$ 且 $(I - T)x_n \to 0$, 则 $(I - T)x = 0$.

引理 1.6[22] 设 E 是一实 Banach 空间, $J: E \to 2^{E^*}$ 是正规对偶映象, 则对任意的 $x, y \in E$, 下面的结论成立:

$$\| x + y \|^2 \leqslant \| x \|^2 + 2\langle y, j(x + y) \rangle,\qquad \forall j(x + y) \in J(x + y).$$

特别, 如果 $E = H$ 是一实的 Hilbert 空间, 则

$$\| x + y \|^2 \leqslant \| x \|^2 + 2\langle y, x + y \rangle,\qquad \forall x, y \in H.$$

2　主要结果

为了证明本文的主要结果, 我们先给出下面的引理.

引理 2.1 1) $u \in H$ 是变分包含(1) 的一解, 当而且仅当 $u = J_{M,\lambda}(u - \lambda Au)$, $\forall \lambda > 0$, 即

$$\mathrm{VI}(H, A, M) = F(J_{M,\lambda}(I - \lambda A)),\qquad \forall \lambda > 0.$$

2) 如果 $\lambda \in (0, 2\alpha]$, 则 $\mathrm{VI}(H, A, M)$ 是 H 中之一闭凸子集.

证明 1) 对任意的 $\lambda > 0$, 如果 $u \in H$ 是变分包含(1) 的解, 则

$$\begin{aligned}\theta \in M(u) + A(u) &\Leftrightarrow \theta \in \lambda(M(u) + A(u)) \Leftrightarrow \\ u - \lambda A(u) &\in (I + \lambda M)(u) \Leftrightarrow \\ u &= (I + \lambda M)^{-1}(u - \lambda Au) = J_{M,\lambda}(u - \lambda Au).\end{aligned}$$

2) 众所周知, 定义在 H 上的每一非扩张映象的不动点集是闭凸的. 故由命题 1.1 的 2)

及命题1.2得知,如果 $\lambda \in (0, 2\alpha]$, 则映象 $J_{M,\lambda}(I-\lambda A): H \to H$ 是非扩张的. 故由结论1) 得知 $VI(H, A, M) = F(J_{M,\lambda}(I-\lambda A))$ 是 H 中之一闭凸子集.

定理2.1 设 H 是一实Hilbert空间, $A: H \to H$ 是一 α-逆-强单调映象, $M: H \to 2^H$ 是一极大单调映象, 而 $S: H \to H$ 是一非扩张映象. 设集 $F(S) \cap VI(H, A, M) \neq \emptyset$, 其中 $VI(H, A, M)$ 是变分包含(1)的解集. 设 $x_0 = x \in H$ 且 $\{x_n\}$ 是由下式定义的序列:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \alpha_n x + (1-\alpha_n) S y_n, \\ y_n = J_{M,\lambda}(x_n - \lambda A x_n), \end{cases} \quad \forall n \geqslant 0, \tag{8}$$

其中 $\lambda \in (0, 2\alpha]$ 且 α_n 是[0,1]中的序列满足下面的条件:

(i) $\alpha_n \to 0$; $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$;

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty$.

则 $\{x_n\}$ 强收敛于 $P_{F(S)\cap VI(H,A,M)} x_0$.

证明 定理2.1的证明分成6步:

(Ⅰ) 首先证明序列 $\{x_n\}$ 及 $\{y_n\}$ 是有界的.

对任意给定的 $u \in F(S) \cap VI(H, A, M)$, $\lambda \in (0, 2\alpha]$, 由引理2.1, 有

$$u = J_{M,\lambda}(u - \lambda A u).$$

另由命题1.1, 得知 $I - \lambda A: H \to H$ 是非扩张的. 于是有

$$\begin{aligned} \|y_n - u\| &= \|J_{M,\lambda}(x_n - \lambda A x_n) - J_{M,\lambda}(u - \lambda A u)\| \leqslant \\ &\|x_n - \lambda A x_n - (u - \lambda A u)\| \leqslant \|x_n - u\|, \quad \forall n \geqslant 0. \end{aligned} \tag{9}$$

由(8)式和(9)式有

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - u\| &= \|\alpha_n(x - u) + (1-\alpha_n)(S y_n - u)\| \leqslant \\ &\alpha_n \|x - u\| + (1-\alpha_n)\|y_n - u\| \leqslant \\ &\alpha_n \|x - u\| + (1-\alpha_n)\|x_n - u\| \leqslant \\ &\max\{\|x - u\|, \|x_n - u\|\} \leqslant \\ &\cdots \leqslant \\ &\max\{\|x - u\|, \|x_0 - u\|\} = \\ &\|x - u\|, \quad \forall n \geqslant 0. \end{aligned} \tag{10}$$

这就指出 $\{x_n\}$ 是 H 中之一有界序列. 由(9)式知, $\{y_n\}$ 是 H 中之一有界序列. 因为 S 是非扩张的, 而且 A 是 α-逆强单调的, 由命题1.1, 它是 $1/\alpha$-Lipschitzian 从而, $\{S y_n\}$ 和 $\{A x_n\}$ 均为 H 中的有界序列.

(Ⅱ) 下面证明

$$\|x_{n+1} - x_n\| \to 0 \text{ 和 } \|y_{n+1} - y_n\| \to 0 \quad (n \to \infty). \tag{11}$$

事实上, 因为 $I - \lambda A$, $\lambda \in (0, 2\alpha]$ 是非扩张的, 故有

$$\begin{aligned} \|y_{n+1} - y_n\| &= \|J_{M,\lambda}(x_{n+1} - \lambda A x_{n+1}) - J_{M,\lambda}(x_n - \lambda A x_n)\| \leqslant \\ &\|x_{n+1} - \lambda A x_{n+1} - (x_n - \lambda A x_n)\| \leqslant \|x_{n+1} - x_n\|. \end{aligned} \tag{12}$$

于是由(8)式和(12)式有

$$\begin{aligned} &\|x_{n+1} - x_n\| = \\ &\quad \|\alpha_n x + (1-\alpha_n) S y_n - (\alpha_{n-1} x + (1-\alpha_{n-1}) S y_{n-1})\| = \\ &\quad \|(\alpha_n - \alpha_{n-1})(x - S y_{n-1}) + (1-\alpha_n)(S y_n - S y_{n-1})\| \leqslant \end{aligned}$$

$$|\alpha_n-\alpha_{n-1}|\,\|x-Sy_{n-1}\|+(1-\alpha_n)\|Sy_n-Sy_{n-1}\|\leqslant$$
$$|\alpha_n-\alpha_{n-1}|M+(1-\alpha_n)\|y_n-y_{n-1}\|\leqslant$$
$$|\alpha_n-\alpha_{n-1}|M+(1-\alpha_n)\|x_n-x_{n-1}\|,$$

其中$M=\sup_{n\geqslant 1}\|x-Sy_{n-1}\|$. 在引理1.4中取$a_n=\|x_n-x_{n-1}\|$, $b_n=0$, $c_n=|\alpha_n-\alpha_{n-1}|M$, 我们知道引理1.4中的所有的条件被满足. 于是由引理1.4知, $\|x_{n+1}-x_n\|\to 0\ (n\to\infty)$. 故由(12)式, $\|y_{n+1}-y_n\|\to 0\ (n\to\infty)$.

(Ⅲ) 现在证明: 对任意给定的$u\in F(S)\cap \mathrm{VI}(H,A,M)$

$$\|x_n-Sy_n\|\to 0,\quad \|Ax_n-Au\|\to 0. \tag{13}$$

事实上, 因为$\alpha_n\to 0$, $\|y_n-y_{n+1}\|\to 0$而且

$$\|x_n-Sy_n\|\leqslant\|x_n-Sy_{n-1}\|+\|Sy_{n-1}-Sy_n\|\leqslant$$
$$\alpha_{n-1}\|x-Sy_{n-1}\|+\|y_{n-1}-y_n\|\to 0,$$

这些表明

$$\|x_n-Sy_n\|\to 0\quad (n\to\infty).$$

因为$u\in F(S)\cap \mathrm{VI}(H,A,M)$, 由(8)式和(4)式即得

$$\|x_{n+1}-u\|^2=\|\alpha_n x+(1-\alpha_n)Sy_n-u\|^2\leqslant$$
$$\alpha_n\|x-u\|^2+(1-\alpha_n)\|Sy_n-u\|^2\leqslant$$
$$\alpha_n\|x-u\|^2+(1-\alpha_n)\|y_n-u\|^2\leqslant$$
$$\alpha_n\|x-u\|^2+(1-\alpha_n)\|x_n-\lambda Ax_n-(u-\lambda Au)\|^2\leqslant$$
$$\alpha_n\|x-u\|^2+(1-\alpha_n)\left\{\|x_n-u\|^2+\lambda(\lambda-2\alpha)\|Ax_n-Au\|^2\right\}\leqslant$$
$$\alpha_n\|x-u\|^2+\|x_n-u\|^2+(1-\alpha_n)\lambda(\lambda-2\alpha)\|Ax_n-Au\|^2.$$

简化后, 即得

$$(1-\alpha_n)\lambda(2\alpha-\lambda)\|Ax_n-Au\|^2\leqslant$$
$$\alpha_n\|x-u\|^2+\left\{\|x_n-u\|^2-\|x_{n+1}-u\|^2\right\}\leqslant$$
$$\alpha_n\|x-u\|^2+(\|x_n-u\|-$$
$$\|x_{n+1}-u\|)(\|x_n-u\|+\|x_{n+1}-u\|)\leqslant$$
$$\alpha_n\|x-u\|^2+(\|x_n-x_{n+1}\|)(\|x_n-u\|+\|x_{n+1}-u\|),$$

因为$\alpha_n\to 0$, $\|x_n-x_{n+1}\|\to 0$而且$\{x_n\}$是有界的, 这就指出$\|Ax_n-Au\|\to 0$.

(Ⅳ) 下面证明

$$\|x_n-y_n\|\to 0;\quad \|Sx_n-x_n\|\to 0;\quad \|Sy_n-y_n\|\to 0. \tag{14}$$

事实上, 由命题1.2得知, 对给定的$u\in F(S)\cap \mathrm{VI}(H,A,M)$

$$\|y_n-u\|^2=\|J_{M,\lambda}(x_n-\lambda Ax_n)-J_{M,\lambda}(u-\lambda Au)\|\leqslant$$
$$\langle x_n-\lambda Ax_n-(u-\lambda Au),\ y_n-u\rangle=$$
$$(1/2)\left\{\|x_n-\lambda Ax_n-(u-\lambda Au)\|^2+\|y_n-u\|^2-\right.$$
$$\left.\|x_n-\lambda Ax_n-(u-\lambda Au)-(y_n-u)\|^2\right\}\leqslant$$
$$(1/2)\left\{\|x_n-u\|^2+\|y_n-u\|^2-\|x_n-y_n-\lambda(Ax_n-Au)\|^2\right\}=$$
$$(1/2)\left\{\|x_n-u\|^2+\|y_n-u\|^2-\|x_n-y_n\|^2+\right.$$
$$\left.2\lambda\langle x_n-y_n,\ Ax_n-Au\rangle-\lambda^2\|Ax_n-Au\|^2\right\},$$

故有

$$\|y_n-u\|^2\leqslant\|x_n-u\|^2-\|x_n-y_n\|^2+$$
$$2\lambda\langle x_n-y_n,Ax_n-Au\rangle-\lambda^2\|Ax_n-Au\|^2. \tag{15}$$

于是，由(8)式和(15)式有

$$\|x_{n+1}-u\|^2=\|\alpha_n(x-u)-(1-\alpha_n)(Sy_n-u)\|^2\leqslant$$
$$\alpha_n\|x-u\|^2+(1-\alpha_n)\|Sy_n-u\|^2\leqslant$$
$$\alpha_n\|x-u\|^2+(1-\alpha_n)\|y_n-u\|^2\leqslant$$
$$\alpha_n\|x-u\|^2+(1-\alpha_n)\Big\{\|x_n-u\|^2-\|x_n-y_n\|^2+$$
$$2\lambda\langle x_n-y_n,Ax_n-Au\rangle-\lambda^2\|Ax_n-Au\|^2\Big\}.$$

从而

$$(1-\alpha_n)\|x_n-y_n\|^2\leqslant\alpha_n\|x-u\|^2+(\|x_n-u\|^2-\|x_{n+1}-u\|^2)+$$
$$2(1-\alpha_n)\lambda\langle x_n-y_n,Ax_n-Au\rangle-(1-\alpha_n)\lambda^2\|Ax_n-Au\|^2.$$

因为 $\alpha_n\to0$, $\|Ax_n-Au\|\to0$ 且

$$\big|\|x_n-u\|^2-\|x_{n+1}-u\|^2\big|\leqslant\|x_n-x_{n+1}\|(\|x_n\|+\|x_{n+1}\|)\to0,$$

这些就蕴涵 $\|x_n-y_n\|\to0$. 于是，由(13)式知

$$\|Sy_n-y_n\|\leqslant\|Sy_n-x_n\|+\|x_n-y_n\|\to0,$$

从而有

$$\|x_n-Sx_n\|\leqslant\|x_n-x_{n+1}\|+\|x_{n+1}-Sy_n\|+\|Sy_n-Sx_n\|\leqslant$$
$$\|x_n-x_{n+1}\|+\alpha_n\|x-Sy_n\|+\|y_n-x_n\|\to0.$$

(14)式的结论被证明.

(Ⅴ) 下面证明

$$\limsup_{n\to\infty}\langle x-p,Sy_n-p\rangle\leqslant0, \tag{16}$$

其中 $p=P_{F(S)\cap\mathrm{VI}(H,A,M)}x$.

事实上，因为$\{y_n\}$是H 中的序列，我们可以选择一子序列$\{y_{n_i}\}\subset\{y_n\}$，使得 $y_{n_i}\rightharpoonup w\in H$ 且

$$\limsup_{n\to\infty}\langle x-p,Sy_n-p\rangle=\lim_{n_i\to\infty}\langle x-p,Sy_{n_i}-p\rangle. \tag{17}$$

因为 $\|Sy_n-y_n\|\to0$, $\|Sy_{n_i}-y_{n_i}\|\to0$, 由引理1.5, 映象 $I-S:H\to H$ 是半-闭的，故 $w=Sw$，即 $w\in F(S)$.

现在我们证明

$$w\in\mathrm{VI}(H,A,M). \tag{18}$$

事实上，因为A 是α-逆强单调的，由命题1.1得知A 是$1/\alpha$-Lipschitz连续的单调映象，且 $D(A)=H$(其中$D(A)$是A的定义域). 由引理1.3知$M+A$ 是极大单调的. 令$(v,f)\in\mathrm{graph}(M+A)$，即，$f-Av\in M(v)$. 又因 $y_{n_i}=J_{M,\lambda}(x_{n_i}-\lambda Ax_{n_i})$，故有 $x_{n_i}-\lambda Ax_{n_i}\in(I+\lambda M)(y_{n_i})$，即

$$\frac{1}{\lambda}(x_{n_i}-y_{n_i}-\lambda Ax_{n_i})\in M(y_{n_i}).$$

借助 $M+A$ 的极大单调性，我们有

$$\langle v-y_{n_i},f-Av-\{x_{n_i}-y_{n_i}-\lambda Ax_{n_i}\}/\lambda\rangle\geqslant0,$$

从而有

$$\langle v - y_{n_i}, f\rangle \geqslant \langle v - y_{n_i}, Av + \{x_{n_i} - y_{n_i} - \lambda Ax_{n_i}\}/\lambda\rangle =$$
$$\langle v - y_{n_i}, Av - Ay_{n_i} + Ay_{n_i} - Ax_{n_i} + \{x_{n_i} - y_{n_i}\}/\lambda\rangle \geqslant$$
$$0 + \langle v - y_{n_i}, Ay_{n_i} - Ax_{n_i}\rangle + \langle v - y_{n_i}, \{x_{n_i} - y_{n_i}\}/\lambda\rangle. \tag{19}$$

因为 $\|x_n - y_n\| \to 0$, $\|Ax_n - Ay_n\| \to 0$, 而且 $y_{n_i} \rightharpoonup w$, 于是由(19)式有

$$\lim_{n_i\to\infty}\langle v - y_{n_i}, f\rangle = \langle v - w, f\rangle \geqslant 0.$$

因为 $A + M$ 是极大单调的, 这就推出 $\theta \in (M + A)(w)$, 即, $w \in \mathrm{VI}(H, M, A)$. 故有 $w \in F(S) \cap \mathrm{VI}(H, M, A)$.

这就证明了结论(18)是正确的.

因为 $\|Sy_n - y_n\| \to 0$ 且 $y_{n_i} \rightharpoonup w \in F(S) \cap \mathrm{VI}(H, M, A)$, 故由(17)式和注1得知

$$\limsup_{n\to\infty}\langle x - p, Sy_n - p\rangle = \lim_{n_i\to\infty}\langle x - p, Sy_{n_i} - p\rangle =$$
$$\lim_{n_i\to\infty}\langle x - p, Sy_{n_i} - y_{n_i} + y_{n_i} - p\rangle = \lim_{n_i\to\infty}\langle x - p, w - p\rangle \leqslant 0.$$

结论(16)被证明.

(Ⅵ) 最后我们证明

$$x_n \to p = P_{F(S)\cap \mathrm{VI}(H,A,M)}x_0. \tag{20}$$

事实上, 由(8)、(9)式及引理1.6有

$$\|x_{n+1} - p\|^2 = \|\alpha_n(x - p) + (1 - \alpha_n)(Sy_n - p)\|^2 \leqslant$$
$$(1 - \alpha_n)^2\|Sy_n - p\|^2 + 2\alpha_n\langle x - p, x_{n+1} - p\rangle \leqslant$$
$$(1 - \alpha_n)^2\|y_n - p\|^2 + 2\alpha_n\langle x - p, x_{n+1} - p\rangle \leqslant$$
$$(1 - \alpha_n)^2\|x_n - p\|^2 + 2\alpha_n\langle x - p, x_{n+1} - p\rangle. \tag{21}$$

令

$$\gamma_n = \max\{0, \langle x - p, x_{n+1} - p\rangle\}, \qquad \forall n \geqslant 0.$$

则 $\gamma_n \geqslant 0$.

下面证明

$$\gamma_n \to 0. \tag{22}$$

事实上, 由(16)式得知, 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 n_0 使得

$$\langle x - p, x_{n+1} - p\rangle < \varepsilon.$$

从而有

$$0 \leqslant \gamma_n < \varepsilon, \qquad \forall n \geqslant n_0.$$

由 $\varepsilon > 0$ 的任意性, 即得 $\gamma_n \to 0$. 借用 $\{\gamma_n\}$, 我们可以把(21)式重新写成:

$$\|x_{n+1} - p\|^2 \leqslant (1 - \alpha_n)\|x_n - p\|^2 + 2\alpha_n\gamma_n. \tag{23}$$

取 $a_n = \|x_n - p\|^2$, $\lambda_n = \alpha_n$, $b_n = 2\alpha_n\gamma_n$, $c_n = 0$, 由引理1.4知, 序列 $x_n \to p\ (n \to \infty)$. 定理证毕.

由定理2.1, 可得下面的结果:

定理2.2 设 H 是一实Hilbert空间, C 是 H 之一非空的闭凸子集, $A: C \to H$ 是一 α-逆-强单调映象, $S: C \to C$ 是一非扩张映象, 且 $F(T) \cap \mathrm{VI}(C, A) \neq \emptyset$, 其中 $\mathrm{VI}(C, A)$ 是变分不等式(3)的解集. 设 $x_0 = x \in C$, $\{x_n\}$ 是由下式定义的序列:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \alpha_n x + (1 - \alpha_n)Sy_n, \\ y_n = P_C(x_n - \lambda Ax_n), \end{cases} \qquad \forall n \geqslant 0, \tag{24}$$

其中 $\lambda \in (0, 2\alpha]$ 是任意的正数, α_n 是 $(0,1)$ 中的序列, 满足下面的条件:

(i) $\alpha_n \to 0$; $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$;

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty$.

则 $\{x_n\}$ 强收敛于 $P_{F(S)\cap VI(C,A)} x_0$.

证明 在定理 2.1 中取 $M = \partial \delta_C : H \to 2^H$, 其中 $\delta_C : H \to [0, \infty]$ 是 C 的指示函数, 即,

$$\delta_C(x) = \begin{cases} 0, & x \in C, \\ +\infty, & x \notin C. \end{cases}$$

则变分包含问题(1)等价于变分不等式(3), 即, 求 $u \in C$ 使得

$$\langle A(u), v - u \rangle \geqslant 0, \qquad \forall v \in C.$$

又因 $M = \partial \delta_C$, 故 $J_{M,\lambda}$ 在 C 上的限制是一恒等映象, 即 $J_{M,\lambda}|_C = I$, 从而有

$$y_n = P_C(x_n - \lambda A x_n) = J_{M,\lambda}(P_C(x_n - \lambda A x_n)). \tag{25}$$

故定理2.2的结论由定理 2.1 直接可得.

致谢 作者对审稿人的宝贵意见和有益评论, 表示衷心感谢; 作者对宜宾学院自然科学基金的资助(2007Z003) 表示衷心感谢.

[参 考 文 献]

[1] Noor M A, Ames K W I F. Sensitivity analysis for quasi variational inclusions[J]. J Math Anal Appl, 1999, **236**(2): 290- 299.

[2] Chang S S. Set- valued variational inclusions in Banach spaces[J]. J Math Anal Appl, 2000, **248**: 438 - 454.

[3] Chang S S. Existence and approximation of solutions of set- valued variational inclusions in Banach spaces[J]. Nonlinear Anal, TMA, 2001, **47**(1): 583- 594.

[4] Demyanov V F, Stavroulakis G E, Polyakova L N, et al. Quasidifferentiability and Nonsmooth Modeling in Mechanics, Engineering and Economics[M]. Dordrecht: Kluwer Academic, 1996.

[5] Noor M A. Generalized set- valued variational inclusions and resulvent equations[J]. J Math Anal Appl, 1998, **228**(1): 206- 220.

[6] Browder F E. Nonlinear monotone operators and convex sets in Banach spaces[J]. Bull Amer Math Soc, 1965, **71**(5): 780- 785.

[7] Hartman P, Stampacchia G. On some nonlinear elliptic differential equations[J]. Acta Math, 1966, **115**(1): 271- 310.

[8] Lions J L, Stampacchia G. Variational inequalities[J]. Comm Pure Appl Math, 1967, **20**: 493- 517.

[9] Browder F E, Petryshyn W V. Construction of fixed points of nonlinear mappings in Hilbert spaces[J]. J Math Anal Appl, 1967, **20**: 197- 228.

[10] Iiduka H, Takahashi W, Toyoda M. Approximation of solutions of variational inequalities for monotone mappings[J]. Pan Amer Math J, 2004, **14**: 49- 61.

[11] Liu F, Nashed M Z. Regularization of nonlinear ill- posed variational inequalities and convergence rates[J]. Set - Valued Analysis, 1998, **6**(4): 313- 344.

[12] Takahashi W, Toyoda M. Weak convergence theorems for nonexpansive mappings and monotone mappings[J]. J Optim Theory Appl, 2003, **118**(2): 417- 428.

[13] Iiduka H, Takahashi L W. Strong convergence theorems for nonexpansive mappings and inverse-strongly monotone mappings[J]. Nonlinear Anal, TMA, 2005, **61**(3): 341- 350.

[14] Korpelevič G M. An extragradient method for finding saddle points and for other problems[J]. Ekonomika i Matematicheskie Metody, 1976, **12**(4): 747– 756.

[15] Nadezhkina N, Takahashi W. Weak convergence theorem by an extragradient method for nonexpansive mappings and monotone mappings[J]. J Optim Theory Appl, 2006, **128**(1): 191 – 201.

[16] Zeng L C, Yao J C. Strong convergence theorem by an extragradient method for fixed point problems and variational inequality problems[J]. Taiwanese Journal of Mathematics, 2006, **10**(5): 1293 – 1303.

[17] Brezis H. Op rateur Maximaux Monotones et Semipro upes de Contractions Dans les Espaces de Hilbert[M]. Amsterdam: North– Holland, 1973.

[18] Pascali Dan. Nonlinear Mappings of Monotone Type[M]. Amsterdam, Netherlands: Sijthoff and Noordhoff International Publishers, 1978.

[19] Liu L S. Ishikawa and Manniterative processes with errors for nonlinear strongly accretive mappings in Banach spaces[J]. J Math Anal Appl, 1995, **194**(1): 114– 125.

[20] Goebel K, Kirk W A. Topics in metric fixed point theory[A]. In: Cambridge Studies in Advanced Mathematics[C]. **28**. London: Cambridge University Press, 1990.

[21] Bruck R E. On the weak convergence of an ergodic iteration for the solution of variational inequalities for monotone operators in Hilbert spaces[J]. J Math Anal Appl, 1977, **61**: 159 – 164.

[22] Chang S S. Some problems and results in the study of nonlinear analysis[J]. Nonlinear Anal, TMA, 1997, **30**(7): 4197 – 4208.

Algorithms of Common Solutions for Quasi Variational Inclusion and Fixed Point Problems

ZHANG Shi– sheng[1], LEE Joseph H W[2], CHAN Chi Kin[2]

(1. Department of Mathematics, Yibin University, Yibin, Sichuan 644007, P. R. China;

2. Department of Applied Mathematics, The Hong Kong Polytechnic University, Hung Hom, Kowloon, Hong Kong, P. R. China)

Abstract: The purpose is to present an iterative scheme for finding a common element of the set of solutions of the variational inclusion problem with multi– valued maximal monotone mapping and inverse– strongly monotone mappings and the set of fixed points of nonexpansive mappings in Hilbert space. Under suitable conditions, some strong convergence theorems for approximating to this common elements were proved. The results presented not only improve and extend the main results in Korpelevich [Ekonomika i Matematicheskie Metody, 1976, **12**(4): 747 – 756], but also extend and replenish the corresponding results in Iiduka and Takahashi[Nonlinear Anal, TMA, 2005, **61**(3): 341 – 350], Takahashi and Toyoda [J Optim Theory Appl, 2003, **118**(2): 417– 428], Nadezhkina and Takahashi[J Optim Theory Appl, 2006, **128**(1): 191 – 201] and Zeng and Yao[Taiwanese Journal of Mathematics, 2006, **10**(5): 1293– 1303].

Key words: variational inclusion; multi– valued maximal monotone mapping; inverse– strongly monotone mapping; metric projection; fixed point; nonexpansive mapping