

基于最佳超收敛阶 EEP 法的一维有限元自适应求解*

袁 驷, 邢沁妍, 王 旭, 叶康生

(清华大学 土木工程系; 结构工程与振动教育部重点实验室, 北京 100084)

(龙驭球推荐)

摘要: 基于新近提出的具有最佳超收敛阶的单元能量投影(EEP)超收敛算法, 提出用具有最佳超收敛阶的 EEP 超收敛解对有限元解进行误差估计, 用均差法进行网格划分, 用拟有限元解进行多次遍历而不反复求解有限元真解, 形成一套新型的一维有限元自适应求解策略. 该法理论上简明清晰, 算法上高效可靠, 对于大多数问题, 一步自适应迭代便可给出按最大模度量逐点满足误差限的有限元解答. 以二阶椭圆型常微分方程模型问题为例, 介绍了该法的基本思想、实施策略及具体算法, 并给出具有代表性的数值算例, 以展示该法的优良性能和效果.

关键词: 有限元法; 自适应求解; 超收敛; 最佳收敛阶; 单元能量投影; 凝聚形函数
中图分类号: O242.21 **文献标识码:** A

引 言

有限元(FEM)法发展至今, 已经不仅仅满足于能够近似地求解各类问题, 而是进一步追求能够自适应地求解各类问题. 传统有限元法和自适应有限元法在性质上有根本的不同, 即在相同的定解条件下:

- 传统的求解方法 用户输入网格, 得到该网格上的解答, 解答质量和精度由用户判断.
- 自适应求解方法 用户输入对解答精度要求的误差限, 得到满足该误差限的解答, 而求解网格由算法自适应地调整, 解答质量和精度有可靠保证.

可见, 要成功地实施自适应求解, 必须有可靠的误差估计手段和灵活高效的网格划分和调整技术. 在有限元误差估计方面, 目前主要有两大类方法: 以 Babuska 等人^[1]为代表提出的基于平衡方程残差计算的误差估计方法, 以及 Zienkiewicz 和 Zhu 提出的分片磨光法^[2-3](superconvergent patch recovery, 简称 SPR)、林群等人^[4]开创的有限元插值后处理方法、陈传森^[5]建立的单元正交分析法, 以及其他同类方法为代表的基于后处理超收敛计算的误差估计方式. 在网格自适应调整方面, 目前多数方法都是采用能量模来度量误差的大小, 根据各种类型的局部误差指标调整网格; 其调整方式可分为 h 型(网格细分加密法)、 p 型(提升单元阶次法)、以及

* 收稿日期: 2008-01-22; 修订日期: 2008-04-02
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50678093); 长江学者和创新团队发展计划资助项目(IRT00736)
作者简介: 袁驷(1953-), 男, 北京人, 教授, 博士(联系人. Tel: + 86-10-62786185; Fax: + 86-10-62771132; E-mail: yuans@tsinghua.edu.cn).

hp 型(混合方法)等.

作为非有限元法的自适应分析方法,值得一提的是国际上著名的常微分方程求解器 COLSYS^[6-7],它采用样条配点法求解一般的常微分方程(组)边值问题.在自适应算法中,COLSYS 通过疏密两套网格(密网格是稀疏网格简单的二分加密)上解的对比获得误差估计,由此确定进一步网格调整的策略.由于 COLSYS 在常微分方程自适应求解中有着出色的表现,本文的研究将它作为算法性能参照对比的对象之一.

本文第一作者及其课题组经过多年的探索和研究,从结构力学矩阵位移法中得到启发^[8],以有限元法数学理论中的投影定理为理论依据,在文献[9]中对一维问题提出了有限元后处理超收敛计算的单元能量投影(element energy projection,简称 EEP)法,并采用线性权函数 v^h 导出了一组超收敛计算公式(以下称为简约格式).其后,又将该 EEP 法推广到 C^1 问题^[10]、Timoshenko 梁单元^[11]、Galerkin 有限元^[12],以及二维有限元线法 Poisson 方程问题^[13].基于 EEP 法简约格式的超收敛解,文献[14]对一维问题提出了一套新型的自适应求解方案.这一自适应方案将有限元自适应求解问题转化为对超收敛解答的自适应分段多项式插值问题,简单实用、快速高效,尤其是对较低次单元(如线性元和二次元),其性能和效率的优势比高次元更为明显.

然而,进一步的理论分析和数值试验都表明,文献[9]中的 EEP 简约格式的超收敛解,对于 $m > 2$ 次单元,尽管端点导数可达到最佳的 h^{2m} 超收敛阶,但是单元内部的位移和应力一般只具有 h^{m+2} 阶的强超收敛性^[15].为此,本文作者等人在文献[16-17]中对高次元提出了凝聚函数的概念,据此给出了改进的 EEP 计算格式,称为凝聚格式(亦称完全格式).文献[18]的数学分析证明,若问题及其解答足够光滑,用 EEP 凝聚格式计算的单元内任意一点位移和应力的超收敛解,都具有最佳的 h^{2m} 超收敛阶.EEP 法凝聚格式的提出,特别是最佳超收敛阶的数学证明为其奠定了理论基础,使得更加高效可靠的有限元自适应求解方法得以提出.

本文充分利用 EEP 法凝聚格式的最佳超收敛阶的优势,引入“拟有限元解”及其自适应插值的概念,对文献[14]的自适应求解方案提出实质性的改进方案.这一新的改进方案,理论上更加清晰,算法上更加简洁,性能上大为增强,效率上大幅提升.文中以椭圆型二阶常微分方程模型问题为例,对该法的基本思想、实施策略和具体算法做一介绍,给出具有代表性的数值算例,以显示其优良的性能和效果.

1 模型问题及 EEP 超收敛解

1.1 模型问题和有限元解

本文考虑如下的二阶椭圆型两点边值问题:

$$\begin{cases} Lu \equiv -(pu')' + qu = f, & 0 < x < 1, \\ u(0) = 0, \quad u'(1) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

其中 $p > p_0 > 0$, p_0 为常数, $q \geq 0$, $(\quad)' = d(\quad)/dx$. L 为式中定义的椭圆型自伴线性微分算子.

定义双线性型(能量内积)和线性型

$$a(u, v) = \int_0^1 (pu'v' + quv) dx, \quad (f, v) = \int_0^1 fvdx, \quad (2)$$

则常规的位移型有限元解归结为求解 $u^h \in S^h$, 使得

$$a(u^h, v^h) = (f, v^h), \quad \forall v^h \in S^h, \quad (3)$$

其中, S^h 为通常意义下的有限元试探空间. 以下分别记 $u, u^h \in S^h$ 和 $v^h \in S^h$ 为广义精确解、有限元解和任一检验(权)函数. 熟知, 常规的有限元解 u^h 只在单元端点具有超收敛性质, 即如果问题及其解答足够光滑, 其 m 次单元的端点位移可达到 h^{2m} 阶的收敛精度^[9], 而通过形函数和形函数导数插值得到的内点位移和应力, 一般只能分别达到 h^{m+1} 阶和 h^m 阶的收敛精度^[20].

1.2 EEP 法超收敛解的凝聚格式

本节给出文献[16]的一些必要的公式和结论, 略去证明.

将任一单元记为 e , 其两端结点坐标记为 x_1, x_2 , 单元长度记为 h . 文献[16-18]的数学分析已经证明, 将有限元数学理论中熟知的投影定理^[20]近似地应用于单个 $m (> 1)$ 次单元上时, 其误差为 h^{2m} 阶微量, 据此可以利用单元能量投影(EEP)法导出具有最佳超收敛阶的单元内点位移、导数的超收敛计算的凝聚格式如下:

$$u_a^* = u_a^h + \frac{1}{p_a v_a} \left[N_{1a} \int_{x_1}^{x_a} (f - Lu^h) N_2 dx + N_{2a} \int_{x_a}^{x_2} (f - Lu^h) N_1 dx \right], \quad (4a)$$

$$u_a'^* = u_a'^h + \frac{1}{p_a' v_a'} \left[N_{1a}' \int_{x_1}^{x_a} (f - Lu^h) N_2 dx + N_{2a}' \int_{x_a}^{x_2} (f - Lu^h) N_1 dx \right]; \quad (4b)$$

$$v_a = N_{1a}' N_{2a}' - N_{2a}' N_{1a}',$$

其中, $()^*$ 、 $()_i$ 和 $()_a$ 分别表示超收敛值、端点 x_i 处的值和内点 $x_a \in (x_1, x_2)$ 处的值, $N_i (i = 1, 2)$ 为 m 次凝聚形函数, 其定义如下.

1.3 凝聚形函数

将 $m (> 1)$ 次单元的试探函数表示为

$$v = \sum_{i=1}^{m+1} N_i v_i = N_1 v_1 + \hat{N} \hat{v} + N_{m+1} v_{m+1}, \quad (5)$$

其中, \hat{N} 为内部形函数行向量, \hat{v} 为内部结点位移列向量:

$$\hat{N} = (N_2 \ N_3 \ \dots \ N_m), \quad \hat{v} = (v_2 \ v_3 \ \dots \ v_m)^T. \quad (6)$$

由此生成的单元刚度方程为

$$k^e d^e = P^e, \quad (7)$$

其中的矩阵和向量可分块表示为

$$k^e = \begin{pmatrix} k_{11} & \hat{k}_1^T & k_{1, m+1} \\ \hat{k}_1 & \hat{k} & \hat{k}_{m+1} \\ k_{m+1, 1} & \hat{k}_{m+1}^T & k_{m+1, m+1} \end{pmatrix}, \quad d^e = \begin{pmatrix} v_1 \\ \hat{v} \\ v_{m+1} \end{pmatrix}, \quad P^e = \begin{pmatrix} P_1 \\ \hat{P} \\ P_{m+1} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

这里 \hat{k}_1 和 \hat{k}_{m+1} 均为列向量, \hat{k} 为可逆方阵. 解出单元内部结点位移向量

$$\hat{v} = \hat{k}^{-1} (\hat{P} - \hat{k}_1 v_1 - \hat{k}_{m+1} v_{m+1}), \quad (9)$$

代回到原来的矩阵方程, 即可得到凝聚后的单元刚度方程(凝聚后的量上面添加“~”)

$$k^e d^e = P^e, \quad (10)$$

其中

$$k^e = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11} - \hat{k}_1^T \hat{k}^{-1} \hat{k}_1 & k_{1, m+1} - \hat{k}_1^T \hat{k}^{-1} \hat{k}_{m+1} \\ k_{m+1, 1} - \hat{k}_{m+1}^T \hat{k}^{-1} \hat{k}_1 & k_{m+1, m+1} - \hat{k}_{m+1}^T \hat{k}^{-1} \hat{k}_{m+1} \end{pmatrix}, \quad (11)$$

$$d^e = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_{m+1} \end{pmatrix}, \quad P^e = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 - \hat{k}_1^T \hat{k}^{-1} \hat{P} \\ P_{m+1} - \hat{k}_{m+1}^T \hat{k}^{-1} \hat{P} \end{pmatrix}.$$

将式(9)的解代回到试探函数式(5),凝聚后的试探函数即可表示为

$$v = N_1 v_1 + N_2 v_{m+1} + N_0 \quad (12)$$

其中

$$N_1 = N_1 - \hat{N}\hat{k}^{-1}\hat{k}_1, N_2 = N_{m+1} - \hat{N}\hat{k}^{-1}\hat{k}_{m+1}, N_0 = \hat{N}\hat{k}^{-1}\hat{P}, \quad (13)$$

这里, $N_i (i = 1, 2)$ 即为 m 次单元的凝聚形函数, 用它们可直接生成凝聚的单元刚度矩阵 k^e 和单元荷载向量 P^e . 凝聚形函数具有一些优良的性质, 可参见文献[16], 这里不一一列举.

2 基于 EEP 法凝聚格式的自适应求解策略

2.1 自适应求解的目标

一个优秀的自适应有限元求解算法应尽可能具备以下几个特征:

- 1) 解答一致收敛 能够逐点估计误差、控制误差, 譬如采用最大模度量误差并控制误差;
- 2) 误差均匀分布 各个单元的最大误差大致相等, 以减少冗余精度;
- 3) 非均匀网格 能够自动生成适应解答变化的非均匀网格;
- 4) 最少单元数 尽可能使用最少的单元, 减少冗余计算;
- 5) 最少迭代步 尽可能少的自适应迭代计算步骤, 最大限度地提高自适应求解效率.

以上 5 个目标中, 前 4 个是对解答质量的要求, 第 5) 是对求解过程效率的要求. 应该说, 上述 5 个目标要想全面、完美的实现, 一般来说是很困难的, 其中最大的难点莫过于真实解事先未知.

本文的自适应求解目标为: 在精确解 u 未知的情况下, 事先给定误差限 T , 寻求一个优化的有限元网格 π , 使得该网格上的有限元解答 u^h 按最大模度量满足误差限, 即逐单元满足

$$\max_e |u - u^h| \leq T.$$

注意: 本文自适应求解的对象是 u^h 而不是 u^* , 也没有对 u^h 的导数进行误差控制, 若需要高精度的导数解可在 u^h 的基础上计算导数的超收敛解.

2.2 自适应求解的基本思路

如前所述, EEP 凝聚格式的超收敛解 u^* 在各个单元内部逐点具有 h^{2m} 阶的精度, 而常规有限元解 u^h 在单元内部只具有 h^{m+1} 阶的精度. 这意味着, 当 $m > 1$ 时, u^* 比 u^h 具有更高阶乃至高出数阶的精度, 亦即 u^* 远比 u^h 更接近精确解 u , 且单元次数 m 越高、网格越密 (h 越小), 二者在精度上的差距就越明显, 而超收敛解 u^* 与精确解 u 在精度上的差别就越可以忽略不计! 由此便自然地产生了本文自适应求解的基本思路: 将具有最佳超收敛阶的 EEP 解 u^* 近似地看作精确解 u . 这一基本思路简明清晰, 据此可构造出高效可靠的自适应求解算法.

2.3 误差估计与控制

用 u^* 近似精确解 u 可以得到一个简单明了的误差估计, 亦即要求最终的有限元解答逐单元满足

$$\max_e |u^* - u^h| \leq T, \quad (14)$$

这就是本文自适应求解方案的误差控制准则, 大量的数值实验表明, 这一误差控制方案不仅是合理的, 而且是可靠的.

记 $e_h^* = u^* - u^h$. 在具体实施 e_h^* 的计算时, 将单元等分为 M 个子区间, 在 $M - 1$ 个内部分点上计算误差, 并找出误差最大值

$$e_{h, \max}^* = \max_{j=1, 2, \dots, M-1} |u^* - u^h|_j \leq T, \quad (15)$$

以此作为单元上最大误差的估计值并检验是否满足误差限。

2.4 网格细分与生成

误差检验时,若某单元上计算出来的误差不满足式(15),则该单元需进行细分。文献[14]采用在误差最大处(即 $e_{h, \max}^*$ 相应的坐标位置处)插入一个新的结点将原单元分为两个单元,并将该法称为消差法。对于高次元,单元上的误差常会出现多点最大值,消差法只在第一个最大值处插入结点,未能很好地兼顾误差尽量均匀的要求。为了对高次单元更加适用并使误差分布尽可能均匀,本文提出单元细分的均差法。

均差法的思想是在单元内误差平方 $(e_h^*)^2$ 所围面积的质心位置插入新的结点,使得新生成的两个单元上的 $(e_h^*)^2$ 对新结点处的一次矩相等^[21]。对于式(15),设其 $M-1$ 个内部分点的整体坐标为 $x_j (j = 1, 2, \dots, M-1)$, 则均差法中插入的新结点的整体坐标应为 $x_{av} = \sum_{j=1}^{M-1} x_j (e_{h,j}^*)^2 \left/ \left(\sum_{j=1}^{M-1} (e_{h,j}^*)^2 \right) \right.$; 考虑到网格的模数化划分,均差法最终选择 $M-1$ 个内部分点中最接近 x_{av} 的第 j_0 个分点作为新结点; j_0 按下式计算:

$$j_0 = \text{round} \left[\frac{\sum_{j=1}^{M-1} j (e_{h,j}^*)^2}{\sum_{j=1}^{M-1} (e_{h,j}^*)^2} \right]. \quad (16)$$

其中 $\text{round}(\cdot)$ 表示四舍五入取整。均差法综合考虑了单元内误差分布的形态,使细分后两个单元上的误差按照某种方式均等,无论对于低次元还是高次元都能给出分布合理、冗余较少的网格划分,因此为本文所采用。

2.5 基于真有限元解的单步法

按照上述的误差估计逐个单元进行误差检验,对于不通过的单元则采用均差法二分,遍历了所有单元之后便得到一个新的网格划分,本文将这一过程称为一次遍历。一次遍历后,某些单元内部插入了新的结点,为了获得新网格上的有限元的真解,需在新的网格上再次作有限元求解,然后便可以进行再一次遍历,直到所有单元都满足式(15)为止。本文将一次遍历后就重新进行有限元求解的方法称为单步法,将新网格的生成并完成有限元求解的过程称为一次自适应迭代步骤。单步法的每次遍历的对象都是真有限元解,自然合理,基本无冗余的网格划分,但是对于最终需要很密网格的问题,自适应迭代步骤较多,最占用时间的有限元求解的次数也较多。

2.6 基于拟有限元解的多步法

基于本文中以 u^* 代替 u 的基本思路,在一次遍历并得到新网格后,不马上重新求解真有限元解,而是利用 u^* 来构造新网格上的“拟有限元解”,记为 u^{h*} 。拟有限元解 u^{h*} 在原端结点 x_i 处保留原 u^h 的值,即 $u_i^{h*} = u_i^h$, 在新增结点 x_{j_0} 处取用 u^* 的值,即 $u_{j_0}^{h*} = u^*(x_{j_0})$ 。由于原单元上任意一点的 u^* 都和单元端结点的 u_i^h 在精度上具有相等的地位,因此新网格上“拟有限元解”的单元端结点的值也具有大致相等的超收敛精度,同时又都是对 u^* 的插值。获得了拟有限元解 u^{h*} 后,各个新单元可根据“拟有限元解”构造新的凝聚形函数及相应的超收敛解,然后便可进行再一次遍历;重复以上过程直到“拟有限元解”在所有单元上都满足误差限后,再进行真有限元求解。最后,直到“真有限元解”满足了误差限时停止计算。这就是多步法的自适应方案。多步法中多次遍历而不进行有限元求解,使得自适应步骤大为减少,对于大多数问题,多步法只需一两步自适应迭代即可,亦即只需进行一两次有限元求解,效率得到大幅提高。

3 基于 EEP 法凝聚格式的自适应求解算法

基于以上的讨论,可将基于 EEP 法凝聚格式的自适应求解的单步法和多步法的算法统一总结如下:

1) 对整体区域取一个初始网格 π_0 (通常单元数取 1 即可), 令 $\pi^* = \pi_0$, 并将其标记为需要真有限元解.

2) 对网格 π^* 中的新单元生成 m 次凝聚形函数:

(a) 按常规形成单元刚度矩阵 k^e 和荷载向量 P^e ;

(b) 参照式(8)生成向量 $\hat{v}_1 = \hat{k}^{-1}\hat{k}_1, \hat{v}_2 = \hat{k}^{-1}\hat{k}_{m+1}, \hat{v}_0 = \hat{k}^{-1}\hat{P}$ 以备用;

(c) 按式(13)生成凝聚形函数 $N_i (i = 1, 2)$ 以及泡状函数 N_0 .

3) 若不需要真有限元解, 则将拟有限元解设为当前的有限元解并继续下一步, 否则求真有限元解:

(a) 按式(11)生成凝聚后的单元刚度矩阵 k^e 、单元荷载向量 P^e ;

(b) 集成三对角的整体刚度矩阵并求得有限元解.

4) 逐单元按以下步骤进行遍历(误差检验和网格细分):

(a) 将单元等分为 M 个子区间, 对于 $M - 1$ 个内部分点, 按式(17) 计算其有限元解 u_j^h , 按式(4a) 计算其 EEP 凝聚格式的超收敛解 u_j^* , $j = 1, 2, \dots, M - 1$,

$$u^h = N_1 u_1^h + N_2 u_2^h + \hat{N} \hat{v}_0; \quad (17)$$

(b) 按式(15) 找出其最大误差 $e_{h, \max}^*$ 并检验是否满足误差限, 若满足则标记该单元为通过, 否则按均差法插入新结点并更新网格 π^* .

5) 如果所有单元均标记为通过, 单元数目并无增加, 则:

(a) 若有限元解为“拟有限元解”, 标记为需要“真有限元解”, 返回到步骤 2);

(b) 若有限元解为“真有限元解”, 则自适应求解结束;

(c) 否则继续下一步.

6) 若为单步法, 标记为需要真有限元解, 返回到步骤 2); 若为多步法, 标记为无需真有限元解, 按第 2.6 小节构造拟有限元解, 返回到步骤 2) .

4 数值算例

本节给出若干有代表性的数值算例, 包括奇异问题和高振荡问题. 算例中统一采用最大模对绝对误差进行控制; 初始网格统一取为 1 个单元; 统一地记 π^* 为自适应完成后的最终网格; 数值积分、均差法的数值计算的精度控制都远远超过给定误差限 T , 以排除它们可能引入的误差. 线性元不符合本文 $m > 1$ 的要求, 不包括在算例中. 如前所述, 无论单步法还是多步法, 均定义每经过一次新网格(初始网格除外) 上的真有限元求解为一步自适应迭代. 以下所有算例中, 多步法总是以一步自适应迭代即可完成计算, 所以只给出单步法所需的自适应迭代步数. 各个算例中, 还分别给出了最终网格中最大单元长度 h_{\max} 和最小单元长度 h_{\min} 以反映网格对问题的适应性.

例 1 定解条件为 $Lu = -u'' + u = 1, u(0) = 0, u'(1) = 0$, 其精确解为 $u = -(e^x + e^{2-x}) / (1 + e^2) + 1$. 给定误差限 $T = 10^{-7}$.

这是最简单的常数系数模型问题. 文献[14] 仅用线性元计算了本例, 本文采用 $m = 2 \sim 5$

次单元计算, 结果列于表 1; 单步法和多步法生成的最终网格完全相同, 该网格上有限元解的误差逐点满足给定的误差限. 三次元自适应求解的最终网格 π^* 的结点分布见表 2, π^* 上有限元解的误差分布如图 1 所示, 此时 EEP 凝聚格式超收敛解与精确解的最大误差 $\max |u - u^*|$ 为 10^{-11} 量级, 与误差限 $T = 10^{-7}$ 相比可以忽略不计, 说明以凝聚格式的 EEP 解近似精确解来估计有限元误差是合理而可靠的.

表 1 各次单元求解的结果 ($T = 10^{-7}$)

单元次数 m	最终单元数 N_e	$\max u - u^h / T$	h_{\max}	h_{\min}	单步法自适应步数 N_a
2	44	0.968	0.062 5	0.015 6	6
3	11	0.958	0.125 0	0.062 5	4
4	4	0.149	0.250 0	0.250 0	2
5	2	0.136	0.500 0	0.500 0	1

表 2 三次元最终网格 π^* 的端结点分布 ($m = 3$)

x_i	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
π^*	0.000 0	0.062 5	0.125 0	0.187 5	0.250 0	0.312 5
x_i	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}
π^*	0.375 0	0.500 0	0.625 0	0.750 0	0.875 0	1.000 0

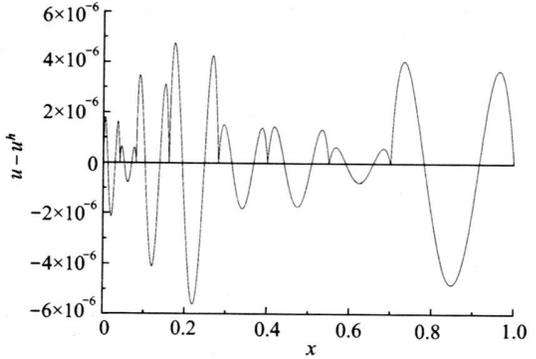
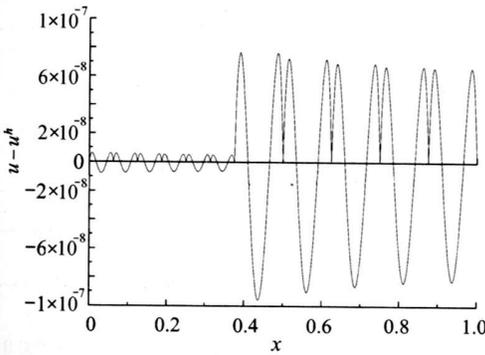


图 1 三次元最终网格 π^* 上的误差分布图

图 2 三次元最终网格 π^* 上的误差分布图

例 2 定解条件为 $Lu = -((x + \delta)^{1/10} u')' + u = f, u(0) = \delta^{1/2}, u(1) = (1 + \delta)^{1/2}$; 精确解 $u = (x + \delta)^{1/2}, f$ 由微分方程导出. 取 $\delta = 1/10$. 给定误差限 $T = 10^{-5}$.

表 3 各次单元求解的结果 ($T = 10^{-5}$)

单元次数 m	最终单元数 N_e	$\max u - u^h / T$	h_{\max}	h_{\min}	单步法自适应步数 N_a
2	20	0.969	0.150 0	0.016 0	5
3	8	0.560	0.300 0	0.040 0	4
4	5	0.573	0.300 0	0.080 0	3
5	3	0.421	0.600 0	0.160 0	2

这是一个变系数的问题, Babuska 在文献[1]中用其做一维有限元法后验误差估计研究. 采用 $m = 2 \sim 5$ 次单元的计算结果列于表 3, 最终网格上有限元解的误差全面满足给定误差限的要求. 与例 1 类似, 单步法和多步法仍然生成相同的网格, 多步法只需一步自适应迭代, 效率更高. 三次元求解的最终网格 π^* 的结点分布如表 4, 其上有限元解的误差分布见图 2, 此

时 $\max |u - u^*|$ 的量级为 10^{-9} , 可见用超收敛解代替精确解是合理而可靠的.

表 4 三次元最终网格 π^* 的端结点分布 ($m = 3$)

x_i	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
π^*	0.000 0	0.040 0	0.080 0	0.160 0	0.280 0	0.400 0	0.550 0	0.700 0	1.000 0

例 3 定解条件为 $Lu = -u'' + u = f, u(0) = 0, u(1) = 0$. 令精确解 $u = \sqrt{x} - x, f$ 由微分方程导出. 给定误差限 $T = 10^{-3}$.

这是一个典型的奇异问题, 导数在 $x = 0$ 处奇异. 采用 $m = 2 \sim 5$ 次单元的计算结果列于表 5, 网格上有限元解的误差全面满足给定误差限的要求. 本例中单步法与多步法仍然生成相同的网格, 显然只经历一步自适应迭代的多步法的效率更高. 三次元自适应求解的最终网格 π^* 见表 6, 其上有限元解的误差分布如图 3, 此时超收敛解误差的数量级为 10^{-7} , 超收敛解远比有限元解逼近精确解.

图 3 中前两个单元的误差放大图如图 4 所示, 左端的第一个单元长度最小, 但具有最大误差, 本文的自适应方法很好地实现了对奇异解的性态的自适应性. 值得一提的是, 本例如果采用 COLSYS 程序的默认配置^[7]求解, 只对解函数控制误差(导数奇异, 无法控制误差), 其解最终并不能全面满足误差限要求. 如果要改善其结果, 必须人为提供左端相当密集的初始网格或非均匀网格.

表 5 各次单元求解的结果 ($T = 10^{-3}$)

单元次数 m	最终单元数 N_e	$\max u - u^h / T$	h_{\max}	h_{\min}	单步法自适应步数 N_a
2	13	0.914	0.356 4	4.93×10^{-5}	9
3	9	0.917	0.680 0	1.10×10^{-4}	8
4	9	0.611	0.690 0	8.53×10^{-5}	8
5	8	0.859	0.700 0	2.66×10^{-4}	7

表 6 三次元最终网格 π^* 的端结点分布 ($m = 3$)

x_i	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
π^*	0.000 0	1.10×10^{-4}	3.44×10^{-4}	0.001 1	0.003 4	0.010 5	0.032 8	0.102 4	0.320 0	1.000 0

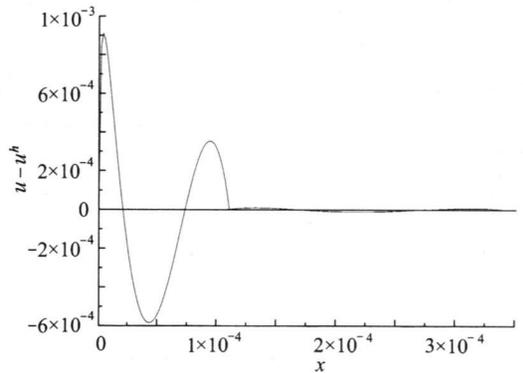
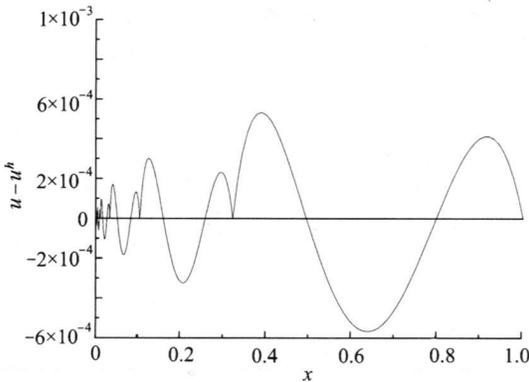


图 3 三次元最终网格 π^* 上有限元解的误差分布图 图 4 左端两个单元有限元解的误差分布图

例 4 定解条件同例 3. 令精确解 $u = 10000x^{100}, f$ 和 u 两端的非齐次边界条件由 u 导出. u 的分布如图 5 所示, 在大部分区域幅值较小且变化缓慢, 却在右端急剧上升, 最大幅值达到

10 000. 相比于此, 给定较为苛刻的误差限 $T = 0.005$.

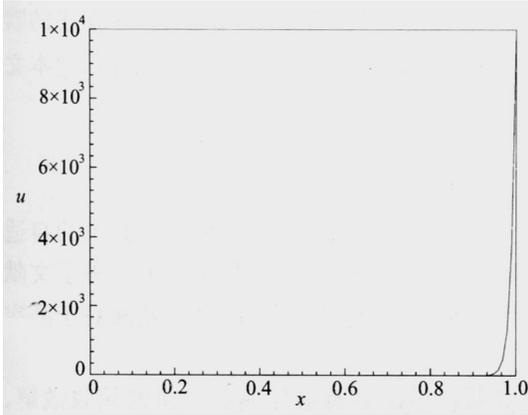


图 5 精确解 u 图

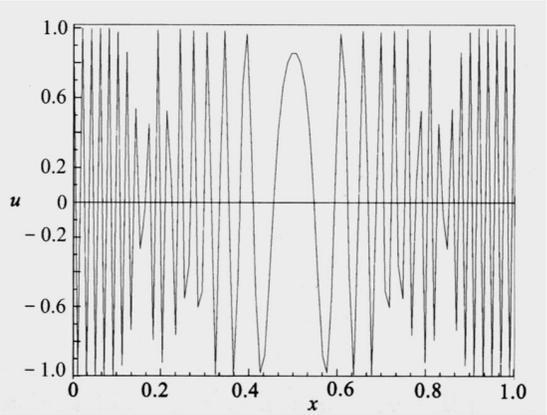


图 6 精确解 u 图

文献[14]采用 $m = 2 \sim 4$ 次元计算了本例. 采用本文的单步法和多步法求解的各次元自适应结果如表 7 所示, 其中也给出了文献[14]的最终单元数. 本文方法不仅使有限元解全面满足误差限, 而且最终单元数比文献[14]大为减少, 次数越高减少越多, 效率大幅提高. 对于二次元, 单步法经历了 10 次自适应迭代, 所得单元数目只比多步法略少几个, 多步法仍不失其高效.

数值结果还表明, 最终的网格结点分布自动地左疏右密, 自动适应了精确解在右端的剧烈变化. 而求解器 COLSYS 在本例的表现与例 3 相同, 采用常规的自适应求解亦不能获得全面满足误差限的解答.

表 7 各阶次元求解的结果 ($T = 0.005$)

求解方法	单元次数 m	自适应步数 N_a	最终单元数 N_e		$\max u - u^h $	h_{\max}	h_{\min}	单元数目减少率 $r/(%)$
			本文	文献[14]				
多步法	2	1	114	182	0.004 86	0.091 3	2.12×10^{-4}	37.4
	3	1	32	69	0.004 87	0.730 0	9.35×10^{-4}	53.6
	4	1	17	57	0.002 84	0.730 0	4.05×10^{-3}	70.2
单步法	2	10	107	182	0.004 86	0.365 0	2.12×10^{-4}	41.2
	3	8	32	69	0.004 87	0.730 0	9.35×10^{-4}	53.6
	4	6	17	57	0.002 84	0.730 0	4.05×10^{-3}	70.2

表 8 本文各阶次元求解的结果 ($T = 0.005$)

单元次数 m	最终单元数 N_e		$\max u - u^h $	h_{\max}	h_{\min}	单步法自适应步数 N_a	单元数目减少率 $r/(%)$
	本文	文献[14]					
2	278	351	0.004 99	0.022 7	1.45×10^{-3}	9	20.8
3	150	245	0.004 87	0.039 5	3.02×10^{-3}	8	38.8
4	82	236	0.004 06	0.032 7	6.26×10^{-3}	7	65.3

例 5 定解条件同例 3. 令精确解 $u = \cos(100\sin(\pi x))$, f 和 u 两端的边界条件由 u 导出. u 的分布如图 6 所示, 具有高度振荡性. 给定误差限 $T = 0.005$.

文献[14]采用 $m = 2 \sim 4$ 次元计算了本例. 本文采用单步法和多步法自适应求解的结果

相同,列于表 8. 同样,本文自适应策略求得的最终网格上,单元数目比文献[14]大为减少,且单元次数越高,单元数目减少得越多,自适应优势越为明显. 本例如果采用 COLSYS 程序的默认配置^[7]求解,最终需 256 个单元才能求得满足相同误差限的解,计算量和计算速度都比本文方法稍有逊色.

5 结 语

基于具有最佳超收敛阶的 EEP 超收敛解,本文对一维有限元提出了一种新型高效的自适应求解算法. 本法使用 EEP 凝聚格式的超收敛解估计有限元解的误差,从本质上改进了文献[14]中基于 EEP 简约格式的方法,理论上更加简明清晰,算法上更加高效实用,尤其对于高次元,效率极高,更好地实现了第 2.1 小节中预定的目标.

本法的成功,最重要的基础是 EEP 法凝聚格式所提供的具有最佳超收敛阶的超收敛解,相信随着该类 EEP 法在各类有限元问题中的推广应用,其相应的自适应求解方法也将随之延伸拓展;目前已经在 C^1 有限元和 Galerkin 有限元中取得一系列的成功,将以另文介绍.

[参 考 文 献]

- [1] Babuska I, Rheinboldt W C. A posteriori error analysis of finite element method for one- dimensional problems[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1981, 18(3): 565- 589.
- [2] Zienkiewicz O C, Zhu J Z. The superconvergence patch recovery (SPR) and a posteriori error estimates, Part 1: the recovery technique[J]. Internat J Numer Methods Engrg, 1992, 33(7): 1331- 1364.
- [3] Zienkiewicz O C, Zhu J Z. The superconvergence patch recovery (SPR) and a posteriori error estimates, Part 2: error estimates and adaptivity[J]. Internat J Numer Methods Engrg, 1992, 33(7): 1365 - 1382.
- [4] 林群,朱起定. 有限元的预处理和后处理理论[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1994.
- [5] 陈传森. 有限元超收敛构造理论[M]. 长沙: 湖南科学技术出版社, 2002.
- [6] Ascher U, Christiansen J, Russell R D. Algorithm 569, COLSYS: Collocation software for boundary value ODEs[J]. ACM Trans Math Software, 1981, 7(2): 223- 229.
- [7] YUAN Si. The Finite Element Method of Lines [M]. Beijing- New York: Science Press, 1993.
- [8] 袁骝. 从矩阵位移法看有限元应力精度的损失与恢复[J]. 力学与实践, 1998, 20(4): 1- 6.
- [9] 袁骝,王枚. 一维有限元后处理超收敛解答计算的 EEP 法[J]. 工程力学, 2004, 21(2): 1- 9.
- [10] 袁骝,王枚,和雪峰. 一维 C^1 有限元超收敛解答计算的 EEP 法[J]. 工程力学, 2006, 23(2): 1- 9.
- [11] 王玫,袁骝. Timoshenko 梁单元超收敛结点应力的 EEP 法计算[J]. 应用数学和力学, 2004, 25 (11): 1224- 1134.
- [12] 袁骝,林永静. 二阶非自伴两点边值问题 Galerkin 有限元后处理超收敛解答计算的 EEP 法[J]. 计算力学学报, 2007, 24(2): 142- 147.
- [13] 袁骝,王枚,王旭. 二维有限元线法超收敛解答计算的 EEP 法[J]. 工程力学, 2007, 24(1): 1- 10.
- [14] 袁骝,和雪峰. 基于 EEP 法的一维有限元自适应求解[J]. 应用数学和力学, 2006, 27(11): 1280- 1291.
- [15] 赵庆华,周叔子,朱起定. 一维有限元后处理的 EEP 的数学分析[J]. 应用数学和力学, 2007, 28 (4): 401- 405.
- [16] 袁骝,王旭,邢沁妍,等. 具有最佳超收敛阶的 EEP 法计算格式: I 算法公式[J]. 工程力学, 2007, 24(10): 1- 5.
- [17] 袁骝,邢沁妍,王旭,等. 具有最佳超收敛阶的 EEP 法计算格式: II 数值算例[J]. 工程力学, 2007,

- 24(11): 1– 5.
- [18] 袁昶, 赵庆华. 具有最佳超收敛阶的 EEP 法计算格式: III 数学证明[J]. 工程力学, 2007, 24(12): 1– 6.
- [19] Douglas J, Dupont T. Galerkin approximations for the two point boundary problems using continuous piecewise polynomial spaces[J]. Numerical Mathematics, 1974, 22(2): 99– 109.
- [20] Strang G, Fix G. An Analysis of the Finite Element Method [M]. London: Prentice– Hal, 1973.
- [21] 王旭. 基于 EEP 法的一维有限元与二维有限元线法自适应分析 [D]. 博士学位论文. 北京: 清华大学, 2007.

Self– Adaptive Strategy for One– Dimensional Finite Element Method Based on EEP Method With Optimal Super– Convergence Order

YUAN Si, XING Qin– yan, WANG Xu, YE Kang– sheng

(Department of Civil Engineering, Tsinghua University; Key Laboratory Structural Engineering and Vibration of China Education Ministry, Beijing 100084, P. R. China)

Abstract: Based on the newly– developed element energy projection (EEP) method with optimal super– convergence order for computation of super– convergent results, an improved self– adaptive strategy for one– dimensional finite element method (FEM) was proposed. In the strategy, a posteriori errors were estimated by comparing FEM solutions to EEP super– convergent solutions with optimal order of super– convergence, meshes were refined by using error– averaging method, and quasi– FEM solutions were used to replace true FEM solutions in the adaptive process. This strategy has been found to be simple, clear, efficient and reliable. For most of the problems, only one adaptive step is needed to produce the required FEM solutions which pointwise satisfy the user specified error tolerances in max– norm. Taking the elliptical ordinary differential equation of second order as the model problem, the fundamental idea, implementation strategy and computational algorithm were described and representative numerical examples were given to show the effectiveness and reliability of the proposed approach.

Key words: finite element method (FEM); self– adaptive solution; super– convergence; optimal convergence order; element energy projection; condensed shape functions