

非线性渗流耦合系统的数值方法及其应用*

袁益让, 梁 栋, 芮洪兴, 杜 宁, 王文洽

(山东大学 数学研究所, 济南 250100)

(李家春推荐)

摘要: 对非线性二相渗流耦合系统提出修正迎风分步差分格式, 利用变分形式、归纳法假定、高阶差分算子的分解、微分方程的先验估计理论和技巧, 得到收敛性的最佳阶误差估计. 该方法已成功应用于防治海水入侵主要工程后效预测与调控模式的生产实践中.

关键词: 非线性耦合; 迎风分步; 收敛性; 海水入侵; 后效和调控

中图分类号: O241.82 文献标识码: A

引 言

本文研究海水入侵主要工程后效与调控模式中提出的三维非线性二相渗流耦合系统的初边值问题^[1-3]:

水头方程:

$$S_s \frac{\partial H}{\partial t} - \operatorname{div}(\mathbf{K}(\operatorname{grad} H - \eta \mathbf{e}_3)) = - \phi \eta \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\rho}{\rho_0} q, \\ (x, y, z)^T \in \Omega; t \in J = (0, T], \quad (1)$$

式中 S_s 为贮水率, $H = p/(\rho_0 g) - z$ 为水头函数, p 是压力函数, ρ_0 为参考水(淡水)密度, g 为重力加速度, z 为含水层深度, ρ 为混合溶液的密度, 仅依赖于盐份浓度 c , $\rho = \rho_0(1 + \varepsilon c/c_s)$, c_s 为最大密度 ρ_s 对应的浓度, ε 为密度差率, $\varepsilon = (\rho_s - \rho_0)/\rho_0$. $\mathbf{K} = (\rho_g/\mu)\mathbf{K}$, μ 为流体粘度,

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_1 & 0 & 0 \\ 0 & K_2 & 0 \\ 0 & 0 & K_3 \end{bmatrix}$$

为渗透率张量. η 为密度耦合系数, $\eta = \varepsilon/c_s$. $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)^T$, ϕ 为介质孔隙度, q 为源(汇)流速.

盐份浓度方程:

* 收稿日期: 2007-09-20; 修订日期: 2008-03-24

基金项目: 国家重点基础研究专项经费资助项目(G19990328); 国家攻关基金资助项目(20050200069); 国家自然科学基金资助项目(10771124; 10372052); 国家教育部博士点基金资助项目(20030422047)

作者简介: 袁益让(1935-), 男, 江苏靖江人, 教授(联系人. Tel: + 86-531-88364732; Fax: + 86-531-88564652; E-mail: yryuan@sdu.edu.cn).

$$\phi \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial c}{\partial t} = \text{div}(\phi \mathbf{D} \text{grad} c) - \mathbf{u} \cdot \text{grad} c + q(C^* - c),$$

$$(x, y, z)^T \in \Omega; t \in J, \quad (2)$$

式中 c 为含盐浓度函数, C^* 为源汇项 Cl^- 的浓度, 是已知函数.

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_1 & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & 0 \\ 0 & 0 & D_3 \end{bmatrix}$$

为弥散系数张量. \mathbf{u} 为 Darcy 速度, $\mathbf{u} = (-\rho_0/\rho) \mathbf{K}(\text{grad} H - \tau \mathbf{e}_3)$.

初边值条件:

初始条件为

$$H(x, y, z, 0) = H_0(x, y, z), \quad c(x, y, z, 0) = c_0(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \Omega. \quad (3)$$

边界条件分为 2 类. 已知 Cl^- 浓度及水头可给出第 1 类边界条件

$$H(x, y, z, t) = h(x, y, z, t), \quad c(x, y, z, t) = g(x, y, z, t),$$

$$(x, y, z) \in \Gamma_1; t \in J, \quad (4a)$$

或不渗透边界可给出第 2 类边界条件

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{D} \text{grad} c \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (x, y, z) \in \Gamma_2; t \in J. \quad (4b)$$

此处 \mathbf{n} 为边界的单位外法向量.

对于平面不可压缩两相渗流驱动问题, 在周期性假定下, 著名数学家、油藏数值模拟创始人 Douglas, Ewing, Wheeler, Russell 等提出著名的特征差分方法和特征有限元法, 并给出了误差估计^[4-6]. 他们将特征线法和标准有限差分法或有限元法相结合, 真实的反映出对流扩散方程的一阶双曲特性, 减少截断误差. 克服数值振荡和弥散, 大大提高计算的稳定性和精确度. 对可压缩两相渗流驱动问题, Douglas 等学者同样在周期性假定下提出二维可压缩二相驱动问题的“微小压缩”数学模型、数值方法和分析^[7-8], 开创了现代数值模拟这一新领域^[8-9].

对于对流扩散问题, 著名学者 Ewing, Lazarov 等人提出迎风差分格式^[10-11], 去克服数值解的振荡, 同时避免特征差分方法在对靠近边界网点的计算复杂性. 虽然 Douglas, Peaceman 曾用分数步方法于不可压缩油水二相渗流驱动问题, 并取得成功^[12-13], 但在理论分析时出现实质性困难, 他们用 Fourier 分析方法仅能对常系数的情形证明稳定性和收敛性的结果, 此方法不能推广到变系数的情况^[14-15]. 本文从生产实际出发, 对可压缩的海水入侵数值模拟, 为克服计算复杂性, 提出一类修正迎风分数步差分格式, 修正迎风法可将空间的计算精度提高到二阶, 且可克服数值振荡和弥散, 分数步法将三维问题化为连续解 3 个一维问题, 且可用追赶法求解, 大大减少计算工作量, 使大规模科学与工程计算成为可能. 本文开创性将此二者有机结合, 即我们提出的一类实用三维计算渗流力学工程方法. 应用变分形式、能量方法、差分算子乘积交换性理论、高阶差分算子的分解、微分方程先验估计和特殊技巧, 得到了最佳阶 l^2 模误差估计, 成功地解决了 Douglas, Ewing 所提的著名问题^[8, 10, 12]. 据目前的文献^[8, 16] 还未见这方面成功报导. 应用本文的方法已成功地应用到防治海水入侵主要工程后效与调控模式的生产实践中^①.

通常问题是正定的, 即满足

① 山东大学数学研究所: 防治海水入侵主要工程后效与调控模式研究, 1995, 11.

$$0 < K^* \leq K_i(c) \leq K^*, \quad 0 < D^* \leq D_i(x, t) \leq D^*, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$0 < \phi^* \leq \phi(x) \leq \phi^*, \quad \left| \frac{\partial K_i(c)}{\partial c} \right| \leq K^*, \quad (5)$$

此处 K^* 、 K^* 、 D^* 、 D^* 、 ϕ^* 、 ϕ^* 均为正常数。

假定问题(1)~(5)的精确解是正则的,即满足

$$H, c \in L^\infty(W^{4,\infty}), \quad \frac{\partial^2 H}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 c}{\partial t^2} \in L^\infty(L^\infty).$$

本文中记号 M 和 ε 分别表示普通正常数和普通小正数,在不同处具有不同的含意。

1 修正迎风分数步格式

为了用差分方法求解,用网格区域 Ω_h 代替 Ω . 在空间 (x, y, z) 上 x 方向步长为 h_1 , y 方向步长为 h_2 , z 方向步长为 h_3 , $x_i = ih_1$, $y_j = jh_2$, $z_k = kh_3$, 如图 1 所示。

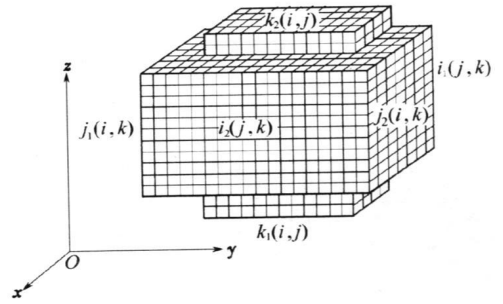


图 1 网格区域 Ω_h 示意图

$$\Omega_h = \left\{ (x_i, y_j, z_k) \left| \begin{array}{l} i_1(j, k) < i < i_2(j, k) \\ j_1(i, k) < j < j_2(i, k) \\ k_1(i, j) < k < k_2(i, j) \end{array} \right. \right\},$$

用 Ω_h 代替 Ω , 用 $\partial \Omega_h$ 表示 Ω_h 的边界^[5].

$$\delta_x(K(C_h^n) \delta_x H_h^{n+1})_{ijk} = h_1^{-2} [K(C_h^n)_{i+1/2, jk} (H_h^{n+1, i+1, jk} - H_h^{n+1, ij, k}) - K(C_h^n)_{i-1/2, jk} (H_h^{n+1, ij, k} - H_h^{n+1, i-1, jk})], \quad (6a)$$

$$\delta_y(K(C_h^n) \delta_y H_h^{n+1})_{ijk} = h_2^{-2} [K(C_h^n)_{i, j+1/2, k} (H_h^{n+1, i, j+1, k} - H_h^{n+1, ij, k}) - K(C_h^n)_{i, j-1/2, k} (H_h^{n+1, ij, k} - H_h^{n+1, i, j-1, k})], \quad (6b)$$

$$\delta_z(K(C_h^n) \delta_z H_h^{n+1})_{ijk} = h_3^{-2} [K(C_h^n)_{ij, k+1/2} (H_h^{n+1, ij, k+1} - H_h^{n+1, ij, k}) - K(C_h^n)_{ij, k-1/2} (H_h^{n+1, ij, k} - H_h^{n+1, ij, k-1})], \quad (6c)$$

$$\begin{aligned} \delta_x(K(C_h^n) \delta_x H_h^{n+1})_{ijk} &= \delta_x(K(C_h^n) \delta_x H_h^{n+1})_{ijk} + \\ &\delta_y(K(C_h^n) \delta_y H_h^{n+1})_{ijk} + \delta_z(K(C_h^n) \delta_z H_h^{n+1})_{ijk}, \end{aligned} \quad (7)$$

记 H_h^n, ij, k 为 $H(x_{ijk}, t^n)$ 的差分, C_h^n, ij, k 为 $c(x_{ijk}, t^n)$ 的差分. 设 t^n 时刻的 C_h^n, H_h^n 已知, 寻求下一时刻的差分 C_h^{n+1}, H_h^{n+1} . 为叙述简便, 这里仅讨论第一边值问题。

对盐份浓度方程(2)的修正迎风分数步差分格式

$$\beta(C_h^n, ij, k) \frac{C_h^{n+1/3, ij, k} - C_h^n, ij, k}{\Delta t} = \left[1 + \frac{h_1}{2} |U_1^n| D_1^{-1} \right]_{ijk}^{-1} \delta_x(D_1 \delta_x C_h^{n+1/3})_{ijk} + \left[1 + \frac{h_2}{2} |U_2^n| D_2^{-1} \right]_{ijk}^{-1} \delta_y(D_2 \delta_y C_h^n)_{ijk} + \left[1 + \frac{h_3}{2} |U_3^n| D_3^{-1} \right]_{ijk}^{-1} \delta_z(D_3 \delta_z C_h^n)_{ijk} - \delta_{U_1^n, x} C_h^n, ij, k - \delta_{U_2^n, y} C_h^n, ij, k - \delta_{U_3^n, z} C_h^n, ij, k + q_{ijk}^n (C_{ijk}^{*, n} - C_h^n, ij, k), \quad (8a)$$

$$i_1(j, k) < i < i_2(j, k), \quad (8b)$$

$$C_h^{n+1/3, ij, k} = g_{ijk}^{n+1}, \quad x_{ijk} \in \partial \Omega_h, \quad (8b)$$

此处 $\beta(C) = \phi_0 / \rho$, $D_i = \phi D_i$, $i = 1, 2, 3$. 近似 Darcy 速度 $U^n = (U_1^n, U_2^n, U_3^n)^T$ 按下述公式

计算:

$$\begin{aligned}
U_{1, \bar{y}k}^n &= -\frac{\rho_0}{2} \left\{ \left[\frac{K_1(C_h^n)}{\rho(C_h^n)} \right]_{i+1/2, jk} \frac{H_{h, i+1, jk}^n - H_{h, \bar{y}k}^n}{h_1} + \right. \\
&\quad \left. \left[\frac{K_1(C_h^n)}{\rho(C_h^n)} \right]_{i-1/2, jk} \frac{H_{h, \bar{y}k}^n - H_{h, i-1, jk}^n}{h_1} \right\}, \\
U_{2, \bar{y}k}^n &= -\frac{\rho_0}{2} \left\{ \left[\frac{K_2(C_h^n)}{\rho(C_h^n)} \right]_{i, j+1/2, k} \frac{H_{h, i, j+1, k}^n - H_{h, \bar{y}k}^n}{h_2} + \right. \\
&\quad \left. \left[\frac{K_2(C_h^n)}{\rho(C_h^n)} \right]_{i, j-1/2, k} \frac{H_{h, \bar{y}k}^n - H_{h, i, j, k}^n}{h_2} \right\}, \\
U_{3, \bar{y}k}^n &= -\frac{\rho_0}{2} \left\{ \left[\frac{K_3(C_h^n)}{\rho(C_h^n)} \right]_{\bar{y}, k+1/2} \frac{H_{h, \bar{y}, k+1}^n - H_{h, \bar{y}k}^n}{h_3} + \right. \\
&\quad \left. \left[\frac{K_3(C_h^n)}{\rho(C_h^n)} \right]_{\bar{y}, k-1/2} \frac{H_{h, \bar{y}k}^n - H_{h, \bar{y}, k-1}^n}{h_3} \right\}. \\
\left(1 + \frac{h_1}{2} |U_1^n| D_1^{-1} \right)_{\bar{y}k}^{-1} \delta_x (D_1 \delta_x C_h^{n+1/3})_{ijk} &= \\
\left(1 + \frac{h_1}{2} |U_1^n| D_1^{-1} \right)_{\bar{y}k}^{-1} h_1^{-2} [D_{1, i+1/2, jk} (C_{h, i+1, jk}^{n+1/3} - C_{h, \bar{y}k}^{n+1/3}) - \\
D_{1, i-1/2, jk} (C_{h, \bar{y}k}^{n+1/3} - C_{h, i-1, jk}^{n+1/3})], & \\
\left(1 + \frac{h_2}{2} |U_2^n| D_2^{-1} \right)_{\bar{y}k}^{-1} \delta_y (D_2 \delta_y C_h^n)_{ijk} &= \\
\left(1 + \frac{h_2}{2} |U_2^n| D_2^{-1} \right)_{\bar{y}k}^{-1} h_2^{-2} [D_{2, i, j+1/2, k} (C_{h, i, j+1, k}^n - C_{h, \bar{y}k}^n) - \\
D_{2, i, j-1/2, k} (C_{h, \bar{y}k}^n - C_{h, i, j-1, k}^n)], & \\
\left(1 + \frac{h_3}{2} |U_3^n| D_3^{-1} \right)_{\bar{y}k}^{-1} \delta_z (D_3 \delta_z C_h^n)_{ijk} &= \\
\left(1 + \frac{h_3}{2} |U_3^n| D_3^{-1} \right)_{\bar{y}k}^{-1} h_3^{-2} [D_{3, \bar{y}, k+1/2} (C_{h, \bar{y}, k+1}^n - C_{h, \bar{y}k}^n) - \\
D_{3, \bar{y}, k-1/2} (C_{h, \bar{y}k}^n - C_{h, \bar{y}, k-1}^n)], & \\
\beta(C_{h, \bar{y}k}^n) \frac{C_{h, \bar{y}k}^{n+2/3} - C_{h, \bar{y}k}^{n+1/3}}{\Delta t} &= \\
\left(1 + \frac{h_2}{2} |U_2^n| D_2^{-1} \right)_{\bar{y}k}^{-1} \delta_y (D_2 \delta_y (C_h^{n+2/3} - C_h^n))_{ijk}, & \\
j_1(i, k) < j < j_2(i, k), & \quad (9a)
\end{aligned}$$

$$C_{h, \bar{y}k}^{n+2/3} = g_{\bar{y}k}^{n+1}, \quad x_{ijk} \in \partial \Omega_h, \quad (9b)$$

$$\begin{aligned}
\beta(C_{h, \bar{y}k}^n) \frac{C_{h, \bar{y}k}^{n+1} - C_{h, \bar{y}k}^{n+2/3}}{\Delta t} &= \left(1 + \frac{h_3}{2} |U_3^n| D_3^{-1} \right)_{\bar{y}k}^{-1} \delta_z (D_3 \delta_z (C_h^{n+1} - C_h^n))_{ijk}, \\
k_1(i, j) < k < k_2(i, j), & \quad (10a)
\end{aligned}$$

$$C_{h, \bar{y}k}^{n+1} = g_{\bar{y}k}^{n+1}, \quad x_{\bar{y}k} \in \partial \Omega_h, \quad (10b)$$

此处

$$\begin{aligned} \delta U_{1,x}^n c_{ijk} &= U_{1,ijk}^n [H(U_{1,ijk}^n) D_{1,\bar{y}k}^{-1} \cdot D_{1,i-1/2,jk} \delta_x + (1 - H(U_{1,\bar{y}k}^n)) D_{1,\bar{y}k}^{-1} \cdot D_{1,i+1/2,jk} \delta_x] c_{\bar{y}k}, \\ \delta U_{2,y}^n c_{ijk} &= U_{2,ijk}^n [H(U_{2,ijk}^n) D_{2,\bar{y}k}^{-1} \cdot D_{2,i,j-1/2,k} \delta_y + (1 - H(U_{2,ijk}^n)) D_{2,\bar{y}k}^{-1} \cdot D_{2,i,j+1/2,k} \delta_y] c_{\bar{y}k}, \\ \delta U_{3,z}^n c_{ijk} &= U_{3,ijk}^n [H(U_{3,ijk}^n) D_{3,\bar{y}k}^{-1} \cdot D_{3,ij,k-1/2} \delta_z + (1 - H(U_{3,ijk}^n)) D_{3,\bar{y}k}^{-1} \cdot D_{3,ij,k+1/2} \delta_z] c_{\bar{y}k}, \\ H(z) &= \begin{cases} 1, & z \geq 0, \\ 0, & z < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

对于流动方程(1)的分数步差分格式

$$\begin{aligned} S_{s,\bar{y}k} \frac{H_{h,\bar{y}k}^{n+1/3} - H_{h,\bar{y}k}^n}{\Delta t} &= \delta_x (K_1(C_h^n) \delta_x H_h^{n+1/3})_{\bar{y}k} + \delta_y (K_2(C_h^n) \delta_y H_h^n)_{\bar{y}k} + \\ &\delta_z (K_3(C_h^n) \delta_z H_h^n)_{\bar{y}k} - \eta_{\phi_{\bar{y}k}} \frac{C_{h,\bar{y}k}^{n+1} - C_{h,\bar{y}k}^n}{\Delta t} + \frac{\rho(C_{h,\bar{y}k}^n)}{\rho_0} q_{\bar{y}k}^n - \\ &\eta \delta_z (K_3(C_h^n) C_h^n)_{\bar{y}k}, \quad i_1(j,k) < i < i_2(j,k), \end{aligned} \tag{11a}$$

$$H_{h,\bar{y}k}^{n+1/3} = h_{\bar{y}k}^{n+1}, \quad x_{\bar{y}k} \in \partial \Omega_h, \tag{11b}$$

$$\begin{aligned} S_{s,\bar{y}k} \frac{H_{h,\bar{y}k}^{n+2/3} - H_{h,\bar{y}k}^{n+1/3}}{\Delta t} &= \delta_y (K_2(C_h^n) \delta_y (H_h^{n+2/3} - H_h^n))_{\bar{y}k}, \\ &j_1(i,k) < j < j_2(i,k), \end{aligned} \tag{12a}$$

$$H_{h,\bar{y}k}^{n+2/3} = h_{\bar{y}k}^{n+1}, \quad x_{\bar{y}k} \in \partial \Omega_h, \tag{12b}$$

$$\begin{aligned} S_{s,\bar{y}k} \frac{H_{h,\bar{y}k}^{n+1} - H_{h,\bar{y}k}^{n+2/3}}{\Delta t} &= \delta_z (K_3(C_h^n) \delta_z (H_h^{n+1} - H_h^n))_{\bar{y}k}, \\ &k_1(i,j) < k < k_2(i,j), \end{aligned} \tag{13a}$$

$$H_{h,\bar{y}k}^{n+1} = h_{\bar{y}k}^{n+1}, \quad x_{\bar{y}k} \in \partial \Omega_h. \tag{13b}$$

初始逼近

$$C_{h,\bar{y}k}^0 = c_0(x_{\bar{y}k}), \quad H_{h,\bar{y}k}^0 = H_0(x_{\bar{y}k}), \quad x_{\bar{y}k} \in \partial \Omega_h. \tag{14}$$

分数步迎风差分格式的计算程序是: 当 $t = t^n$ 时刻的 $\{H_{h,ijk}^n, C_{h,ijk}^n\}$ 已知时, 首先由式(8a)、(8b) 沿 x 方向用追赶法求出过渡层的解 $\{C_{h,\bar{y}k}^{n+1/3}\}$, 再由式(9a)、(9b) 沿 y 方向用追赶法求出过程层的解 $\{C_{h,\bar{y}k}^{n+2/3}\}$, 最后由式(10a)、(10b) 沿 z 方向用追赶法求出解 $\{C_{h,\bar{y}k}^{n+1}\}$. 其次由式(11a)、(11b) 用追赶法求出 $\{H_{h,ijk}^{n+1/3}\}$, 再由式(12a)、(12b) 沿 y 方向求出 $\{H_{h,\bar{y}k}^{n+2/3}\}$, 最后由式(13a)、(13b) 式沿 z 方向求出解 $\{H_{h,\bar{y}k}^{n+1}\}$. 由正定性条件(5), 格式(8)~(12)的解存在且唯一.

2 收敛性分析

为分析简便, 设区域 $\Omega = \{[0, 1]\}^3$, $h = 1/N$, $x_{\bar{y}k} = (ih, jh, kh)^T$, $t^n = n \Delta t$, $W(x_{\bar{y}k}, t^n) = W_{\bar{y}k}^n$. 设 $\pi = H - H_h$, $\xi = c - C_h$, 此处 H 和 c 为问题(1)~(5)的精确解, H_h 和 C_h 为格式(8)~(13)的差分解.

定理 假定问题(1)~(5)的精确解满足光滑性条件

$$H, c \in L^\infty(W^4, \infty), \quad \frac{\partial^2 H}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 c}{\partial t^2} \in L^\infty(L^\infty).$$

采用修正迎风分数步差分格式(8)~(13)逐层计算, 假定剖分参数满足 $\Delta t = O(h^2)$, 则下述误差估计式成立:

$$\|H - H_h\|_{L^\infty(J; h^1)} + \|c - C_h\|_{L^\infty(J; h^1)} + \|d_t(H - H_h)\|_{L^2(J; l^2)} + \|d_t(c - C_h)\|_{L^2(J; l^2)} \leq M^* \left\{ \Delta t + h^2 \right\}, \quad (15)$$

此处 $\|g\|_{L^\infty(J; X)} = \sup_{n \Delta t \leq T} \|f^n\|_X$, $\|g\|_{L^2(J; X)} = \sup_{N \Delta t \leq T} \left\{ \sum_{n=0}^N \|g^n\|_X^2 \Delta t \right\}^{1/2}$,

常数 M^* 依赖于 H 、 c 及其导函数的范数.

证明 首先研究浓度方程, 由式(8)~(10) 消去 $C_h^{n+1/3}$ 、 $C_h^{n+2/3}$ 可得下述等价差分方程:

$$\begin{aligned} \beta(C_h^n, ij k) \frac{C_h^{n+1, \bar{y}k} - C_h^n, \bar{y}k}{\Delta t} - \left\{ \left(1 + \frac{h}{2} | U_1^n | D_1^{-1} \right)^{-1} \delta_x (D_1 \delta_x C_h^{n+1})_{\bar{y}k} + \right. \\ \left. \left(1 + \frac{h}{2} | U_2^n | D_2^{-1} \right)^{-1} \delta_y (D_2 \delta_y C_h^{n+1})_{ijk} + \left(1 + \frac{h}{2} | U_3^n | D_3^{-1} \right)^{-1} \delta_z (D_3 \delta_z C_h^{n+1})_{\bar{y}k} \right\} = \\ - \delta_{U_1^n, x} C_h^n, \bar{y}k - \delta_{U_2^n, y} C_h^n, ij k - \delta_{U_3^n, z} C_h^n, ij k + q_{ijk}^n (C_{ijk}^{*, n} - C_h^n, ij k) - \\ (\Delta t)^2 \left\{ \left(1 + \frac{h}{2} | U_1^n | D_1^{-1} \right)^{-1} \times \right. \\ \left. \delta_x \left(D_1 \delta_x \left\{ \beta^{-1}(C_h^n) \left(1 + \frac{h}{2} | U_2^n | D_2^{-1} \right)^{-1} \delta_y (D_2 \delta_y d_t C_h^n) \right\} \right)_{\bar{y}k} + \right. \\ \left. \left(1 + \frac{h}{2} | U_1^n | D_1^{-1} \right)^{-1} \delta_x \left(D_1 \delta_x \left\{ \beta^{-1}(C_h^n) \left(1 + \frac{h}{2} | U_3^n | D_3^{-1} \right)^{-1} \delta_z (D_3 \delta_z d_t C_h^n) \right\} \right)_{\bar{y}k} + \right. \\ \left. \left(1 + \frac{h}{2} | U_2^n | D_2^{-1} \right)^{-1} \delta_y \left(D_1 \delta_y \left\{ \beta^{-1}(C_h^n) \left(1 + \frac{h}{2} | U_3^n | D_3^{-1} \right)^{-1} \delta_z (D_3 \delta_z d_t C_h^n) \right\} \right)_{ijk} \right\} + \\ (\Delta t)^3 \left(1 + \frac{h}{2} | U_1^n | D_1^{-1} \right)^{-1} \delta_x \left(D_1 \delta_x \left\{ \beta(C_h^n) \left(1 + \frac{h}{2} | U_2^n | D_2^{-1} \right)^{-1} \times \right. \right. \\ \left. \left. \delta_y \left(D_2 \delta_y \left\{ \beta^{-1}(C_h^n) \left(1 + \frac{h}{2} | U_3^n | D_3^{-1} \right)^{-1} \delta_z (D_3 \delta_z d_t C_h^n) \right\} \right)_{\bar{y}k} \right\} \right)_{\bar{y}k}, \\ 1 \leq i, j, k \leq N-1, \end{aligned} \quad (16a)$$

$$C_h^{n+1, \bar{y}k} = g_{ijk}^{n+1}, \quad x_{\bar{y}k} \in \partial \Omega_h. \quad (16b)$$

由方程式(2) ($t = t^{n+1}$) 和式(16) 可得浓度函数的误差方程

$$\begin{aligned} \beta(C_h^n, ij k) \frac{\xi_{ijk}^{n+1} - \xi_{ijk}^n}{\Delta t} - \left\{ \left(1 + \frac{h}{2} | U_1^n | D_1^{-1} \right)^{-1} \delta_x (D_1 \delta_x \xi^{n+1})_{\bar{y}k} + \right. \\ \left. \left(1 + \frac{h}{2} | U_2^n | D_2^{-1} \right)^{-1} \delta_y (D_2 \delta_y \xi^{n+1})_{ijk} + \left(1 + \frac{h}{2} | U_3^n | D_3^{-1} \right)^{-1} \delta_z (D_3 \delta_z \xi^{n+1})_{\bar{y}k} \right\} = \\ \left\{ [\delta_{U_1^n, x} C_h^n, ij k - \delta_{u_1^{n+1}, x} c_{ijk}^{n+1}] + \dots \right\} + \\ \left\{ \left[\left(1 + \frac{h}{2} | u_1^{n+1} | D_1^{-1} \right)^{-1} - \left(1 + \frac{h}{2} | U_1^n | D_1^{-1} \right)^{-1} \right] \delta_x (D_1 \delta_x C_h^{n+1})_{\bar{y}k} + \dots \right\} + \\ \left\{ q_{ijk}^{n+1} (C_{ijk}^{*, n+1} - c_{ijk}^{n+1}) - q_{ijk}^n (C_{ijk}^{*, n} - C_h^n, ij k) \right\} - \\ (\Delta t)^2 \left\{ \left[\left(1 + \frac{h}{2} | u_1^{n+1} | D_1^{-1} \right)^{-1} \times \right. \right. \\ \left. \left. \delta_x \left(D_1 \delta_x \left\{ \beta^{-1}(c^{n+1}) \left(1 + \frac{h}{2} | u_2^{n+1} | D_2^{-1} \right)^{-1} \delta_y (D_2 \delta_y d_t c^n) \right\} \right)_{\bar{y}k} - \right. \right. \\ \left. \left. \left(1 + \frac{h}{2} | U_1^n | D_1^{-1} \right)^{-1} \times \right. \right. \\ \left. \left. \delta_x \left(D_1 \delta_x \left\{ \beta^{-1}(C_h^n) \left(1 + \frac{h}{2} | U_2^n | D_2^{-1} \right)^{-1} \delta_y (D_2 \delta_y d_t C_h^n) \right\} \right)_{\bar{y}k} \right] + \dots \right\} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (\Delta t)^3 \left\{ \left[1 + \frac{h}{2} | u_1^{n+1} | D_1^{-1} \right]_{\bar{y}k}^{-1} \times \right. \\
 & \delta_x \left\{ D_1 \delta_x \left\{ \beta^{-1}(c^{n+1}) \left[1 + \frac{h}{2} | u_2^{n+1} | D_2^{-1} \right]^{-1} \times \right. \right. \\
 & \left. \left. \delta_y \left\{ D_2 \delta_y \left\{ \beta^{-1}(c^{n+1}) \left[1 + \frac{h}{2} | u_3^{n+1} | D_3^{-1} \right]^{-1} \delta_z (D_3 \delta_z d c^n) \right\} \right\} \right\} \right\}_{ijk} - \\
 & \left. \left[1 + \frac{h}{2} | U_1^n | D_1^{-1} \right]_{ijk}^{-1} \delta_x \left\{ D_1 \delta_x \left\{ \beta^{-1}(C_h^n) \left[1 + \frac{h}{2} | U_2^n | D_2^{-1} \right]^{-1} \times \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \delta_y \left\{ D_2 \delta_y \left\{ \beta^{-1}(C_h^n) \left[1 + \frac{h}{2} | U_3^n | D_3^{-1} \right]^{-1} \delta_z (D_3 \delta_z d C_h^n) \right\} \right\} \right\} \right\}_{ijk} + \mathcal{E}_{i, \bar{y}k}^{n+1}, \\
 & 1 \leq i, j, k \leq N-1, \tag{17a}
 \end{aligned}$$

$$\xi_{\bar{y}k}^{n+1} = 0, \quad x_{\bar{y}k} \in \partial \Omega_h, \tag{17b}$$

此处 $| \mathcal{E}_{i, \bar{y}k}^{n+1} | \leq M \{ h^2 + \Delta t \}$.

对于流动方程, 由方程(11) ~ (13) 消去 $H_h^{n+1/3}, H_h^{n+2/3}$ 可得下述等价差分方程:

$$\begin{aligned}
 S_{s, \bar{y}k} \frac{H_{h, \bar{y}k}^{n+1} - H_{h, \bar{y}k}^n}{\Delta t} - \left\{ \delta_x (K_1(C_h^n) \delta_x H_h^{n+1})_{\bar{y}k} + \delta_y (K_2(C_h^n) \delta_y H_h^{n+1})_{\bar{y}k} + \right. \\
 \left. \delta_z (K_3(C_h^n) \delta_z H_h^{n+1})_{\bar{y}k} \right\} = \\
 - \eta \phi_{\bar{y}k} \frac{C_{h, \bar{y}k}^{n+1} - C_{h, \bar{y}k}^n}{\Delta t} + \frac{\rho(C_{h, \bar{y}k}^n)}{\rho_0} q_{\bar{y}k}^n - \eta \delta_z (K_3(C_h^n) C_h^n)_{\bar{y}k} - \\
 (\Delta t)^2 \left\{ \delta_x (K_1(C_h^n) \delta_x (S_s^{-1} \delta_y (K_2(C_h^n) \delta_y d H_h^n))_{\bar{y}k} + \right. \\
 \delta_x (K_1(C_h^n) \delta_x (S_s^{-1} \delta_z (K_3(C_h^n) \delta_z d H_h^n))_{\bar{y}k} + \\
 \left. \delta_y (K_2(C_h^n) \delta_y (S_s^{-1} \delta_z (K_3(C_h^n) \delta_z d H_h^n))_{\bar{y}k} \right\} + \\
 (\Delta t)^3 \delta_x (K_1(C_h^n) \delta_x (S_s^{-1} \delta_y (K_2(C_h^n) \delta_y (S_s^{-1} \delta_z (K_3(C_h^n) \delta_z d H_h^n))))_{ijk}, \\
 1 \leq i, j, k \leq N-1, \tag{18a}
 \end{aligned}$$

$$H_{h, \bar{y}k}^{n+1} = h_{\bar{y}k}^{n+1}, \quad x_{ijk} \in \partial \Omega_h. \tag{18b}$$

由方程(1) ($t = t^{n+1}$) 和方程(18) 可得流动函数的误差方程

$$\begin{aligned}
 S_{s, \bar{y}k} \frac{\pi_{\bar{y}k}^{n+1} - \pi_{\bar{y}k}^n}{\Delta t} - \left\{ \delta_x (K_1(C_h^n) \delta_x \pi^{n+1})_{ijk} + \delta_y (K_2(C_h^n) \delta_y \pi^{n+1})_{\bar{y}k} + \right. \\
 \left. \delta_z (K_3(C_h^n) \delta_z \pi^{n+1})_{ijk} \right\} = \\
 \therefore_h ([K(c^{n+1}) - K(C_h^n)] \therefore_h H^{n+1})_{\bar{y}k} - \eta \phi_{\bar{y}k} \frac{\xi_{\bar{y}k}^{n+1} - \xi_{\bar{y}k}^n}{\Delta t} + \\
 \left[\frac{\rho(c_{\bar{y}k}^{n+1})}{\rho_0} q_{\bar{y}k}^{n+1} - \frac{\rho(C_{h, \bar{y}k}^n) q_{\bar{y}k}^n}{\rho_0} \right] - \eta \left[\delta_z (K_3(c^{n+1}) c^{n+1})_{ijk} - \delta_z (K_3(C_h^n) C_h^n)_{\bar{y}k} \right] - \\
 (\Delta t)^2 \left\{ \left[\delta_x (K_1(c^{n+1}) \delta_x (S_s^{-1} \delta_y (K_2(c^{n+1}) \delta_y d H^n))_{ijk} - \right. \right. \\
 \left. \left. \delta_x (K_1(C_h^n) \delta_x (S_s^{-1} \delta_y (K_2(C_h^n) \delta_y d H^n))_{ijk}) \right] + \dots \right\} + \\
 (\Delta t)^3 \left\{ \delta_x (K_1(c^{n+1}) \delta_x (S_s^{-1} \delta_y (K_2(c^{n+1}) \delta_y (S_s^{-1} \delta_z (K_3(c^{n+1}) \delta_z d H^n))))_{ijk} - \right. \\
 \left. \delta_x (K_1(C_h^n) \delta_x (S_s^{-1} \delta_y (K_2(C_h^n) \delta_y (S_s^{-1} \delta_z (K_3(C_h^n) \delta_z d H^n))))_{ijk} \right\} + \mathcal{E}_{i, \bar{y}k}^{n+1}, \\
 1 \leq i, j, k \leq N-1, \tag{19a}
 \end{aligned}$$

$$\pi_{\bar{y}k}^{n+1} = 0, \quad x_{\bar{y}k} \in \partial \Omega_h, \tag{19b}$$

此处 $| \mathcal{E}_{i, \bar{y}k}^{n+1} | \leq M \{ h^2 + \Delta t \}$.

引入归纳法假定

$${}_0 \sup_{n \leq L} \max \left\{ \|\pi^n\|_{1, \infty}, \|\xi^n\|_{1, \infty} \right\} \rightarrow 0, \quad (h, \Delta t) \rightarrow 0, \quad (20)$$

此处 $\|\pi^n\|_{1, \infty}^2 = \|\pi^n\|_{0, \infty}^2 + \|\cdot\cdot\cdot_h \pi^n\|_{0, \infty}^2, \dots$

首先分析流动函数误差方程(19), 对方程(19)乘以 $\delta_t \pi_{jk}^{n+1} = \pi_{jk}^{n+1} - \pi_{jk}^n$ 作内积, 并应用分步求和公式可得

$$\begin{aligned} & \langle S_s d_t \pi^n, d_t \pi^n \rangle_{\Delta t} + \frac{1}{2} \left\{ \langle K_1(C_h^n) \delta_x \pi^{n+1}, \delta_x \pi^{n+1} \rangle + \langle K_2(C_h^n) \delta_y \pi^{n+1}, \delta_y \pi^{n+1} \rangle + \right. \\ & \quad \langle K_3(C_h^n) \delta_z \pi^{n+1}, \delta_z \pi^{n+1} \rangle - \left. \left[\langle K_2(C_h^n) \delta_x \pi^n, \delta_x \pi^n \rangle + \langle K_2(C_h^n) \delta_y \pi^n, \delta_y \pi^n \rangle + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \langle K_3(C_h^n) \delta_z \pi^n, \delta_z \pi^n \rangle \right] \right\} \leq \\ & \quad \langle \cdot\cdot\cdot_h ([K(c^{n+1}) - K(C_h^n)] \cdot\cdot\cdot_h H^{n+1}), d_t \pi^n \rangle_{\Delta t} - \eta \langle \Phi d_t \xi^n, d_t \pi^n \rangle_{\Delta t} + \\ & \quad \left\langle \left[\frac{\rho(c^{n+1})}{\rho_0} q^{n+1} - \frac{\rho(C_h^n)}{\rho_0} q^n \right], d_t \pi^n \right\rangle_{\Delta t} - \\ & \quad \eta \left\langle \delta_z (K_3(c^{n+1}) c^{n+1}) - \delta_z (K_3(C_h^n) C_h^n) \right\rangle_{\Delta t} - \\ & \quad (\Delta t)^2 \left\{ \langle \delta_x (K_1(c^{n+1})) \delta_x (S_s^{-1} \delta_y (K_2(c^{n+1})) \delta_y dH^n) \rangle - \right. \\ & \quad \left. \delta_x (K_1(C_h^n)) \delta_x (S_s^{-1} \delta_y (K_2(C_h^n)) \delta_y dH^n) \right\rangle_{\Delta t} + \dots \Big\} + \\ & \quad (\Delta t)^3 \left\{ \langle \delta_x (K_1(c^{n+1})) \delta_x (S_s^{-1} \delta_y (K_2(c^{n+1})) \delta_y (S_s^{-1} \delta_z (K_3(c^{n+1})) \delta_z dH^n)) \rangle - \right. \\ & \quad \left. \delta_x (K_1(C_h^n)) \delta_x (S_s^{-1} \delta_y (K_2(C_h^n)) \delta_y (S_s^{-1} \delta_z (K_3(C_h^n)) \delta_z dH^n)) \right\rangle_{\Delta t} + \\ & \quad \langle \mathcal{E}^{n+1}, d_t \pi^n \rangle_{\Delta t}. \end{aligned} \quad (21)$$

依次估计式(21)中左右端诸项, 并利用正定性条件(5)、归纳法假定式(20)和高阶差分算子的分解, 经估计和整理可得

$$\begin{aligned} S^* \|d_t \pi^n\|^2_{\Delta t} + \frac{1}{2} \left\{ \langle K(C_h^n) \cdot\cdot\cdot_h \pi^{n+1}, \cdot\cdot\cdot_h \pi^{n+1} \rangle - \langle K(C_h^n) \cdot\cdot\cdot_h \pi^n, \cdot\cdot\cdot_h \pi^n \rangle \right\} \leq \\ M \left\{ \|\cdot\cdot\cdot_h \pi^{n+1}\|^2 + \|\cdot\cdot\cdot_h \pi^n\|^2 + \|\xi^n\|^2 + \|\cdot\cdot\cdot_h \xi^n\|^2 + \|d_t \xi^n\|^2 + \right. \\ \left. h^4 + (\Delta t)^2 \right\}_{\Delta t} + \varepsilon \|d_t \pi^n\|^2_{\Delta t}. \end{aligned} \quad (22)$$

下面讨论浓度方程的误差估计, 对方程(17)乘以 $\delta_t \xi_{jk}^n = \xi_{jk}^{n+1} - \xi_{jk}^n = d_t \xi_{jk}^n \Delta t$ 作内积并分部求和可得

$$\begin{aligned} & \langle \beta(C_h^n) d_t \xi^n, d_t \xi^n \rangle_{\Delta t} + \left\{ \langle D_1 \delta_x \xi^{n+1}, \delta_x \left[\left(1 + \frac{h}{2} |u_1^{n+1}| D_1^{-1} \right)^{-1} (\xi^{n+1} - \xi^n) \right] \rangle + \right. \\ & \quad \left\langle D_2 \delta_y \xi^{n+1}, \delta_y \left[\left(1 + \frac{h}{2} |u_2^{n+1}| D_2^{-1} \right)^{-1} (\xi^{n+1} - \xi^n) \right] \right\rangle + \\ & \quad \left. \left\langle D_3 \delta_z \xi^{n+1}, \delta_z \left[\left(1 + \frac{h}{2} |u_3^{n+1}| D_3^{-1} \right)^{-1} (\xi^{n+1} - \xi^n) \right] \right\rangle \right\} = \\ & \quad \left\{ \langle \delta_{U_1^n, x} C_h^n - \delta_{u_1^{n+1}, x} c^{n+1}, d_t \xi^n \rangle + \dots \right\}_{\Delta t} + \\ & \quad \left\{ \left\langle \left[\left(1 + \frac{h}{2} |u_1^{n+1}| D_1^{-1} \right)^{-1} - \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left(1 + \frac{h}{2} |u_1^n| D_1^{-1} \right)^{-1} \right] \delta_x (D_1 \delta_x C_h^n), d_t \xi^n \right\rangle + \dots \right\}_{\Delta t} + \\ & \quad \langle q^{n+1} (C^{*, n+1} - c^{n+1}) - q^n (C^{*, n} - C_h^n), d_t \xi^n \rangle_{\Delta t} - \\ & \quad (\Delta t)^3 \left\{ \left\langle \left(1 + \frac{h}{2} |u_1^n| D_1^{-1} \right)^{-1} \times \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \delta_x \left\{ D_1 \delta_x \left\{ \beta^{-1}(C_h^n) \left[1 + \frac{h}{2} | U_2^n | D_2^{-1} \right]^{-1} \delta_y (D_2 \delta_y d_t \xi^n) \right\} \right\}, d_t \xi^n \rangle + \dots \Bigg\} + \\ & (\Delta t)^4 \left\{ \left\langle \left[1 + \frac{h}{2} | U_1^n | D_1^{-1} \right]^{-1} \delta_x \left\{ D_1 \delta_x \left\{ \beta^{-1}(C_h^n) \left[1 + \frac{h}{2} | U_2^n | D_2^{-1} \right]^{-1} \times \right. \right. \right. \right. \\ & \delta_y \left\{ D_2 \delta_y \left\{ \beta^{-1}(C_h^n) \left[1 + \frac{h}{2} | U_3^n | D_3^{-1} \right]^{-1} \delta_z (D_3 \delta_z d_t \xi^n) \right\} \right\} \right\} \Bigg\}, d_t \xi^n \rangle + \dots \Bigg\} + \\ & \langle \xi_1^{n+1}, d_t \xi^n \rangle \Delta t, \end{aligned} \tag{23}$$

对估计式(23), 经类似的估计和分析可得

$$\begin{aligned} & \| d_t \xi^n \|^2 \Delta t + \frac{1}{2} \left\{ \left\langle D_1 \delta_x \xi^{n+1}, \left[1 + \frac{h}{2} | u_1^{n+1} | D_1^{-1} \right]^{-1} \delta_x \xi^{n+1} \right\rangle + \right. \\ & \left\langle D_2 \delta_y \xi^{n+1}, \left[1 + \frac{h}{2} | u_2^{n+1} | D_2^{-1} \right]^{-1} \delta_y \xi^{n+1} \right\rangle + \\ & \left. \left\langle D_3 \delta_z \xi^{n+1}, \left[1 + \frac{h}{2} | u_3^{n+1} | D_3^{-1} \right]^{-1} \delta_z \xi^{n+1} \right\rangle \right\} - \\ & \left[\left\langle D_1 \delta_x \xi^n, \left[1 + \frac{h}{2} | u_1^{n+1} | D_1^{-1} \right]^{-1} \delta_x \xi^n \right\rangle + \right. \\ & \left\langle D_2 \delta_y \xi^n, \left[1 + \frac{h}{2} | u_2^{n+1} | D_2^{-1} \right]^{-1} \delta_y \xi^n \right\rangle + \\ & \left. \left\langle D_3 \delta_z \xi^n, \left[1 + \frac{h}{2} | u_3^{n+1} | D_3^{-1} \right]^{-1} \delta_z \xi^{n+1} \right\rangle \right\} \leq \\ & \varepsilon \| d_t \xi^n \|^2 + M \left\{ \| u^n - U^n \|^2 + \| \cdot \cdot \cdot_h \xi^{n+1} \|^2 + \| \cdot \cdot \cdot_h \xi^n \|^2 + \right. \\ & \left. \| \xi^{n+1} \|^2 + \| \xi^n \|^2 + (\Delta t)^2 \right\} \Delta t. \end{aligned} \tag{24}$$

对于流动误差方程(22) 关于 t 求和 $0 \leq n \leq L$, 注意到 $\pi^0 = 0$ 可得

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^L \| d_t \pi^n \|^2 \Delta t + \| \pi^{L+1} \|_1^2 \leq \\ & \varepsilon \sum_{n=0}^{L-1} \| d_t \xi^n \|^2 \Delta t + M \left\{ \sum_{n=1}^L \| \cdot \cdot \cdot_h \pi^n \|^2 + \| \xi^{n+1} \|_1^2 \Delta t + (\Delta t)^2 + h^4 \right\}. \end{aligned} \tag{25}$$

对饱和度方程(24) 对 t 求和 $0 \leq n \leq L$, 注意到 $\xi^0 = 0$ 可得

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^L \| d_t \xi^n \|^2 \Delta t + \frac{1}{2} \left\{ \left\langle D_1 \delta_x \xi^{L+1}, \left[1 + \frac{h}{2} | u_1^{L+1} | D_1^{-1} \right]^{-1} \delta_x \xi^{L+1} \right\rangle + \right. \\ & \left\langle D_2 \delta_y \xi^{L+1}, \left[1 + \frac{h}{2} | u_2^{L+1} | D_2^{-1} \right]^{-1} \delta_y \xi^{L+1} \right\rangle + \\ & \left. \left\langle D_3 \delta_z \xi^{L+1}, \left[1 + \frac{h}{2} | u_3^{L+1} | D_3^{-1} \right]^{-1} \delta_z \xi^{L+1} \right\rangle \right\} \leq \\ & \frac{1}{2} \sum_{n=1}^L \left\{ \left\langle D_1 \delta_x \xi^n, \left[\left[1 + \frac{h}{2} | u_1^n | D_1^{-1} \right]^{-1} - \left[1 + \frac{h}{2} | u_1^{n-1} | D_1^{-1} \right]^{-1} \right] \delta_x \xi^n \right\rangle + \right. \\ & \left\langle D_2 \delta_y \xi^n, \left[\left[1 + \frac{h}{2} | u_2^n | D_2^{-1} \right]^{-1} - \left[1 + \frac{h}{2} | u_2^{n-1} | D_2^{-1} \right]^{-1} \right] \delta_y \xi^n \right\rangle + \\ & \left. \left\langle D_3 \delta_z \xi^n, \left[\left[1 + \frac{h}{2} | u_3^n | D_3^{-1} \right]^{-1} - \left[1 + \frac{h}{2} | u_3^{n-1} | D_3^{-1} \right]^{-1} \right] \delta_z \xi^n \right\rangle \right\} + \\ & M \left\{ \sum_{n=0}^L \| \xi^{n+1} \|_1^2 + \| \cdot \cdot \cdot_h \pi^n \|^2 \Delta t + (\Delta t)^2 + h^4 \right\} \Delta t, \end{aligned}$$

最后可得

$$\sum_{n=0}^L \|d_t \xi^n\|^2 \Delta t + \frac{1}{2} \left\{ \langle D_1 \delta_x \xi^{L+1}, \left[1 + \frac{h}{2} |u_1^{L+1}| D_1^{-1} \right]^{-1} \delta_x \xi^{L+1} \rangle + \langle D_2 \delta_y \xi^{L+1}, \left[1 + \frac{h}{2} |u_2^{L+1}| D_2^{-1} \right]^{-1} \delta_y \xi^{L+1} \rangle + \langle D_3 \delta_z \xi^{L+1}, \left[1 + \frac{h}{2} |u_3^{L+1}| D_3^{-1} \right]^{-1} \delta_z \xi^{L+1} \rangle \right\} \leq M \left\{ \sum_{n=0}^L \| \xi^{n+1} \|_1^2 + \| \pi^n \|_J^2 \right\} \Delta t + (\Delta t)^2 + h^4. \tag{26}$$

组合式(25)和(26)可得

$$\sum_{n=0}^L \|d_t \xi^n\|^2 + \|d_t \pi^n\|^2 \Delta t + \| \pi^{L+1} \|_1^2 + \| \xi^{L+1} \|_1^2 \leq M \left\{ \sum_{n=0}^L \| \xi^{n+1} \|_1^2 + \| \pi^n \|_J^2 \Delta t + h^4 + (\Delta t)^2 \right\}. \tag{27}$$

应用 Gronwall 引理可得

$$\sum_{n=0}^L \|d_t \xi^n\|^2 + \|d_t \pi^n\|^2 \Delta t + \| \pi^{L+1} \|_1^2 + \| \xi^{L+1} \|_1^2 \leq M \left\{ h^4 + (\Delta t)^2 \right\}. \tag{28}$$

最后需要检验归纳法假定式(20),由式(28)可得 $\| \pi^{L+1} \|_{1, \infty} + \| \xi^{L+1} \|_{1, \infty} \leq Mh^{1/2}$, 归纳法假定式(20)成立.

3 入侵防治工程和工程调控模式的应用

3.1 海水入侵数值模拟结果与分析

考虑到抽水形成的复杂流场,模型计算选择具有三维观测网的龙口市黄河营地区作为计算区. 该区位于黄水河口左岸,计算区域北界为渤海,东界为黄水河岸边线,长约3 000 m,宽700 m,区内除中部有一沙丘外,地势平坦,一般厚17 m~18 m. 含水层上部为中细砂,下部为含砾卵石的粗砂,中间夹1层或2、3层厚度不等的亚粘土、淤泥质亚粘土等. 根据渗透性能把该区分为3个地质区域. 平面图及剖面图如图2、图3所示. 各地质参数如表1.

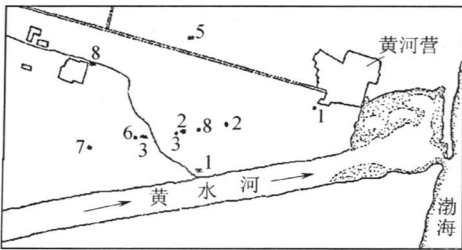


图2 区域平面图

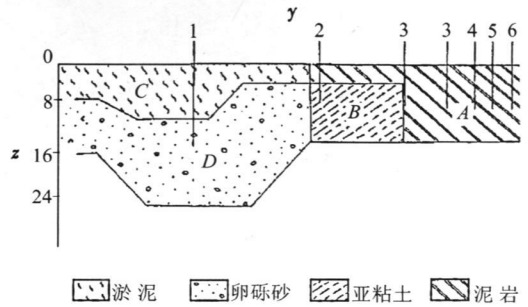


图3 区域纵剖面示意图

对该区域我们取剖分步长 $h_x = 20\text{ m}$, $h_y = 30\text{ m}$, $h_z = 1\text{ m}$. 计算结果与实测结果作了比较. 观测值与计算值水位对比曲线,浓度对比曲线如图4和图5所示. 其中计算值A为我们采用分裂迎风格式的结果.

从以上结果可以看出,本文提出的计算方法结果准确,格式稳定可靠,较已有结果更可靠,与实测值更接近,能够满足大范围问题数值模拟预测的需要.

表 1 参数表

分区号	渗透系数 $K / (\text{m/d})$		贮水率 S_s / m^{-1}	给水度 S_y	弥散度 α / m		降雨入渗系数 k
	$K_{xx} = K_{yy}$	K_{zz}			α_L	α_T	
A	17	15	8.0×10^{-5}	0.075	8.3	0.001	0.30
B	103	22	1.2×10^{-4}	0.13	8.3	0.001	0.30
C	7	7	5.0×10^{-5}	0.04	0.08	0.0004	0.30
D	63	17	1.0×10^{-4}	0.11	0.08	0.0004	0.30

3.2 主要工程后效预测的数值模拟

防治海水入侵的主要工程如节水工程、引黄调水工程、拦蓄补源工程、人工增雨工程等, 我们针对山东莱州湾地区的实际情况, 对龙口市黄河营地区的上述诸问题进行了三维数值模拟, 平面图与剖面图如图 2 和图 3 所示. 模拟结果对工程后效预测是合理的, 到目前为止在国内未见这方面成果报道^[8, 16-17]. 下面以节水工程的后效数值模拟为例来阐明这一领域的最新成果, 它还应用于引黄调水工程、拦蓄补源工程、人工增雨工程等的数值模拟.

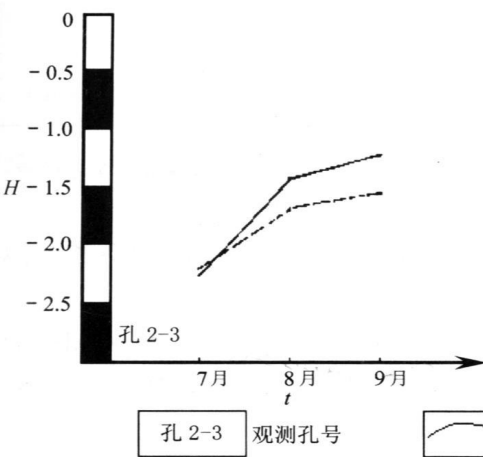


图 4 水位对比曲线图

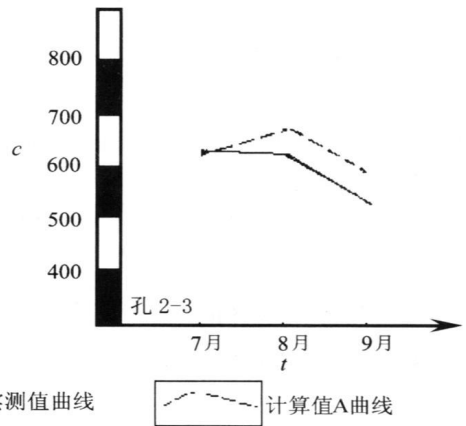


图 5 浓度对比曲线图

表 2 初始参考水头和浓度

井点号 n	1-2	2-2	3-2	4-2	5-2	6-2
参考水头 H/m	-1.01	-2.20	-2.77	-3.10	-3.13	-2.87
盐份浓度 $c/(\text{mg/L})$	3667	3000	377	400	98	100

表 3 节水对参考水头的影响

节水比例 $p/(\%)$	井点号水头 H_n					
	1-2	2-2	3-2	4-2	5-2	6-2
0	-0.45	-1.75	-2.04	-2.42	-2.32	-2.16
10	-0.34	-1.52	-1.80	-2.14	-2.07	-1.93
20	-0.23	-1.31	-1.56	-1.87	-1.81	-1.71
30	-0.12	-1.10	-1.33	-1.60	-1.55	-1.48

在保持现有降雨水平, 考虑节水工程对海水入侵的治理效果. 降雨量取多年平均水平. 模拟了降雨高峰期 2 个月后水位和盐浓度的变化情况. 初始时刻的水头及浓度见表 2, 计算结果分别见表 3 和表 4. 节水 20% 的预测剖面图见图 6 和图 7.

表 4 节水对盐分浓度的影响

节水比例 $p/(%)$	井点号浓度 C					
	1-2	2-2	3-2	4-2	5-2	6-2
0	3 781	3 044	1 521	101	98	99
10	3 753	3 088	1 507	101	98	99
20	3 725	3 032	1 493	101	98	99
30	3 696	3 027	1 479	100	98	100

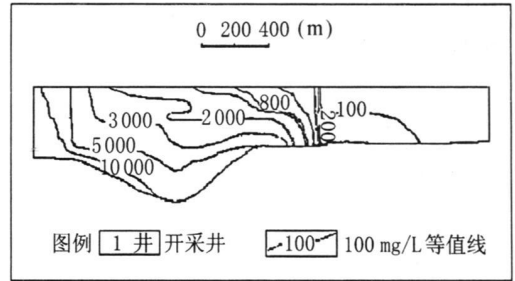
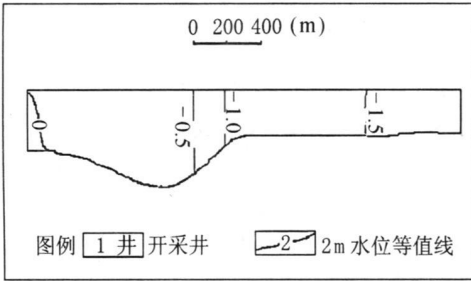


图 6 7~8 月份节水 20% 时参考水头预测结果

图 7 7~8 月份节水 20% 时盐份浓度预测结果

3.3 工程调控应用模式

我们提出了将最优化方法(线性规划)和数值方法相结合来进行优化与模式调控, 并对这一实际工程进行数值模拟.

某一治理区内原有两口抽水井, 抽水量分别为 $4\,940\text{ m}^3/\text{d}$ 和 $4\,427\text{ m}^3/\text{d}$. 利用该区内已有离抽水井较近的观测井 A 作为观测井, 运用前面的方法, 对不同情况进行优化与调控模式研究.

表 5 节水工程调控模式 m^3/d

情况	抽水量 Q		
	1 号井抽水量 Q_1	2 号井抽水量 Q_2	总抽水量 Q_t
水位不下降	5 000	1 840	6 840
水位升高 0.1 m	5 000	1 620	6 620
水位下降 0.1 m	5 000	2 050	7 050

表 6 不同情况下盐份浓度变化情况 mg/L

水头 H	井号 n					
	1-2	2-2	3-2	4-2	5-2	6-2
水位不下降	3 875	3 043	1 494	101	98	100
水位升高 0.1 m	3 870	3 042	1 491	101	98	100
水位下降 0.1 m	3 924	3 056	1 526	101	98	99

在冬季不降雨情况下, 取各井最大抽水量不超过 $5\,000\text{ m}^3/\text{d}$, 分 3 种情况对各井的抽水量进行优化调控计算: 观测井水位不下降; 观测井水位下降不超过 0.1 m; 观测井水位升高 0.1 m

以上. 3 种情况下的数值结果列于表 5.

由表 5、6 可以看出, 对所选观测点的水位来说, 抽水井 2 所造成的影响要远大于抽水井 1 的影响. 由此得出如下结论:

- 1) 对上面给定的抽水井和观测井来说, 抽水井 1 可以按照常规抽水, 而抽水井 2 的抽水应严格限制, 在抽水井 2 附近应实施较强节水措施;
- 2) 引黄调水工程应首先考虑抽水井 2 的需要.

4 结 论

本文从地下水渗流计算的实际问题出发, 研究非线性渗流耦合系统的数值方法及其应用, 提出修正迎风分数步差分格式, 将空间逼近提高到二阶, 将三维问题分解为连续解 3 个一维问题计算, 应用微分方法先验估计理论和技巧, 得到收敛性的最佳阶 l^2 误差估计, 并已成功应用到防治海水入侵主要工程后效预测与调控模式的工程实践中, 是一种高效的渗流力学工程计算方法.

[参 考 文 献]

- [1] 袁益让, 梁栋, 芮洪兴. 海水入侵防治工程的后效预测数学模型[A]. 见: 姜福德 主编. 山东省第二届数学研讨会论文集[C]. 青岛: 青岛海洋大学出版社, 1995, 1- 5.
- [2] 袁益让, 梁栋, 芮洪兴. 海水入侵及防治工程的预测模拟[A]. 见: 赵德山 主编. 海水入侵灾害防治研究[C]. 济南: 山东科技出版社, 1996, 198- 204.
- [3] 雅· 贝尔. 地下水水力学[M]. 许涓铭 译. 北京: 地质出版社, 1985.
- [4] Douglas Jr J, Russell T F. Numerical methods for convection- dominated diffusion problems based on combining the method of characteristics with finite element or finite difference procedures[J]. SIAM J Numer Anal, 1982, **19**(5): 881- 895.
- [5] Douglas Jr J. Finite difference methods for two- phase incompressible flow in porous media[J]. SIAM J Numer Anal, 1983, **20**(4): 681- 696.
- [6] Ewing R E, Russell T F, Wheeler M F. Convergence analysis of an approximation of miscible displacement in porous media by mixed finite elements and a modified method of characteristics[J]. Comput Methods Appl Mech Engrg, 1984, **47**(1/2): 73- 92.
- [7] Douglas Jr J, Roberts J E. Numerical method for a model for compressible miscible displacement in porous media[J]. Math Comp, 1983, **4**(164): 441- 459.
- [8] Ewing R E. The Mathematics of Reservoir Simulation [M]. Philadelphia: SIAM, 1983.
- [9] Douglas Jr J, YUAN Yi- rang. Numerical simulation of immiscible flow in porous media based on combining the method of characteristics with mixed finite element procedure [A]. In: Wheeler, Ed. Numerical Simulation in Oil Recovery [C]. Minnesota: Springer- Verlag, 1986, 119- 131.
- [10] Ewing R E, Lazarov R D, Vassilevski A T. Finite difference scheme for parabolic problems on composite grids with refinement in time and space[J]. SIAM J Numer Anal, 1994, **31**(6): 1605- 1622.
- [11] Lazarov R D, Mishev I D, Vassilevski P S. Finite volume method for convection- diffusion problems [J]. SIAM J Numer Anal, 1996, **33**(1): 31- 55.
- [12] Peaceman D W. Fundamentals of Numerical Reservoir Simulation [M]. Amsterdam: Elsevier, 1980.
- [13] N· 雅宁柯. 分数步法[M]. 周宝熙, 林鹏 译. 北京: 科学出版社, 1992.
- [14] Douglas Jr J, Gunn J E. Two order correct difference analogues for the equation of multidimensional

- heat flow[J]. *Math Comp*, 1963, **17**(81): 71– 80.
- [15] Douglas Jr J, Gunn J E. A general formulation of alternation methods—part 1: parabolic and hyperbolic problems[J]. *Numer Math*, 1964, **9**(5): 428– 453.
- [16] Ewing R E. Mathematical modeling and simulation for multiphase flow in porous media[A]. In: CHEN Zhang-xin, Ewing R E, Shi Z C, Eds. *Numerical Treatment of Multiphase Flows in Porous Media* [C]. *Lecture Notes in Physics*. V **552**. New York: Springer, 2000, 19– 29.
- [17] 薛禹群, 谢春红, 胡吉春, 等. 海水入侵咸淡水界面运移规律研究[M]. 南京: 南京大学出版社, 1991.

Numerical Method for the Nonlinear Two- Phase Displacement Problem and Its Application

YUAN Yi-rang, LIANG Dong, RUI Hong-xing,
DU Ning, WANG Wen-qia

(Institute of Mathematics, Shandong University, Jinan 250100, P. R. China)

Abstract: For the three-dimensional nonlinear two-phase displacement problem, the modified upwind finite difference fractional steps schemes were put forward. Some techniques, such as calculus of variations, induction hypothesis, decomposition of high order difference operators, the theory of prior estimates and techniques were used. Optimal order estimates were derived for the error in the approximation solution. These methods have been successfully used in predicting the consequences of seawater intrusion and protection projects.

Key words: nonlinear coupled; upwind fractional step; convergence; seawater intrusion; after-effect and adjusted control