文章编号: 1000- 0887(2008)05- 0589- 12

连续收获捕食者与脉冲存放食饵的阶段结构捕食- 食饵模型的全局吸引和一致持久*

焦建军[1,2], 陈兰荪[2], J•J•尼托[3], T•A•安吉拉[4]

(1. 贵州财经学院 数学与统计学院, 贵阳 550004;
2. 大连理工大学 应用数学系, 辽宁 大连 116024;
3. 圣地亚哥- 德孔波斯特拉大学 数学学院 数学分析系, 15782 圣地亚哥- 德孔波斯特拉, 西班牙;
4. 圣地亚哥- 德孔波斯特拉大学 医学院 精神、放射和公众健康系,
15782 圣地亚哥- 德孔波斯特拉, 西班牙)

(郭兴明推荐)

摘要: 研究了一个捕食者具连续收获与食饵具脉冲存放的阶段结构时滞捕食- 食饵模型. 根据生物资源管理的实际, 改进了捕食者具阶段结构的捕食- 食饵模型, 即原来假设每个捕食者个体都具有相同的捕食食饵的能力. 假设捕食者按年龄分为两个阶段, 即幼体和成体, 而且幼体无能力捕食食饵. 得到了捕食者灭绝周期解全局吸引和系统持久的充分条件. 结论说明了脉冲存放食饵对系统的持久起了重要的作用, 并且为生物资源管理提供了策略基础. 数值分析也进一步说明了系统的动力学性质.

关 键 词: 阶段结构; 脉冲存放; 连续收获; 全局吸引; 持久
中图分类号: O175.1 文献标识码: A

引 言

脉冲微分方程适合于进化过程的数学模拟, 其理论已经取得了很好的成果[1- 3]. 既然脉冲微分方程能够正确且合理地模拟种群的进化过程, 那么它在种群动力学的应用就变成了一个很有意义的课题, 例如接种[4]. 此外, 时滞脉冲微分方程应用在应用科学的各个领域, 比如: 物理学、生态学、害虫控制等等. 研究脉冲时滞微分方程的性质是有难度的, 很少有论文[4- 6]致力于脉冲时滞微分方程的研究. 本文研究了一个时滞脉冲微分方程, 其致力于描述生物资源管理中的捕食- 食饵系统的开发.

有很多的工作都研究捕食- 食饵系统并且得到了很好的结果[7- 10]. 近年来, 阶段结构模型也越来越受到关注. 许多论文[8- 9,11]对阶段结构单种群模型进行数学分析. 最近, Wang 和 Chen[12]考虑了下面的捕食- 食饵模型:

* 收稿日期: 2007- 09-30; 修订日期: 2008-03-18
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10771179); 贵州省重点学科基金资助项目
作者简介: 焦建军(1973—), 男, 湖南邵阳人, 讲师, 博士(联系人. Tel: + 86- 851- 8193240; E- mail: jiaojianjun05@126.com).

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t)(r - ax_1(t-\tau_1) - bx_3(t)), \\ x_2'(t) = kbx_1(t-\tau_2)x_3(t-\tau_2) - (D+\mu_1)x_2(t), \\ x_3'(t) = Dx_2(t) - \mu_2 x_3, \end{cases} \tag{1}$$

其中捕食者种群被分为幼体和成体, $x_1(t)$ 表示食饵在时刻 t 的密度, $x_2(t)$、$x_3(t)$ 分别表示捕食者幼体和成体在时刻 t 的密度．其具体的生物意义可以参考文献[12]．但是这个模型没有考虑到捕食者幼体的成长期.

一般来说, 捕食者幼体是没有能力捕食食饵的, 例如, 捕食者处于卵的状态就不能够捕食食饵．因此, 我们有必要假设把捕食者分为幼体和成体, 也就是说, 幼体到成体有一个成熟期, 即用可以一个常数时滞反映出来．Jiao 等人[13]研究了一个捕食– 食饵系统的动力学性质, 其中捕食者有两个阶段, 收获了捕食者成体且捕食者捕食食饵是为了增强捕食者的体质．Song 和 Chen[14]也研究了一个具两个阶段结构种群模型, 收获了成体而存放了幼体．Dong 和 Chen[15]研究了具脉冲存放和收获的捕食– 食饵系统的灭绝和持久性．Beretta 和 Kuang[10]对一些时滞比率依赖捕食– 食饵系统进行了全局分析．Wang 等人[16]研究了幼体具生长期与比率依赖 Michaelis– Menten 功能性反应的模型．受近来这些研究工作的启发, 我们建立了如下的脉冲存放食饵与连续收获捕食者的时滞阶段结构捕食– 食饵模型

$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} x_1'(t) &= x_1(t)(a - bx_1(t)) - \beta x_1(t)x_3(t), \\ x_2'(t) &= k\beta x_1(t)x_3(t) - k\beta e^{-w\tau_1}x_1(t-\tau_1)x_3(t-\tau_1) - wx_2(t), \\ x_3'(t) &= k\beta e^{-w\tau_1}x_1(t-\tau_1)x_3(t-\tau_1) - d_3x_3(t) - Ex_3(t), \end{aligned}\right\} \quad t \neq n\tau, \\ \left.\begin{aligned} \Delta x_1(t) &= \mu, \\ \Delta x_2(t) &= 0, \\ \Delta x_3(t) &= 0, \end{aligned}\right\} \quad t = n\tau;\ n = 1, 2, \cdots, \\ (\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta), \varphi_3(\zeta)) \in C_+ = C([-\tau_1, 0], R_+^3), \quad \varphi_i(0) > 0;\ i = 1, 2, 3, \end{cases} \tag{2}$$

其中 $x_1(t)$ 表示食饵在时刻 t 的密度, $x_2(t)$、$x_3(t)$ 分别表示捕食者幼体和成体在时刻 t 的密度, τ_1 表示成熟期, $a > 0$ 表示食饵的内禀增长率, $b > 0$ 表示种内的竞争系数, β 表示捕食者成体对食饵的捕获率, k 表示营养变为捕食者成体的生育能力的转化率, w 表示捕食者幼体的死亡率, d_3 表示捕食者成体的死亡率． 假设捕食者幼体不能捕食食饵且无生育能力． 这种假设对很多哺乳动物来说是很合理的, 捕食者幼体被母体抚育且幼体的捕食和生育能力都可以忽略． $0 < E < 1$ 表示连续收获捕食者成体的效果且 $w < d_3 + E$． $\Delta x_1(t) = x_1(t^+) - x_1(t)$, $\mu \geqslant 0$ 表示在时刻 $t = n\tau$, $n \in \mathbf{Z}_+$ $(\mathbf{Z}_+ = \{1, 2, \cdots\})$ 存放食饵的量． τ 表示脉冲存放食饵的周期．本文证明了系统(2) 的捕食者灭绝的周期解是全局吸引的, 也证明了由于存放了食饵, 连续收获捕食者不会使捕食者灭绝, 即系统(2) 持久.

由于系统(2) 的第 1 个和第 3 个方程不含 $x_2(t)$, 我们可以把系统(2) 简化为下面的系统:

$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} x_1'(t) &= x_1(t)(a - bx_1(t)) - \beta x_1(t)x_3(t), \\ x_3'(t) &= k\beta e^{-w\tau_1}x_1(t-\tau_1)x_3(t-\tau_1) - d_3x_3(t) - Ex_3(t), \end{aligned}\right\} \quad t \neq n\tau, \\ \left.\begin{aligned} \Delta x_1(t) &= \mu, \\ \Delta x_3(t) &= 0, \end{aligned}\right\} \quad t = n\tau;\ n = 1, 2, \cdots. \end{cases} \tag{3}$$

系统(3)的初值条件是

$$(\varphi_1(\zeta), \varphi_3(\zeta)) \in C_+ = C([-\tau_1, 0], R_+^2), \qquad \varphi_i(0) > 0; i = 1, 3. \tag{4}$$

1 一些重要的引理

系统(2)的解 $\boldsymbol{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))^{\mathrm{T}}$ 是分段连续函数 $\boldsymbol{x}: \mathbf{R}_+ \to R_+^3$. $\boldsymbol{x}(t)$ 在区间 $(n\tau, (n+1)\tau]$ $(n \in \mathbf{Z}_+)$ 上是连续的, 且存在 $\boldsymbol{x}(n\tau^+) = \lim_{t\to n\tau^+} \boldsymbol{x}(t)$. 显然系统(2)解的全局存在与唯一性可由 f 的光滑性保证, 其中 f 是由系统(2)的右边函数定义的映射(见文献[17－18]). 为了保证初值的连续性, 我们需要下面的条件:

$$\varphi_2(0) = \int_{-\tau_1}^{0} k\beta e^{ws} \varphi_1(s)\varphi_3(s)\,ds. \tag{5}$$

在证明主要结论之前, 我们需要下面的引理.

引理 1.1 设 $(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)) > 0$, $-\tau_1 < t < 0$, 那么系统(2)的解是严格正的.

证明 首先, 由系统(2)的解的唯一性与当 $x_1(t) = 0$, $t \neq n\tau$ 时, $x_1'(t) = 0$, 且 $x_1(n\tau^+) = x_1(n\tau) + \mu$, $\mu \geqslant 0$, 容易看出当 $t > 0$ 时, $x_1(t) > 0$.

其次, 我们得到当 $t > 0$ 时, $x_3(t) > 0$. 注意到 $x_3(t) > 0$, 如果存在 t_0 使得 $x_3(t_0) = 0$, 则 $t_0 > 0$. 假设 t_0 是第一个时刻使 $x_3(t) = 0$, 即 $t_0 = \inf\{t > 0: x_3(t) = 0\}$, 则 $x_3'(t_0) = k\beta e^{-w\tau_1} x_1(t_0 - \tau_1)x_3(t_0 - \tau_1) > 0$, 那么对充分小的 $\varepsilon > 0$, 有 $x_3'(t_0 - \varepsilon) > 0$. 但是由 t_0 的定义, $x_3'(t_0 - \varepsilon) \leqslant 0$. 这个矛盾表明当 $t > 0$ 时, $x_3(t) > 0$.

最后, 我们考虑下面的方程

$$s'(t) = -k\beta e^{-w\tau_1} x_1(t - \tau_1)x_3(t - \tau_1) - ws(t). \tag{6}$$

与系统(2)比较, 我们注意到 $s(t)$ 是方程(6)的解, 且 $x_1(t)$ 是系统(2)的解, 则在 $0 < t < \tau_1$ 上有 $x_2(t) > s(t)$. 解方程(6)得

$$s(t) = e^{-wt}\left[x_2(0) - \int_0^t k\beta e^{r(u-\tau_1)} x_1(u - \tau_1)x_3(u - \tau_1)\,du\right],$$

由(5)式得到

$$s(\tau_1) = e^{-w\tau_1}\left[\int_{-\tau_1}^{0} k\beta e^{ws}\varphi_1(s)\varphi_3(s)\,ds - \int_0^{\tau_1} k\beta e^{w(u-\tau_1)} x_1(u - \tau_1)x_3(u - \tau_1)\,du\right],$$

做变换且 $x_1(t) = \varphi_1(t)$, $x_3(t) = \varphi_3(t)$, $t \in [-\tau_1, 0]$, 我们知道

$$\int_{-\tau_1}^{0} k\beta e^{ws}\varphi_1(s)\varphi_3(s)\,ds$$

与

$$\int_0^{\tau_1} k\beta e^{w(s-\tau_1)} x_1(t - \tau_1)x_3(t - \tau_1)\,ds$$

是等价的, 所以我们得到 $s(\tau_1) = 0$. 因此 $x_2(t) > 0$. 既然 $s(t)$ 是严格递减的, 那么在 $t \in (0, \tau_1)$ 上有 $x_1(t) > s(t) > 0$. 所以在 $0 \leqslant t \leqslant \tau_1$ 上有 $x_2(t) > 0$.

由归纳法与文献[19]的定理1的证明方法, 我们可以证明当 $t \geqslant 0$ 时 $x_2(t) > 0$. 证明完毕.

下面我们证明系统(2)的所有解是一致完全有界的.

引理 1.2　对于充分大的 t,系统(2)的任意解$(x_1(t),x_2(t),x_3(t))$,存在常数 $M>0$ 使得 $x_1(t)\leqslant M/k, x_2(t)\leqslant M, x_3(t)\leqslant M$.

证明　定义 $V(t)=kx_1(t)+x_2(t)+x_3(t)$,因为 $w<d_3+E$,所以当 $t\neq n\tau$ 时,有

$$D^+V(t)+wV(t)=k(w+a)x_1-kbx_1^2(t)+(w-d_3-E)x_3(t)\leqslant M_0,$$

其中 $M_0=k(a+w)^2/(4b)$,当 $t=n\tau$,有 $V(n\tau^+)=V(n\tau)+\mu$. 由引理 2.2(见文献[1]23),对于 $t\in(n\tau,(n+1)\tau]$,我们得到

$$V(t)\leqslant V(0)\mathrm{e}^{-dt}+\frac{M_0}{d}(1-\mathrm{e}^{-dt})+\frac{\mu\mathrm{e}^{-d(t-\tau)}}{1-\mathrm{e}^{d\tau}}+\frac{\mu\mathrm{e}^{d\tau}}{\mathrm{e}^{d\tau}-1}\to$$
$$\frac{M_0}{d}+\frac{\mu\mathrm{e}^{d\tau}}{\mathrm{e}^{d\tau}-1},\qquad t\to\infty.$$

因此 $V(t)$ 是一致完全有界的. 那么,由 $V(t)$ 的定义,对于充分大的 t,存在一个常数 $M=M_0/d+\mu\mathrm{e}^{d\tau}/(\mathrm{e}^{d\tau}-1)>0$ 使得 $x_1(t)\leqslant M/k, x_2(t)\leqslant M, x_3(t)\leqslant M$. 证明完毕.

考虑下面的时滞微分方程

$$x'(t)=a_1x(t-\tau)-a_2x(t),\tag{7}$$

假设 $a_1,a_2,\tau>0$;且在 $-\tau\leqslant t\leqslant 0$ 上有 $x(t)>0$.

引理 1.3[11]　对于系统(7),假设 $a_1<a_2$. 则 $\lim_{t\to\infty}x(t)=0$.

引理 1.4[15]　考虑下面的脉冲系统

$$\begin{cases}v'(t)=v(t)(a-bv(t)), & t\neq n\tau,\\ v(n\tau^+)=v(n\tau)+\mu, & t=n\tau;n=1,2,\cdots,\end{cases}\tag{8}$$

其中 $a>0,b>0,\mu>0$,则系统(8)有唯一的正周期解

$$\widetilde{v(t)}=\frac{av^*\mathrm{e}^{a(t-n\tau)}}{a-bv^*+bv^*\mathrm{e}^{a(t-n\tau)}},\qquad t\in(n\tau,(n+1)\tau];n\in\mathbf{Z}_+,$$

且是全局渐进稳定的,其中

$$v^*=\frac{(a+b\mu)+\sqrt{(a+b\mu)^2+4ab\mu/(\mathrm{e}^{a\tau}-1)}}{2b}\left(>\frac{a}{b}\right).$$

由系统(3),容易知道存在 $t_1\in\mathbf{Z}_+, t>t_1$ 使得 $x_3(t-\tau_1)=0$ 且 $x_3(t)=0$. 则

$$\begin{cases}x_1'(t)=x_1(t)(a-bx_1(t)), & t\neq n\tau,\\ \Delta x_1(t)=\mu, & t=n\tau;n=1,2,\cdots.\end{cases}\tag{9}$$

从(9)式与引理 1.4,我们知道系统(2)有一个捕食者灭绝的周期解

$$(\widetilde{x_1(t)},0,0)=\left(\frac{ax_1^*\mathrm{e}^{a(t-n\tau)}}{a-bx_1^*+bx_1^*\mathrm{e}^{a(t-n\tau)}},0,0\right),$$
$$t\in(n\tau,(n+1)\tau];n\in\mathbf{Z}_+,$$

或者系统(3)有一个捕食者灭绝的周期解

$$(\widetilde{x_1(t)},0)=\left(\frac{ax_1^*\mathrm{e}^{a(t-n\tau)}}{a-bx_1^*+bx_1^*\mathrm{e}^{a(t-n\tau)}},0\right),$$
$$t\in(n\tau,(n+1)\tau];n\in\mathbf{Z}_+,$$

且是全局渐进稳定的,其中

$$x_1^*=\frac{(a+b\mu)+\sqrt{(a+b\mu)^2+4ab\mu/(\mathrm{e}^{a\tau}-1)}}{2b}\left(>\frac{a}{b}\right).$$

2 全局吸引与持久

在本节,我们将得到系统(2)的捕食者灭绝周期解是全局吸引的充分条件.

定理 2.1 如果

$$E > \frac{ak\beta x_1^* \mathrm{e}^{a\tau - w\tau_1}}{a - bx_1^* + bx_1^* \mathrm{e}^{a\tau}} - d_3,$$

其中 $$x_1^* = \frac{(a + b\mu) + \sqrt{(a + b\mu)^2 + 4ab\mu/(\mathrm{e}^{a\tau} - 1)}}{2b}\left(> \frac{a}{b}\right)$$

成立,那么系统(2)的捕食者灭绝周期解 $(\widetilde{x_1(t)},0,0)$ 是全局吸引的.

证明 很显然系统(2)的捕食者灭绝周期解 $(\widetilde{x_1(t)},0,0)$ 的全局吸引性等价于系统(3)的捕食者灭绝周期解$(\widetilde{x_1(t)},0)$ 的全局吸引性,所以我们致力于研究系统(3). 既然 $E > (ak\beta x_1^* \mathrm{e}^{a\tau - w\tau_1})/(a - bx_1^* + bx_1^* \mathrm{e}^{a\tau}) - d_3$,我们可以选择充分小的 ε_0 使得

$$k\beta \mathrm{e}^{-w\tau_1}\left(\frac{ax_1^* \mathrm{e}^{a\tau}}{a - bx_1^* + bx_1^* \mathrm{e}^{a\tau}} + \varepsilon_0\right) < d_3 + E,$$

其中 $$x_1^* = \frac{(a + b\mu) + \sqrt{(a + b\mu)^2 + 4ab\mu/(\mathrm{e}^{a\tau} - 1)}}{2b}\left(> \frac{a}{b}\right).$$

由系统(3)的第 1 个方程可得 $\mathrm{d}x_1(t)/\mathrm{d}t \leqslant x_1(t)(a - bx_1(t))$. 所以我们考虑下面的脉冲比较微分系统

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = x(t)(a - bx(t)), & t \neq n\tau, \\ \Delta x(t) = \mu, & t = n\tau, \\ x(0^+) = x_1(0^+). \end{cases} \tag{10}$$

从引理 1.4,我们得到系统(10)的周期解

$$\widetilde{x(t)} = \frac{ax_1^* \mathrm{e}^{a(t-n\tau)}}{a - bx_1^* + bx_1^* \mathrm{e}^{a(t-n\tau)}}, \qquad t \in (n\tau,(n + 1)\tau]; n \in \mathbf{Z}_+ \tag{11}$$

是全局渐进稳定的,其中

$$x_1^* = \frac{(a + b\mu) + \sqrt{(a + b\mu)^2 + 4ab\mu/(\mathrm{e}^{a\tau} - 1)}}{2b}\left(> \frac{a}{b}\right).$$

由引理 1.4 脉冲方程的比较定理[2],当 $t \to \infty$ 时,我们得到 $x_1(t) \leqslant x(t)$ 与 $x(t) \to \widetilde{x_1(t)}$. 那么存在一个整数 $k_2 > k_1, t > k_2$ 使得

$$x_1(t) \leqslant x(t) \leqslant \widetilde{x_1(t)} + \varepsilon_0, \qquad n\tau < t \leqslant (n + 1)\tau; n > k_2,$$

也就是

$$x_1(t) < \widetilde{x_1(t)} + \varepsilon_0 \leqslant \frac{ax_1^* \mathrm{e}^{a\tau}}{a - bx_1^* + bx_1^* \mathrm{e}^{a\tau}} + \varepsilon_0 \overset{\Delta}{=} \rho,$$
$$n\tau < t \leqslant (n + 1)\tau; n > k_2.$$

从(2)式,我们得到

$$\frac{\mathrm{d}x_3(t)}{\mathrm{d}t} \leqslant k\beta\rho \mathrm{e}^{-w\tau_1} x_3(t - \tau_1) - (d_3 + E)x_3(t), \qquad t > n\tau + \tau_1; n > k_2. \tag{12}$$

考虑下面的比较系统

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = k\beta\rho\mathrm{e}^{-w\tau_1}y(t-\tau_1) - (d_3+E)y(t), \quad t > n\tau + \tau_1; n > k_2, \tag{13}$$

我们得到 $k\beta\rho\mathrm{e}^{-w\tau_1} < d_3 + E$. 从引理 1.3,我们得到 $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$.

设 $(x_1(t), x_3(t))$ 是系统(3) 的具初值条件(6) 的解且 $x_3(\zeta) = \varphi_3(\zeta)(\zeta \in [-\tau_1, 0])$, $y(t)$ 系统(13) 具初值条件 $y(\zeta) = \varphi_3(\zeta)(\zeta \in [-\tau_1, 0])$ 的解. 由比较定理,可得

$$\lim_{t\to\infty} x_3(t) < \lim_{t\to\infty} y(t) = 0.$$

考虑到 $x_3(t)$ 的正性,我们知道 $\lim_{t\to\infty} x_3(t) = 0$,因此,对任意 $\varepsilon_1 > 0$(充分小),存在一个整数 $k_3(k_3\tau > k_2\tau + \tau_1)$,当 $t > k_3\tau$ 时,使得 $x_3(t) < \varepsilon_1$.

从系统(2),我们得到

$$[(a - bx_1(t)) - k\beta\varepsilon_1]x_1(t) \leqslant \frac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t} \leqslant x_1(t)(a - bx_1(t)), \tag{14}$$

从而 $z_1(t) \leqslant x_1(t) \leqslant z_2(t)$ 且 $z_1(t) \to \widetilde{x_1(t)}, z_2(t) \to \widetilde{x_1(t)}$,当 $t \to \infty$ 时. 其中 $z_1(t)$ 与 $z_2(t)$ 分别是

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}z_1(t)}{\mathrm{d}t} = z_1(t)[(a - k\beta\varepsilon_1) - bz_1(t)], & t \neq n\tau, \\ z_1(t^+) = z_1(t) + \mu, & t = n\tau, \\ z_1(0^+) = x_1(0^+) \end{cases} \tag{15}$$

与

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}z_2(t)}{\mathrm{d}t} = z_2(t)(a - bz_2(t)), & t \neq n\tau, \\ z_2(t^+) = z_2(t) + \mu, & t = n\tau, \\ z_2(0^+) = x_1(0^+) \end{cases} \tag{16}$$

的解.

$$\widetilde{z_1(t)} = \frac{(a - k\beta\varepsilon_1)z_1^* \mathrm{e}^{(a-k\beta\varepsilon_1)(t-n\tau)}}{(a - k\beta\varepsilon_1) - bz_1^* + bz_1^* \mathrm{e}^{(a-k\beta\varepsilon_1)(t-n\tau)}} \quad (n\tau < t \leqslant (n+1)\tau),$$

其中

$$z_1^* = \frac{(a - k\beta\varepsilon_1 + b\mu) + \sqrt{(a - k\beta\varepsilon_1 + b\mu)^2 + 4(a - k\beta\varepsilon_1)b\mu/(\mathrm{e}^{(a-k\beta\varepsilon_1)\tau} - 1)}}{2b}$$

$$\left(> \frac{a - k\beta\varepsilon_1}{b} \right).$$

因此,对任意小的 $\varepsilon_2 > 0$. 存在一个整数 k_4, $n > k_4$ 使得 $\widetilde{z_1(t)} + \varepsilon_2 < x_1(t) < \widetilde{x_1(t)} - \varepsilon_2$, 当 $\varepsilon_1 \to 0$ 且 t 充分大时,可得 $\widetilde{x_1(t)} - \varepsilon_2 < x_1(t) < \widetilde{x_1(t)} + \varepsilon_2$,这表明当 $t \to \infty$ 时,$x_1(t) \to \widetilde{x_1(t)}$. 证明完毕.

注 2.1　由定理 2.1,收获过度会使捕食者趋向灭绝,破坏生物资源的可持续发展.

接下来我们研究系统(2)的持久性. 首先给出持久的定义.

定义 2.1 如果存在常数 $m, M > 0$(与初值无关)与有限时间 T_0,当 $t \geqslant T_0$ 时,使得系统(2)的所有解$(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$(其中初值 $x_1(t) > 0, x_2(0^+) > 0, x_3(0^+) > 0$),有 $m \leqslant x_1(t) < M/k, x_2(t) \leqslant M, m \leqslant x_3(t) \leqslant M$ 成立,那么就称系统(2)是持久的.

定理 2.2 设

$$E < -d_3 + k\beta e^{-w\tau_1}\left\{\left[((a - \beta x_3^*) + b\mu) + \sqrt{((a - \beta x_3^*) + b\mu)^2 + 4(a - \beta x_3^*)b\mu/(e^{(a-\beta x_3^*)\tau} - 1)}\right]/(2b)\right\},$$

则存在一个正常数 q,对于充分大的 t,使得系统(3) 的每一个正解$(x_1(t), x_3(t))$满足 $x_3(t) \geqslant q$,其中 x_3^* 由下面的方程决定:

$$\frac{2b(d_3 + E)}{k\beta e^{-w\tau_1}} = ((a - \beta x_3^*) + b\mu) + \sqrt{((a - \beta x_3^*) + b\mu)^2 + 4(a - \beta x_3^*)b\mu/(e^{(a-\beta x_3^*)\tau} - 1)}.$$

证明 系统(3)的第 1 个方程可以改写成

$$\frac{dx_3(t)}{dt} = [k\beta e^{-w\tau_1}x_1(t) - (d_3 + E)]x_3(t) - k\beta e^{-w\tau_1}\frac{d}{dt}\int_{t-\tau_1}^{t} x_1(u)x_3(u)du, \tag{17}$$

设$(x_1(t), x_3(t))$是系统(3) 的任意正解. 由(17)式,定义 $V(t)$ 如下:

$$V(t) = x_3(t) + k\beta e^{-w\tau_1}\int_{t-\tau_1}^{t} x_1(u)x_3(u)du.$$

$V(t)$ 沿系统(3)的解曲线求导,得

$$\frac{dV(t)}{dt} = [k\beta e^{-w\tau_1}x_1(t) - (d_3 + E)]x_3(t). \tag{18}$$

既然

$$E < -d_3 + k\beta e^{-w\tau_1}\left\{\left[((a - \beta x_3^*) + b\mu) + \sqrt{((a - \beta x_3^*) + b\mu)^2 + 4(a - \beta x_3^*)b\mu/(e^{(a-\beta x_3^*)\tau} - 1)}\right]/(2b)\right\},$$

那么存在充分小的 $\varepsilon > 0$ 使得

$$k\beta e^{-w\tau_1}\left(\left\{\left[((a - \beta x_3^*) + b\mu) + \sqrt{((a - \beta x_3^*) + b\mu)^2 + 4(a - \beta x_3^*)b\mu/(e^{(a-\beta x_3^*)\tau} - 1)}\right]/(2b)\right\} + \varepsilon\right) > d_3 + E.$$

我们断言存在 $t_0 > 0$,当 $t > t_0$ 时,可能存在 $x_3(t) < x_3^*$. 假设这是可能的,则存在 $t_0 > 0$,当 $t > t_0$ 时,使得 $x_3(t) < x_3^*$. 当 $t > t_0$ 时,由系统(3)的第 1 个方程得

$$\frac{dx_1(t)}{dt} > [(a - \beta x_3^*) - bx_1(t)]x_1(t). \tag{19}$$

当 $t > t_0$ 时,考虑下面的比较方程

$$\begin{cases} \dfrac{dv(t)}{dt} = [(a - \beta x_3^*) - bx_1(t)]x_1(t), & t \neq n\tau, \\ \Delta v(t) = \mu, & t = n\tau, \end{cases} \tag{20}$$

由引理 1.4,我们得到

$$\widetilde{v(t)} = \frac{(a - \beta x_3^*) v^* \mathrm{e}^{(a-\beta x_3^*)(t-n\tau)}}{(a - \beta x_3^*) - bv^* + bv^* \mathrm{e}^{(a-\beta x_3^*)(t-n\tau)}}, \qquad n\tau < t \leqslant (n+1)\tau$$

是方程(20)的唯一的全局渐进稳定的周期解,其中

$$v^* = \frac{((a - \beta x_3^*) + b\mu) + \sqrt{((a - \beta x_3^*) + b\mu)^2 + 4(a - \beta x_3^*) b\mu / (\mathrm{e}^{(a-\beta x_3^*)\tau} - 1)}}{2b}$$

$$\left(> \frac{a - \beta x_3^*}{b} \right).$$

再由脉冲微分方程的比较定理[2],则存在 $t_1(> t_0 + \tau_1)$ 使得不等式 $x_1(t) \geqslant \widetilde{v(t)} + \varepsilon$ 成立,当 $t \geqslant t_1$ 时. 那么当 $t \geqslant t_1$ 时,有 $x_1(t) \geqslant v^* + \varepsilon$. 为了方便,我们作记号 $\sigma \stackrel{\Delta}{=} v^* + \varepsilon$. 于是我们得到

$$k\beta \mathrm{e}^{-w\tau_1}\sigma > d_3 + E,$$

所以当 $t > t_1$ 时,有

$$V'(t) > x_3(t)(k\beta \mathrm{e}^{-w\tau_1}\sigma - d_3 - E).$$

令 $x_3^m = \min_{t \in [t_1, t_1+\tau_1]} x_3(t)$,我们将证明当 $t \geqslant t_1$ 时,$x_3(t) \geqslant x_3^m$. 反之,存在 $T_0 > 0$,当 $t_1 \leqslant t \leqslant t_1 + \tau_1 + T_0$,$x_3(t_1 + \tau_1 + T_0) = x_3^m$ 时,使得 $x_3(t) \geqslant x_3^m$ 且 $x_3'(t_1 + \tau_1 + T_0) < 0$. 则系统(3)的第1个方程表明

$$\begin{aligned} & x_3'(t_1 + \tau_1 + T_0) = \\ & \quad k\beta \mathrm{e}^{-w\tau_1} x_1(t_1 + \tau_1 + T_0) x_3(t_1 + \tau_1 + T_0) - (d_3 + E) x_3(t_1 + \tau_1 + T_0) \geqslant \\ & \quad (k\beta \mathrm{e}^{-w\tau_1}\sigma - d_3 - E) x_3^m > 0, \end{aligned}$$

这样有矛盾. 所以,当 $t > t_1$ 时,$x_3(t) \geqslant x_3^m$. 则当 $t > t_1$ 时,$V'(t) > x_3^m(k\beta \mathrm{e}^{-w\tau_1}\sigma - d_3 - E) > 0$. 这表明 $t \to \infty$,$V(t) \to \infty$. 此与 $V(t) \leqslant M(1 + k\tau_1\beta \mathrm{e}^{-w\tau_1})$ 相矛盾. 断言证明完毕.

根据此断言,我们只要考虑两种情形. 第1种情形是对所有充分大的 t 有 $x_3(t) \geqslant x_3^*$,那么我们就达到了证明的目的. 第2种情形是对充分大的 t 有 $x_3(t)$ 在 x_3^* 振动.

定义

$$q = \min\left\{ \frac{x_3^*}{2}, q_1 \right\}, \tag{21}$$

其中 $q_1 = x_3^* \mathrm{e}^{-(d_3+E)\tau_1}$. 我们希望得到对于充分大的 t 有 $x_3(t) \geqslant q$. 此结论对于第1种情形是很明显的. 而对于第2种情形,对于所有 $t^* < t < t^* + \xi$,设 $t^* > 0$ 和 $\xi > 0$ 满足 $x_3(t^*) = x_3(t^* + \xi) = x_3^*$ 且 $x_3(t) < x_3^*$,其中 t^* 充分大使得

$$x_3(t) > \sigma, \ t^* < t < t^* + \xi,$$

$x_3(t)$ 是一致连续. 系统(3)的正解是一致有界且 $x_3(t)$ 并没有受脉冲的影响. 因此,存在某个 $T(0 < T < \tau_1$ 且 T 依赖于 $t^*)$ 使得 $x_3(t^*) > x_3^*/2\ (t^* < t < t^* + T)$. 如果 $\xi < T$,结论非常明显. 我们只要考虑 $T < \xi < \tau_1$ 情形. 既然 $x_3'(t) > -(d_3 + E)x_3(t)$ 且 $x_3(t^*) = x_3^*$,那么对于 $t \in [t^*, t^* + \tau_1]$,$x_3(t) \geqslant q_1$ 成立. 因此上述证明可以类似继续做下去. 而对于 $t \in [t^* + \tau_1, t^* + \xi]$,我们可得 $x_3(t) \geqslant q_1$. 因为此类区间 $t \in [t^*, t^* + \xi]$ 可以任意的选取(仅仅要求 t^* 足够大). 所以对于足够大的 t,可以得到结论 $x_3(t) \geqslant q$. 在第2种情形中,类似上面的讨论,q 的选择不依赖系统(3)的正解,因此,对于充分大的 t,可得系统(3)任何正解满足 $x_3(t) \geqslant q$. 定理证完.

定理 2.3 设

$$E < -d_3 + k\beta e^{-w\tau_1}\left\{\left[((a-\beta x_3^*)+b\mu)+\sqrt{((a-\beta x_3^*)+b\mu)^2+4(a-\beta x_3^*)b\mu/(e^{(a-\beta x_3^*)\tau}-1)}\right]/(2b)\right\},$$

则系统(2)是持久的.

证明 系统(2)的任意解记作 $(x_1(t),x_2(t),x_3(t))$. 由系统(2)的第 1 个方程与定理 2.2,得到

$$\frac{dx_1(t)}{dt} \geqslant x_1(t)\left[a-\beta\left(\frac{M_0}{d}+\frac{\mu e^{d\tau}}{e^{d\tau}-1}\right)-bx_1(t)\right],$$

类似于定理 2.1 的讨论,得到 $\lim_{t\to\infty} x_1(t) \geqslant p$, 其中

$$p = \frac{(a-\beta M+b\mu)+\sqrt{(a-\beta M+b\mu)^2+4(a-\beta M)b\mu/(e^{(a-\beta M)\tau}-1)}}{2b} - \varepsilon$$

且 $$M = \frac{M_0}{d}+\frac{\mu e^{d\tau}}{e^{d\tau}-1}.$$

再由定理 2.1,系统(2)的第 2 个方程可以写成

$$\frac{dx_2(t)}{dt} \geqslant k\beta\left[pq-\frac{1}{k}\left(\frac{M_0}{d}+\frac{\mu e^{d\tau}}{e^{d\tau}-1}\right)^2 e^{-w\tau_1}\right]-wx_2(t),$$

易得 $\lim_{t\to\infty} x_1(t) \geqslant \delta$, 其中

$$\delta = \left\{k\beta\left[pq-\frac{1}{k}\left(\frac{M_0}{d}+\frac{\mu e^{d\tau}}{e^{d\tau}-1}\right)^2 e^{-w\tau_1}\right]\right\}\Big/ w - \varepsilon.$$

从定理 2.2 与上面的讨论可知系统(2)是持久的. 定理 2.3 证明完毕.

注 2.2 由定理 2.3,我们知道合理的收获使捕食者种群不会灭绝,也就是说,合理的收获行为能够使具开发的捕食-食饵系统持久.

3 数值分析与讨论

在这篇论文中,我们研究了捕食者具阶段结构的时滞脉冲捕食-食饵系统. 我们分析得到系统(2)的捕食者灭绝周期解是全局吸引的. 由数值分析可知,脉冲存放食饵与连续收获捕食者对系统(2)有重大的作用. 假设 $d_3 = 0.2$, $a = 1, b = 1$, $E = 0.8$, $\tau_1 = 0, \mu = 0.1, \beta = 1$, $k = 0.9, x_1(0) = 0.8, x_3(0) = 0.8$,很明显参数满足定理 2.1 的条件,捕食者灭绝周期解是全局吸引的(见图 1 ~ 图 3). 又假设 $d_3 = 0.3$, $a = 1, b = 1$, $E = 0.3, \mu = 0.5, \beta = 2$, $\tau_1 = 0$, $k = 0.9$, $x_1(0) = 0.1, x_3(0) = 1.1$,所有的参数都满足定理 2.3 的条件,那么,系统(2) 是持久的(见图 4 ~ 图 6). 这些说明了合理的收获能够保证生物资源的可持续发展. 从定理 2.1 与定理 2.3,容易猜想到一定有个阈值 μ^*, 如果 $\mu < \mu^*$, 系统(2) 的捕食者灭绝周期解 $(\widetilde{x_1(t)},0,0)$ 是全局吸引的. 如果 $\mu > \mu^*$, 系统(2) 是持久的,或者从定理 2.1 与定理 2.3 可知一定存在一个阈值 E^*. 如果 $E > E^*$, 系统(2) 的捕食者灭绝周期解$(\widetilde{x_1(t)},0,0)$是全局吸引的. 如果 $E < E^*$, 系统(2)是持久的. 结论表明脉冲存放食饵对系统(2)的持久性起着一个重要的作用,同时为生物资源管理提供了策略基础. 但是还有一个有意义的问题是:我们怎么进行优化系统(2)的收获问题? 以后,我们继续研究这些问题.

注 图 1 参数为 $x_1(0) = 1.1, x_3(0) = 1.1, \tau_1 = 0, d_3 = 0.2, a = 1, b = 1, \beta = 0.8, E = 0.8, \mu = 0.1$, $\tau = 0.5, k = 0.9$;图 2 参数为 $x_1(0) = 1.1, x_3(0) = 1.1, \tau_1 = 0, d_3 = 0.2, a = 1, b = 1, \beta = 0.8, E = 0.8$,

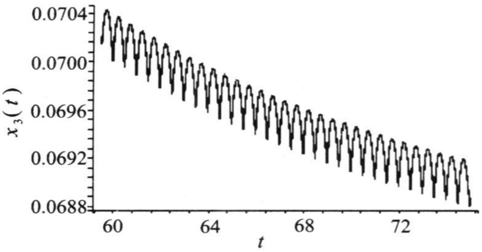

图 1 系统(3)捕食者灭绝周期解中捕食者种群 $x_3(t)$ 的时间序列图

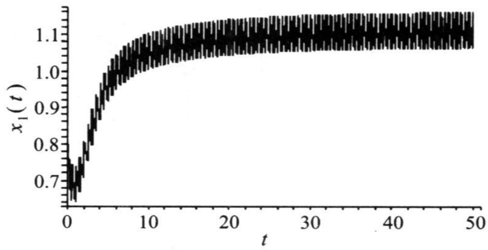

图 2 系统(3)捕食者灭绝周期解中食饵种群 $x_1(t)$ 的时间序列图

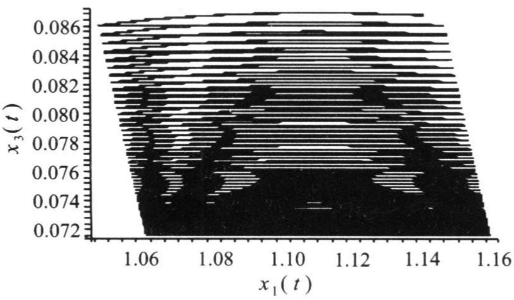

图 3 系统(3)捕食者灭绝周期解全局吸引的食饵种群与成年捕食者种群的相图

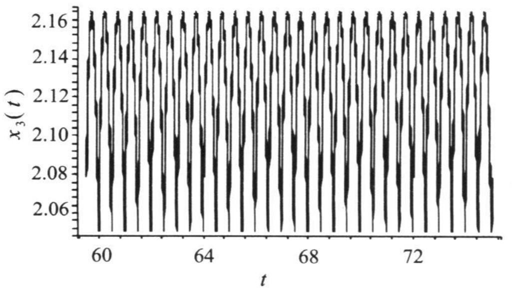

图 4 系统(3)持久的捕食者种群 $x_3(t)$ 的时间序列图

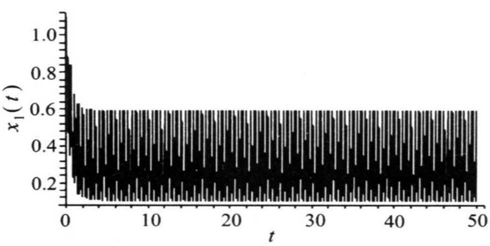

图 5 系统(3)持久的食饵种群 $x_1(t)$ 的时间序列图

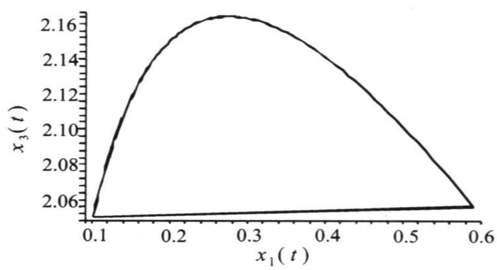

图 6 系统(3)持久的正周解解

$\mu = 0.1$, $\tau = 0.5$, $k = 0.9$; 图3 参数为 $x_1(0) = 1.1$, $x_3(0) = 1.1$, $\tau_1 = 0$, $d_3 = 0.2$, $a = 1$, $b = 1$, $\beta = 0.8$, $E = 0.8$, $\mu = 0.1$, $\tau = 0.5$, $k = 0.9$; 图4 参数为 $x_1(0) = 1.1$, $x_3(0) = 1.1$, $\tau_1 = 0$, $d_3 = 0.2$, $a = 1$, $b = 1$, $\beta = 2$, $E = 0.3$, $\tau = 0.5$, $\mu = 0.5$, $k = 0.95$; 图 5 参数为 $x_1(0) = 1.1$, $x_3(0) = 1.1$, $\tau_1 = 0$, $d_3 = 0.2$, $a = 1$, $b = 1$, $\beta = 2$, $E = 0.3$, $\tau = 0.5$, $\mu = 0.5$, $k = 0.95$; 图 6 参数为 $x_1(0) = 1.1$, $x_3(0) = 1.1$, $\tau_1 = 0$, $d_3 = 0.2$, $a = 1$, $b = 1$, $\beta = 2$, $E = 0.3$, $\tau = 0.5$, $\mu = 0.5$, $k = 0.95$.

[参 考 文 献]

[1] Nieto J J, Rodriguez- Lopez R. Periodic boundary value problems for non- Lipschitzian impulsive functional differential equations[J]. J Math Anal Appl, 2006, **31**(8): 593- 610.

[2] Saker S H. Oscillation and global attractivity of impulsive periodic delay respiratory dynamics model [J]. Chinese Ann Math, Ser B, 2005, **26**(4): 511- 522.

[3] d' Onofrio A. A general framework for modeling tumor- immune system competition and im-

munotherapy: Mathematical analysis and biomedical inferences[J]. Physica D: Nonlinear Phenomena, 2005, **20**(8): 220- 235.

[4] GAO Shu- jing, CHEN Lan- sun. Pulse vaccination strategy in a delayed SIR epidemic model with vertical transmission[J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems, Ser B, 2007, **7**(1): 77- 86.

[5] Clark C W. Mathematical Bioeconomics[M]. New York: Wiley, 1990.

[6] JIAO Jian- jun, MENG Xin- zhu, CHEN Lan- sun. A stage- structured Holling mass defence predator- prey 3 model with impulsive perturbations on predators[J]. Applied Mathematics and Computation, 2007, **189**(2): 1448- 1458.

[7] SON Xin- yu, LI Yong- feng. Dynamic complexities of a Holling Ⅱ two- prey one- predator system with impulsive effect[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2007, **33**(2): 463- 478.

[8] Aiello W G, Freedman H I. A time- delay model of single- species growth with stage- structure[J]. Math Biosci, 1990, **101**(2): 139- 153.

[9] Freedman H I, Gopalsamy K. Global stability in time- delayed single species dynamics[J]. Bull Math Biol, 1986, **48**(5/6): 485- 492.

[10] Beretta E, Kuang Y. Global analysis in some delayed ratio- dependent predator- prey system[J]. Nonlinear Anal, 1998, **32**(3): 381- 408.

[11] YANG Kuang. Delay Differential Equation With Application in Population Dynamics[M]. N Y: Academic Press, 1993, 67- 70.

[12] Wang W, Chen L. A predator- prey system with stage structure for predator[J]. Comput Math Appl, 1997, **33**(8): 83- 91.

[13] JIAO Jian- jun, PANG Guo- ping, CHEN Lan- sun, et al. A delayed stage- structured predator- prey model with impulsive stocking on prey and continuous harvesting on predator[J]. Applied Mathematics and Computation, 2008, **195**(1): 316- 325.

[14] SONG Xin- yu, CHEN Lan- sun. Optimal harvesting policy and stability for a single- species growth model with stage structure[J]. Journal of System Sciences and Complex, 2002, **15**(2): 194- 201.

[15] DONG Ling- zhen, CHEN Lan- sun, SUN Li- hua. Extinction and permanence of the predator- prey system with stocking of prey and harvesting of predator impulsively[J]. Math Methods Appl Sci, 2006, **29**(4): 415- 425.

[16] Wang W, Mulone G, Salemi F, et al. Permanence and stability of a stage- structured predator- prey model[J]. J Math Anal Appl, 2001, **262**(2): 499- 528.

[17] Lakshmikantham V, Bainov D D, Simeonov P. Theory of Impulsive Differential Equations[M]. Singapor: World Scientific, 1989.

[18] Bainov D, Simeonov P. Impulsive Differential Equations: Periodic Solutions and Applications [M]. **66**. New York: Longman, 1993.

[19] Caltagirone L E, Doutt R L. Global behavior of an SEIRS epidemic model with delays, the history of the vedalia beetle importation to California and its impact on the development of biological control [J]. Ann Rev Entomol, 1989, **34**: 1- 16.

Permanence and Global Attractivity of a Stage- Structured Predator- Prey Model With Continuous Harvesting on Predator and Impulsive Stocking on Prey

JIAO Jian- jun[1,2], CHEN Lan- sun[2], Juan J. Nieto[3], Torres Angela[4]

(1. School of Mathematics and Statistics, Guizhou College of Finance & Economics, Guiyang 550004, P. R. China;

2. Department of Applied Mathematics, Dalian University of Technology, Dalian 116024, P. R. China;

3. Department of Mathematical Analysis, Faculty of Mathematics, University of Santiago de Compostela 15782 Santiago de Compostela, Spain;

4. Department of Psychiatry, Radiology and Public Health, Faculty of Medicine, University of Santiago de Compostela 15782 Santiago de Compostela, Spain)

Abstract: A stage- structured delayed predator- prey model with impulsive stocking on prey and continuous harvesting on predator is investigated. According to the fact of biological resource management, the assumption of a predator- prey model with stage structure for predator population that each individual predator has the same ability to capture prey was improved. It was assumed that the immature individuals and the mature individuals of the predator population were divided by a fixed age and that immature predator population does not have the ability to attack prey. Sufficient conditions, which guarantee the global attractivity of predator- extinction periodic solution and the permanence of the system, were obtained. The results show that the behavior of impulsive stocking on prey plays an important role for the permanence of the system, and provides tactical basis for the biological resource management. Furthermore, numerical analysis is inserted to illuminate the dynamics of the system.

Key words: stage- structured; impulsive stocking; continuous harvesting; global attractivity; permanence