文章编号: 1000- 0887(2008) 05- 0601- 08

G- 凸空间中的择一原理和极大极小不等式*

M• 巴拉奇

(奥拉迪亚大学 数学系, 奥拉迪亚 410087, 罗马尼亚)

(协平推荐)

摘要: 利用 Kuo、Jeng 和 Huang 提出的不动点定理, 给出 G- 凸空间中关于 3 个映射值的非常一般的相交定理. 由此结果依次导出了关于极大元、解析择一和极大极小不等式的择一定理.

关 键 词: G- 凸空间; 严格 KKM 性质; 不动点定理; 极大元; 择一定理; 极大极小不等式

中图分类号: O189.1 文献标识码: A

1 引言及预备知识

集值映射(或单映射) $T: X \multimap Y$ 为一函数, 映集 X 到 Y 的幂集 2^Y, 即对 $x \in X$, 函数值 $T(x) \subset Y$. 给定映射 $T: X \multimap Y$, 映射 $T^-: Y \multimap X$ (定义为 $T^-(y) = \{x \in X: y \in T(x)\}$, $y \in Y$) 称为 T 的(下)逆.

设 $T: X \multimap Y$ 为一映射. 称集 $\{(x, y) \in X \times Y: y \in T(x)\}$ 为 T 的图. 对 $A \subset X$ 和 $B \subset Y$, 令 $T(A) = \bigcup_{x \in A} T(x)$ 和 $T^-(B) = \{x \in X: T(x) \cap B \neq \emptyset\}$.

对拓扑空间 X 和 Y, 若对任意闭集 $F \subset Y$, 集 $T^-(F)$ 在 X 中是闭的, 则称映射 $T: X \multimap Y$ 是上半连续的(u.s.c.); 若 $T(X)$ 包括在 Y 的紧子集中, 则称映射 T 是紧的; 若 T 的图在 $X \times Y$ 中是闭的, 则称映射 T 是闭的.

我们将需要涉及上述概念的以下两个引理. 第 1 个引理, 参见文献[1]的命题 1.

引理 1 设 X 和 Y 为拓扑空间和 $T: X \multimap Y$ 为一映射. 若 Y 是紧的, T 是闭的, 则 T 是上半连续的.

若 X 为拓扑空间的子集, 我们分别记 int$X$ 和 X 为 X 的内部和闭包.

引理 2 设 X 和 Y 为拓扑空间, Z 是 Hausdorff 拓扑空间. 并设 $T: X \multimap Y$ 是一个紧的闭的映射, 且 $g: Y \to Z$ 是连续函数. 则 gT 是紧且闭的.

证明 因为 T 是紧的, $\overline{T(X)}$ 是 Y 的紧子集, 又因为 g 是连续的, $g(\overline{T(X)})$ 是 Z 的包含 $(gT)(X)$ 的紧子集, 因而 gT 是紧的.

设 $(x, z) \in \overline{\mathrm{Gr}(gT)}$ 且 $\{(x_t, z_t)\}$ 是 $\mathrm{Gr}(gT)$ 中收敛于 (x, z) 的网, 则对每一个 t, 存在 $y_t \in T(x_t)$ 满足 $z_t = g(y_t)$. 当集 $\overline{T(X)}$ 是紧的, 则网 $\{y_t\}$ 包含收敛于 $y \in \overline{T(X)}$ 的子网 $\{y_{t_i}\}$. 并

* 收稿日期: 2007- 08-16; 修订日期: 2008-03-16
作者简介: Mircea Balaj, 教授(E- mail: mbalaj@uoradea.ro).
本文原文为英文, 吴承平 译, 丁协平 校.

且由于 T 是闭的且 $\{(x_t, y_t)\}$ 为 $\mathrm{Gr}(T)$ 中收敛于 (x, y) 的网, 则 $y \in T(x)$. 一方面, 我们有 $z_{t_i} = g(y_{t_i}) \to g(y)$; 另一方面, $z_{t_i} \to z$, 而空间 Z 是 Hausdorff 的, 我们得到 $z = g(y)$. 则 $z \in g(T(x))$, 即 $(x, z) \in \mathrm{Gr}(gT)$. 因此 gT 是闭的. □

定义 1 假设 X 为一非空集, Y 为一拓扑空间. 若对任意 $(x, y) \in X \times Y$ 和 $y \in T(x)$, 存在 $x' \in X$ 使 $y \in \mathrm{int}T(x')$, 则称映射 $T: X \multimap Y$ 是转移开值的[2].

下列引理是众所周知的(例如, 参见文献[3]的命题 1).

引理 3 设 X 为一拓扑空间, Z 为一非空集, 且 $P: X \multimap Z$ 为一映射. 则如下推断是等价的:

(i) P^- 是转移开值的, P 有非空值;

(ii) $X = \bigcup_{z \in Z} \mathrm{int}P^-(z)$.

广义凸空间或 G- 凸空间 $(E, D; \Gamma)$[4] 由拓扑空间 E 和一非空集 D 组成, 使对每一 $A \in \langle D \rangle$ 和基数 $|A| = n+1$, 存在 E 的子集 $\Gamma(A)$ 和连续函数 $\Phi_A: \Delta_n \to \Gamma(A)$ 使 $J \in \langle A \rangle$, 蕴含 $\Phi_A(\Delta_J) \subset \Gamma(J)$. 这里 $\langle D \rangle$ 表示 D 的所有非空有限子集的集合, Δ_n 表示具有顶点 $\{e_i\}_{i=0}^{n}$ 的任意 n- 单形, Δ_J 为 Δ_n 对应于 J 的面; 即若 $A = \{u_0, u_1, \cdots, u_n\}$ 和 $J = \{u_{i_0}, u_{i_1}, \cdots, u_{i_k}\} \subset A$, 则 $\Delta_J = \mathrm{co}\{e_{i_0}, e_{i_1}, \cdots, e_{i_k}\}$.

对应于 $E = D$ 情况的 G- 凸空间的重要例子是 Hausdorff 拓扑矢量空间的凸子集, 且对每一 $A \in \langle E \rangle$, $\Gamma(A)$ 是 A 的凸包. G- 凸空间的其它例子可参见文献[5-6].

本文仅考虑 $D = E$ 的情况, 所以 $(E, D; \Gamma)$ 记为 $(E; \Gamma)$. 对 G- 凸空间 $(E; \Gamma)$, 若对每一 $A \in \langle C \rangle$, $\Gamma(A) \subset C$, 则称 E 的子集 C 是 G- 凸的.

G- 凸一致空间 $(E; \mathscr{U}, \Gamma)$[7] 是 G- 凸空间, 其拓扑由一致结构 $\mathscr{U}$ 诱导. 若一致结构 $\mathscr{U}$ 有开对称环境构成的基 $\mathscr{B}$, 使对每一 $V \in \mathscr{B}$ 和任意 $x \in E$, $V[x] = \{y \in E: (x, y) \in V\}$ 是 G- 凸的, 则称 G- 凸一致空间 $(E; \mathscr{U}, \Gamma)$ 是局部 G- 凸一致空间.

设 Y 为 G- 凸空间 $(E; \Gamma)$ 的 G- 凸子集, X 为拓扑空间, $T, S: Y \multimap X$. 若对任意 $\{y_1, \cdots, y_n\} \in \langle Y \rangle$, 有 $\{y'_1, \cdots, y'_n\} \in \langle Y \rangle$ 使对 $\{1, \cdots, n\}$ 的任意非空子集 I, $T(\Gamma(\{y'_i: i \in I\})) \subset \bigcup_{i \in I} S(y_i)$, 则称 S 为关于 T 的广义 KKM 映射[8]. 若对每一关于 T 的广义 KKM- 映射 $S: Y \multimap X$, 族 $\{\overline{S(y)}: y \in Y\}$ 有有限交性质, 则称映射 $T: Y \multimap X$ 有严格 KKM 性质.

本文利用 Kou、Jeng 和 Huang[8] 提出的不动点定理, 得到关于 3 个映射值的非常一般的交定理. 由此结果依次导出了关于极大元、解析择一和极大极小不等式的择一定理.

以下, 所有拓扑空间都假设为 Hausdorff 的.

2 交定理和极大元

在我们的主要结果中, 两个引理仅仅是必要条件. 第 1 个引理是文献[8]定理 3.4 的特殊情况. 在文献[8]中, 作者始终假设对所有 $x \in E$, G- 凸空间 $(E; \Gamma)$ 满足条件 $x \in \Gamma(\{x\})$, 但从引理 1 的证明可看出, 定理 3.4 中的这个条件并不是必要的.

引理 4 设 Y 是局部 G- 凸一致空间 $(E; \mathscr{U}, \Gamma)$ 的 G- 凸子集. 若 $T: Y \multimap Y$ 是紧、闭的, 且具有严格 KKM 性质, 则 T 有一个不动点.

引理 5 设 Y 是 G- 凸空间 $(E; \Gamma)$ 的 G- 凸子集, X、Z 是两个拓扑空间. 若 $T: Y \multimap X$ 有严格 KKM 性质, 且 $g: X \to Z$ 是连续函数, 则 gT 也有严格 KKM 性质.

证明　本引理的证明类似于文献[9]中的命题3(ii). 设 $S: Y \multimap Z$ 是关于 gT 的广义KKM映射, 使对每一 $y \in Y$, $S(y)$ 是闭的. 对任意 $\{y_1, \cdots, y_n\} \in \langle Y\rangle$, 由于 S 是关于 gT 的广义KKM映射, 则有 $\{y'_1, \cdots, y'_n\} \in \langle Y\rangle$, 使对 $\{1, \cdots, n\}$ 的任意非空子集 I, $gT(\Gamma(\{y'_i: i \in I\})) \subset \bigcup_{i\in I} S(y_i)$. 所以, 对每一个这样的集 I, 有 $T(\Gamma(\{y'_i: i \in I\})) \subset \bigcup_{i\in I} g^{-1}(S(y_i))$. 因此 $g^{-1}S$ 为关于 T 的广义KKM映射. 所以族 $\{g^{-1}(S(y)): y \in Y\}$ 有有限交性质, 从而族 $\{S(y): y \in Y\}$ 也有有限交性质. 这表明 gT 有严格KKM性质. □

定理6　设 X 为一拓扑空间, Y 为局部G- 凸一致空间 $(E; \mathscr{U}, \Gamma)$ 的G- 凸子集, Z 为一非空集. 设3个映射 $P: X \multimap Z$, $Q: Y \multimap Z$, $T: Y \multimap X$ 满足如下条件:

(i) $X = \bigcup_{z \in Q(Y)} \mathrm{int} P^{-1}(z)$;

(ii) 对每一 $x \in X$, $\{y \in Y: P(x) \cap Q(y) \neq \varnothing\}$ 是G- 凸的;

(iii) T 是紧、闭的, 且有严格KKM性质.

则存在 $(x_0, y_0) \in X \times Y$, 使 $x_0 \in T(y_0)$ 和 $P(x_0) \cap Q(y_0) \neq \varnothing$.

证明　因为 T 是紧的, 则 $X_0 = \overline{T(Y)}$ 是 X 的紧子集. 由(i), $X_0 = \bigcup_{z \in Q(Y)} (\mathrm{int} P^{-1}(z) \cap X_0)$. 因此存在 Y 的有限子集 $A = \{y_1, y_2, \cdots, y_{n+1}\}$, 并且对每一 $i \in \{1, 2, \cdots, n+1\}$, 有 $z_i \in Q(y_i)$ 使 $X_0 = \bigcup_{i=1}^{n+1} (\mathrm{int} P^{-1}(z_i) \cap X_0)$. 因 E 是G- 凸空间, 则存在连续函数 $\phi: \Delta_n \to \Gamma(A) \subset Y$, 使对每一 $J \in \langle A\rangle$, $\phi(\Delta_J) \subset \Gamma(J)$.

设 $\{\alpha_i: 1 \leqslant i \leqslant n+1\}$ 是 X_0 上从属于开覆盖 $\{\mathrm{int} P^{-1}(z_i) \cap X_0, 1 \leqslant i \leqslant n+1\}$ 的连续单位分解. 这意味

$$\begin{cases} \text{对每一 } i \in \{1, 2, \cdots, n+1\},\ \alpha_i: X_0 \to [0, 1] \text{ 是连续的;} \\ \alpha_i(x) > 0 \Rightarrow x \in \mathrm{int} P^{-1}(z_i); \\ \text{对每一 } x \in X_0,\ \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i(x) = 1. \end{cases}$$

定义 $f: X_0 \to \Delta_n$ 为

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i(x) e_i, \qquad \text{对所有 } x \in X_0,$$

其中 e_i 是 R^{n+1} 中的 i $(i = 1, 2, \cdots, n+1)$ 阶单位矢量, Δ_n 为 n 维标准单形. 显然, f 是连续的. 对 $x \in X_0$, 记为 $J(x) = \{i \in \{1, 2, \cdots, n+1\}: \alpha_i(x) > 0\}$. 设 $g: X_0 \to Y$ 是由 $g(x) = \phi(f(x))$, $\forall x \in X$ 定义的连续函数. 则 $f(x) \in \Delta_{J(x)}$ 且

$$g(x) \in \Gamma(\{y_i: i \in J(x)\}), \qquad \text{对所有 } x \in X_0. \tag{1}$$

设 $x \in X_0$ 和 $i \in J(x)$. 我们有 $x \in \mathrm{int} P^{-1}(z_i) \subset P^{-1}(z_i)$, 因而 $z_i \in P(x)$. 则对 $i \in J(x)$, $z_i \in P(x) \cap Q(y_i)$. 因此有

$$\{y_i: i \in J(x)\} \subset \{y \in Y: P(x) \cap Q(y) \neq \varnothing\}. \tag{2}$$

由式(1)、(2)和条件(ii), 有

$$P(x) \cap Q(g(x)) \neq \varnothing, \qquad \text{对所有 } x \in X_0. \tag{3}$$

根据引理2和引理5, gT 是紧、闭的, 且有严格KKM性质. 按照引理4, gT 有一个不动点. 这说明存在 $(x_0, y_0) \in X_0 \times Y$, 使 $x_0 \in T(y_0)$ 和 $y_0 = g(x_0)$. 由式(3), 我们有 $P(x_0) \cap Q(y_0) \neq \varnothing$. □

若 $P(x_0) = \varnothing$, 则称点 $x_0 \in X$ 是映射 $P: X \multimap Z$ 的极大元. 由定理1, 我们得到如下关于

极大元存在性的择一定理.

定理 7　设 X、Y、Z 的定义同定理 6, 且 3 个映射 $P: X \multimap Z$, $Q: Y \multimap Z$, $T: Y \multimap X$ 满足如下条件:

(i) P^- 是转移开值的;

(ii) 对每一 $x \in X$, $\{y \in Y: P(x) \cap Q(y) \neq \emptyset\}$ 是 G- 凸的;

(iii) T 是紧､闭的, 且有严格 KKM 性质;

(iv) 对每一 $y \in Y$ 和任意 $x \in T(y)$, $P(x) \cap Q(y) = \emptyset$.

则如下推断至少有一个成立:

(a) 存在 $x_0 \in X$, 使 $P(x_0) = \emptyset$.

(b) 存在 $z_0 \in Z$, 使 $Q^-(z_0) = \emptyset$.

证明　假设推断(a)､(b)都不成立, 则 P 有非空值且 $Q(Y) = Z$. 由条件(i)和引理 3, 有

$$X = \bigcup_{z \in Z} \operatorname{int} P^-(z) = \bigcup_{z \in Q(Y)} \operatorname{int} P^-(z),$$

于是定理 6 中的条件(i)成立. 按照定理 6, 存在 $y_0 \in Y$ 和 $x_0 \in T(y_0)$ 使 $P(x_0) \cap Q(y_0) \neq \emptyset$. 这与条件(iv)矛盾. 证毕. □

定义 2　设 X 和 Z 为 G- 凸空间的两个 G- 凸子集. 若对 Z 的每一 G- 凸子集 C, $Q^-(C)$ 是 G - 凸的, 则称映射 $Q: X \multimap Z$ 是 G- 拟凸的[10].

下列结论分别是定理 6 和定理 7 的简单推论.

推论 8　设 X 为一拓扑空间, Y 为局部 G- 凸一致空间 $(E_1; \mathscr{U}, \Gamma_1)$ 的 G- 凸子集, Z 是 G - 凸空间 $(E_2; \Gamma_2)$ 的 G- 凸子集, 3 个映射 $P: X \multimap Z$, $Q: Y \multimap Z$, $T: Y \multimap X$ 满足定理 6 中的条件(i)和(iii). 若 P 有 G- 凸值, 且 Q 是 G- 拟凸的, 则存在 $(x_0, y_0) \in X \times Y$ 使 $x_0 \in T(y_0)$ 和 $P(x_0) \cap Q(y_0) \neq \emptyset$.

推论 9　设 X、Y、Z 与推论 8 中相同, 3 个映射 $P: X \multimap Z$, $Q: Y \multimap Z$, $T: Y \multimap X$ 满足定理 7 中的条件(i)､(iii)､(iv). 若 P 有 G- 凸值, 且 Q 是 G- 拟凸的, 则如下推断至少有一个成立:

(a) 存在 $x_0 \in X$ 使 $P(x_0) = \emptyset$;

(b) 存在 $z_0 \in Z$ 使 $Q^-(z_0) = \emptyset$.

3　解析择一和极大极小不等式

定义 3　设 X 为一拓扑空间, Y 为非空集. 若对每一 $(x, y) \in X \times Y$ 和 $f(x, y) < \lambda$, 存在点 x 的邻域 $N(x)$ 和点 $y' \in Y$, 使对所有 $x \in N(x)$, $f(x', y') < \lambda$, 则对某些 $\lambda \in \mathbf{R}$, 称函数 $f: X \times Y \to \overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ 在 x 是 λ- 转移上半连续的. 若对每一 $\lambda \in \mathbf{R}$, f 在 x 是 λ- 转移上半连续的, 则称 f 在 x 是转移上半连续的.

显然, 每一个在 x 上半连续的函数, 对每一实数 λ, 在 x 点都是 λ- 转移上半连续的, 但是其逆命题不成立[11].

如下引理的证明比较简单(参见文献[3]的引理 4).

引理 10　设 X 为一拓扑空间, Y 为非空集, λ 为实数. 函数 $f: X \times Y \to \overline{\mathbf{R}}$ 在 x 是 λ- 转移上半连续的, 当且仅当映射 $F: Y \multimap X$(定义为 $F(y) = \{x \in X: F(x, y) < \lambda\}$) 是转移开值的.

若 Y 为 G- 凸空间 $(E; \Gamma)$ 的 G- 凸子集, 则当对每一 $\lambda \in \mathbf{R}$, 集 $\{y \in Y: q(y) < \lambda\}$ 是 G

- 凸的, 或等价的, 当对任意$\{y_1, \ldots, y_n\} \in \langle Y\rangle$及对所有$y \in \Gamma\{y_1, \ldots, y_n\}$有$q(y) \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} q(y_i)$, 则称函数$q: Y \to \mathbf{R}$是G- 拟凸的. 若$(E_1; \Gamma_1)$、$(E_2; \Gamma_2)$是两个G- 凸空间, 熟知$(E_1 \times E_2, \Gamma)$也是G- 凸空间, 其中$\Gamma(A \times B) = \Gamma_1(A) \times \Gamma_2(B)$, $(A, B) \in \langle E_1\rangle \times \langle E_2\rangle$. 容易证明, 若$Y$和$Z$分别为G- 凸空间$(E_1; \Gamma_1)$和$(E_2; \Gamma_2)$的两个G- 凸子集, 则函数$q: Y \times Z \to \mathbf{R}$是G- 拟凸的, 当且仅当对每一$\{(y_1, z_1), \ldots, (y_n, z_n)\} \in \langle Y \times Z\rangle$和任意$y \in \Gamma_1(\{y_1, \ldots, y_n\})$及$z \in \Gamma_2(\{z_1, \ldots, z_n\})$, 有$q(y, z) \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} q(y_i, z_i)$.

下面引入一个相近的概念.

定义 4 设Y和Z如前述. 若对$Y\times Z$的任意有限子集$\{(y_1, z_1), \ldots, (y_n, z_n)\}$和每一$y \in \Gamma_1(\{y_1, \ldots, y_n\})$, 存在$z \in \Gamma_2(\{z_1, \ldots, z_n\})$, 使$q(y, z) \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} q(y_i, z_i)$, 则称函数$q: Y\times Z \to \mathbf{R}$是$(y, z)$- G- 拟凸的.

若Y和Z是两个实矢量空间中的凸集, 且Γ_1、Γ_2各自与凸包重合, 则此函数称为(y, z)- 拟凸的.

显然, 任意G- 拟凸函数都是(y, z)- G- 拟凸的. 但下面的例子表明其逆不成立. 设$q: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$是定义为

$$q(y, z) = \begin{cases} 1, & \text{当}(y, z) \in \mathbf{Q}\times \mathbf{Q}, \\ 0, & \text{当}(y, z) \notin \mathbf{Q} \times \mathbf{Q} \end{cases}$$

的函数, 其中$\mathbf{Q}$表示有理数集.

我们证明q在$\mathbf{R} \times \mathbf{R}$上不是拟凸的. 设$(y_1, z_1) = (\sqrt{2}/2, 0)$, $(y_2, z_2) = (0, 1+\sqrt{2}/2)$. 则

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(y_1, z_1) + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)(y_2, z_2) \in \mathrm{co}\{(y_1, z_1), (y_2, z_2)\},$$

但

$$q\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 1 > \max_{i\in\{1,2\}} q(y_i, z_i) = 0.$$

因此q在$\mathbf{R}\times \mathbf{R}$上不是拟凸的. 我们证明$q$是$(y, z)$- 拟凸的. 设$\{(y_1, z_1), \ldots, (y_n, z_n)\}$是$\mathbf{R}\times \mathbf{R}$的有限子集, 且$y \in \mathrm{co}\{y_1, \ldots, y_n\}$. 若对某些$i \in \{1, \ldots, n\}$, $\{y_i, z_i\} \in \mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$, 则$\max_{1\leqslant i\leqslant n} q(y_i, z_i) = 1$且不等式$q(y, z) \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} q(y_i, z_i)$对任意$z \in \mathrm{co}\{z_1, \ldots, z_n\}$成立. 现假设$\{(y_1, z_1), \ldots, (y_n, z_n)\} \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$, 则当取$z = z_1 \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$时, 有$q(y, z) = 0 = \max_{1\leqslant i\leqslant n} q(y_i, z_i)$.

引理 11 设Y和Z分别是两个G- 凸空间$(E_1; \Gamma_1)$和$(E_2; \Gamma_2)$中的G- 凸集, 且$q: Y \times Z \to \mathbf{R}$. 若$q$是$(y, z)$- G- 拟凸的, 则对每一$\beta \in \mathbf{R}$, 映射$Q_\beta: Y \multimap Z$(定义为$Q_\beta(y) = \{z \in Z: q(y, z) < \beta\}$)是G- 拟凸的.

证明 设$\beta \in \mathbf{R}$. 我们仅需证明对Z的G- 凸子集C, $Q^-_\beta(C)$是G- 凸的. 设$\{y_1, \ldots, y_n\} \subset Q^-_\beta(C)$, $y \in \Gamma_1(\{y_1, \ldots, y_n\})$, 则对每一$i \in \{1, \ldots, n\}$, 存在$z_i \in C$, 使$q(y_i, z_i) < \beta$. 因$q$是$(y, z)$- G- 拟凸的, 则存在$z \in \Gamma_2(\{z_1, \ldots, z_n\}) \subset C$, 使$q(y, z) \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} q(y_i, z_i) < \beta$. 因此, $z \in Q_\beta(y) \cap C$, 从而$y \in Q^-_\beta(C)$. □

定理 12 设X为一拓扑空间, Y为局部G- 凸一致空间$(E_1, \mathscr{U}, \Gamma_1)$的G- 凸子集, Z为G- 凸空间$(E_2; \Gamma_2)$的G- 凸子集, $p: X \times Z \to \mathbf{R}$, $q: Y\times Z \to \mathbf{R}$, $t: X \times Y \to \mathbf{R}$为函数, α、β、λ为实数. 假设以下条件被满足:

(i) p 在 x 是 α- 转移上半连续的;

(ii) 对每一 $x\in X$, 集 $\{z\in Z: p(x,z)<\alpha\}$ 是 G- 凸的;

(iii) q 是 (y,z)- G- 拟凸的;

(iv) 对 $x\in X, y\in Y, z\in Z$, 如下推断成立: $p(x,z)<\alpha$ 和 $q(y,z)<\beta\Rightarrow t(x,y)<\lambda$;

(v) 存在 X 的紧子集 K, 使对每一 $x\in X\setminus K$, 及对所有 $y\in Y$, $t(x,y)<\lambda$;

(vi) t 在 $X\times Y$ 上是上半连续的;

(vii) 映射 $T: X\multimap Y$ (定义为 $T(x)=\{y\in Y: t(x,y)\geqslant\lambda\}$) 有严格 KKM 性质.

以下推断至少有一个成立:

(a) 存在 $x_0\in X$, 使对所有 $z\in Z$, $p(x_0,z)\geqslant\alpha$;

(b) 存在 $z_0\in Z$, 使对所有 $y\in Y$, $q(y,z_0)\geqslant\beta$.

证明 定义映射 $P: X\multimap Z$, $Q: Y\multimap Z$, $T: Y\multimap X$ 如下:

$$P(x)=\{z\in Z, p(x,z)<\alpha\},\quad Q(y)=\{z\in Z: q(y,z)<\beta\},$$
$$T(y)=\{x\in X: t(x,y)\geqslant\lambda\}.$$

由(i)及引理10, 有 P^- 是转移开值的. 由(v), $T(X)\subset K$, 知 T 是紧的. 因 t 在 $X\times Y$ 上是上半连续的, 则 T 的图即集 $\{(y,x)\in Y\times X: t(x,y)\geqslant\lambda\}$ 是闭的, 所以 T 是闭映射. 由(vii), T 有严格 KKM 性质. 由(ii), 映射 P 有 G- 凸值. 因 q 是 (y,z)- G- 拟凸的, 所以由引理11, 映射 Q 是 G- 拟凸的. 由(iv)容易知道, 定理7中的推断(iv)成立. 因此, 映射 P、Q、T 满足推论9的所有要求. 据此, 至少出现下列情况之一:

(a) 存在 $x_0\in X$ 使 $P(x_0)=\varnothing$, 即对所有 $z\in Z$, $p(x_0,z)\geqslant\alpha$;

(b) 存在 $z_0\in Z$ 使 $Q^-(z_0)=\varnothing$, 即对所有 $y\in Y$, $q(y,z_0)\geqslant\beta$. □

注1 当 X 是紧的, 定理12中的条件(v)平凡成立.

定理13 设 X 是一紧拓扑空间, Y 是局部 G- 凸一致空间 $(E_1;\mathscr{U},\Gamma_1)$ 的 G- 凸子集, Z 是 G- 凸空间 $(E_2;\Gamma_2)$ 的 G- 凸子集, 并且 $p: X\times Z\to\mathbf{R}$, $q: Y\times Z\to\mathbf{R}$, $t: X\times Y\to\mathbf{R}$ 为函数. 假设如下条件被满足:

(i) p 在 x 是转移上半连续的;

(ii) 对每一 $x\in X$, $p(x,\cdot)$ 在 Z 上是 G- 拟凸的;

(iii) q 是 (y,z)- G- 拟凸的;

(iv) 对 $x\in X, y\in Y, z\in Z$, 下列推断成立: $t(x,y)\leqslant p(x,z)+q(y,z)$;

(v) t 在 $X\times Y$ 上是上半连续的;

(vi) 对每一 $\lambda\leqslant\inf_{y\in Y}\sup_{x\in X}t(x,y)$, 映射 $T: Y\multimap X$ 定义为 $T(y)=\{x\in X: t(x,y)\geqslant\lambda\}$ 有 KKM 性质.

则

$$\inf_{y\in Y}\max_{x\in X}t(x,y)\leqslant\sup_{x\in X}\inf_{z\in Z}p(x,z)+\sup_{z\in Z}\inf_{y\in Y}q(y,z),$$

并约定 $\infty+(-\infty)=\infty$.

证明 首先, 若 t 在 $X\times Y$ 上是上半连续的, 则对每一 $y\in Y$, $t(\cdot,y)$ 在 X 上也在 x 是上半连续函数, 从而在紧集 X 上存在极大值 $\max_{x\in X}t(x,y)$.

我们可以假设

$$\inf_{y\in Y}\max_{x\in X}t(x,y)>-\infty,\quad \sup_{x\in X}\inf_{z\in Z}p(x,z)<\infty,$$

$$\sup_{z\in Z}\inf_{y\in Y} q(y,z) < \infty.$$

利用矛盾法, 假设

$$\inf_{y\in Y}\max_{x\in X} t(x,y) > \sup_{x\in X}\inf_{z\in Z} p(x,z) + \sup_{z\in Z}\inf_{y\in Y} q(y,z),$$

并选定 $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbf{R}$ 使

$$\sup_{x\in X}\inf_{z\in Z} p(x,z) < \alpha,\ \sup_{z\in Z}\inf_{y\in Y} q(y,z) < \beta,$$

$$\lambda < \inf_{y\in Y}\max_{x\in X} t(x,y),\quad \alpha + \beta < \lambda.$$

我们证明定理 12 中的条件(iv) 成立. 设 $x\in X$, $y\in Y$, $z\in Z$ 使 $p(x,y) < \alpha$, $q(y,z) < \beta$. 因 $\alpha+\beta<\lambda$, 由条件(iv) 得到

$$t(x,y) \leqslant p(x,z) + q(y,z) < \alpha + \beta < \lambda.$$

容易看出, 定理 12 中的所有要求都得到满足. 我们证明定理 12 结论的推断(a)、(b) 没有一个不可能成立.

若(a) 成立, 则有

$$\alpha \leqslant \inf_{z\in Z} p(x_0,z) \leqslant \sup_{x\in X}\inf_{z\in Z} p(x,z),$$

矛盾.

若(b) 成立, 则有

$$\beta \leqslant \inf_{y\in Y} q(y,z_0) \leqslant \sup_{z\in Z}\inf_{y\in Y} q(y,z),$$

矛盾.

推论 14 设 X、Y、Z 是 3 个 G- 凸空间的 3 个 G- 凸子集, 并且函数 $p: X\times Z \to \mathbf{R}$, $q: Y\times Z \to \mathbf{R}$, $t: X\times Y \to \mathbf{R}$ 满足定理 13 的条件(i)~(v), 并且

(vi)′ 对每一 $y\in Y$, $t(\cdot, y)$ 在 X 上是 G- 拟凸的. 则

$$\inf_{y\in Y}\max_{x\in X} t(x,y) \leqslant \sup_{x\in X}\inf_{z\in Z} p(x,z) + \sup_{z\in Z}\inf_{y\in Y} q(y,z),$$

并约定 $\infty + (-\infty) = \infty$.

证明 只要证明定理 13 中的条件(vi) 就足够了. 我们注意到, 对每一 $\lambda < \inf_{y\in Y}\sup_{x\in X} t(x,y)$, 定理 13 条件(vi) 中定义的映射 T 有非空值. 因此, 由(vi)′, T 的值是 G- 凸的. 因为由引理 1, T 是闭的且 X 是紧的, 所以 T 是带紧值的上半连续函数. 根据文献[8] 的命题 2.8, T 有严格 KKM- 映射. □

令人感兴趣的是, 本文提出的极大极小不等式与文献[12- 14] 得到的, 其它关于 3 个函数的极大极小不等式的比较.

[参 考 文 献]

[1] Lassonde M. Fixed points for Kakutani factorizable multifunctions[J]. J Math Anal Appl, 1990, **152**(1): 46- 60.

[2] Tian C G. Generalizations of the FKKM theorem and the Ky Fan minimax inequality, with applications to maximal elements, price equilibrium, and complementarity[J]. J Math Anal Appl, 1992, **170**(2): 457- 471.

[3] Lin L J. Applications of a fixed point theorem in G- convex spaces[J]. Nonlinear Anal, 2001, **46**(5): 601- 608.

[4] Kim H, Park S. Remarks on the KKM property for open- valued multimaps on generalized convex spaces[J]. J Korean Math Soc, 2005, **42**(1): 101- 110.

[5] Park S. New subclases of generalized convex spaces[A]. In: Fixed Point Theory and Applications [C]. New York: Nova Sci Publ, 2000, 91– 98.

[6] Park S. Remarks on fixed point theorems in generalized convex spaces[A]. In: Fixed Point Theory and Applications [C]. New York: Nova Sci Publ, 2000, 135– 144.

[7] Watson P J. Coincidences and fixed points in locally G– convex spaces[J]. Bull Austral Math Soc, 1999, **59**(2): 297– 304.

[8] Kuo T Y, Jeng J C, Huang Y Y. Fixed point theorems for compact multimaps on almost G– convex sets in generalized convex spaces[J]. Nonlinear Anal, 2007, **66**(2): 415– 426.

[9] Chang T H, Yen C L. KKM property and fixed point theorems[J]. J Math Anal Appl, 1996, **203**(1): 224– 235.

[10] Nikodem K. K– convex and K– concave set– valued functions[R]. Politechnika Lodzka, 1989.

[11] Ding X P. Coincidence theorems and equilibria of generalized games[J]. Indian J Pure Appl Math, 1996, **27**(11): 1057– 1071.

[12] Balaj M. Minimax inequalities in G– convex spaces[J]. Bull Austral Math Soc, 2005, **71**(3): 367– 376.

[13] Balaj M. Two minimax inequalities in G– convex spaces[J]. Appl Math Lett, 2006, **19**(3): 235– 239.

[14] Balaj M, Lin L J. Alternative theorems and minimax inequalities in G– convex spaces[J]. Nonlinear Anal, 2007, **67**(5): 1474– 1481.

Alternative Principles and Minimax Inequalities in G– Convex Spaces

Mircea Balaj

(Department of Mathematics, University of Oradea, 410087 Oradea, Romania)

Abstract: By using a fixed point theorem due to Kuo, Jeng and Huang in G– convex spaces a very general intersection theorem concerning the values of three maps was obtained. From this result successively alternative theorems concerning maximal elements, analytic alternatives and minimax inequalities were derived.

Key words: G– convex space; strict KKM property; fixed point theorem; maximal element; alternative theorem; minimax inequality