

# 非线性耦合 Rössler 系统的相位同步化\*

刘 勇<sup>1,2</sup>, 毕勤胜<sup>1</sup>, 陈予恕<sup>3</sup>

(1. 江苏大学 理学院, 江苏 镇江 212013;

2. 盐城师范学院 数学科学学院, 江苏 盐城 224002;

3. 哈尔滨工业大学, 哈尔滨 150001)

(本刊编委陈予恕来稿)

摘要: 讨论了具有  $\Gamma_1$  和  $\Gamma_2$  内共振非线性耦合系统的混沌相位同步. 通过引入混沌运动的相位定义说明对于不同的内共振系统, 在相对小的参数下两个子系统的平均频率差接近于 0, 即在弱相互作用下两个振子相位同步. 随着耦合力的增加, 平均频率差有波动, 与  $\Gamma_2$  内共振情形相比, 在主共振条件下两个子系统平均频率差的波动较小, 即使在弱作用下也是如此. 线性耦合力的增加增强了相位同步效应, 而非线性耦合力的增加使得两个子系统由相位同步向不同步转化, 且相位动力学与 Liapunov 的变化有关, 这也可以通过扩散云图来证实.

关键词: 相位同步; Rössler 振子; 非线性耦合; Liapunov 指数

中图分类号: O193 文献标识码: A

## 引 言

自从发现混沌完全同步<sup>[1]</sup>以来, 混沌同步已在激光动力学<sup>[2]</sup>、电子线路<sup>[3]</sup>、化学动力学<sup>[4]</sup>、神经动力学<sup>[5-7]</sup>和现代通讯<sup>[8-10]</sup>等领域得到了广泛研究. 近来人们发现: 尽管振子的振动是混沌的, 但它们的步伐却与不同激励的步伐保持一致, 这个激励可以通过另一个混沌系统产生<sup>[11]</sup>. 这个现象称为混沌相位同步, 它在理论上和实验上都得到了广泛研究<sup>[12-14]</sup>.

研究混沌系统相位同步的首要问题是确定混沌信号的振幅和相位. 因为混沌运动的相位不能直接从观测器得到, 人们提出了一些方法去计算混沌振子的相位, 例如: Gabor<sup>[15]</sup>提出了信号分析方法. Rosenblum, Pikovsky 和 Kurths 等人提出了一种比较简单的方法<sup>[16]</sup>, 混沌信号相位可以通过线性递代公式来计算, 其公式如下:

$$\phi(t) = 2\pi k + 2\pi(t - t_k)/(t_{k+1} - t_k), \quad t_k < t < t_{k+1},$$

其中  $t_k$  和  $t_{k+1}$  分别表示第  $k$  次和第  $k+1$  次与 Poincaré 截面相交的时间. 相应地, 混沌运动的平均频率可以定义为混沌运动相位的平均增长率, 其计算公式为

$$\omega = \lim_{N \rightarrow \infty} 2\pi N / t(N),$$

其中  $t(N)$  表示相点第  $N$  次相交到 Poincaré 截面时所需要的时间. 如果  $|n\phi_1 - m\phi_2| < \text{const}$ ,

\* 收稿日期: 2007-10-26; 修订日期: 2008-04-14

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(20476041; 10602020)

作者简介: 刘勇(1973-), 男, 江苏盐城人, 博士;

毕勤胜, 教授(联系人, Tel: + 86-511-88791110; E-mail: phi@ujss.edu.cn).

则产生  $n:m$  的混沌相位同步.  $n:m$  的混沌相位同步也可以从扩散云图(与 Poincare 截面相交的相点)来解释, 当扩散云图中的相点集中在相空间的较小(较大、几乎整个相空间)区域内, 两个系统是完全相位同步(不完全相位同步、不同步)的.

混沌系统的激励可以是外激励也可以是参数激励<sup>[17]</sup>, 当初始混沌运动的平均频率接近激励频率时, 产生同步现象<sup>[18]</sup>. 更一般的激励可以理解为两个不同的混沌系统之间的内部相互作用. 向量场的线性耦合可以揭示两个子系统之间的相位差异<sup>[19]</sup>. 许多线性耦合的混沌振子在一定的耦合力下可以产生同步现象, 例如:  $R^{L-ssler}$ <sup>[20]</sup>, Lorenz<sup>[21]</sup>, Mackey-Glass<sup>[22]</sup> 和 McKean<sup>[23]</sup> 系统, 甚至在有噪声的情况下<sup>[24]</sup> 也可以产生同步现象. 然而线性耦合不能代表两个振子之间的普遍的相互作用. 当两个振子之间引入一般的耦合形式时, 同步现象是否存在? 这种一般的耦合形式可能导致两个振子之间更为复杂的相互作用. 本文主要研究两个非线性耦合的  $R^{L-ssler}$  系统的混沌相位同步, 其表达式式下:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\omega_1 y_1 - z_1 + \varepsilon(x_2^2 - x_1^2), & \dot{x}_2 &= -\omega_2 y_2 - z_2 + \varepsilon(x_1^2 - x_2^2), \\ \dot{y}_1 &= \omega_1 x_1 + ay_1, & \dot{y}_2 &= \omega_2 x_2 + ay_2, \\ \dot{z}_1 &= f + z_1(x_1 - c), & \dot{z}_2 &= f + z_2(x_2 - c), \end{aligned}$$

其中  $a = 0.15, f = 0.2, c = 10.0$ . 参数  $\omega_1, \omega_2$  分别表示两个  $R^{L-ssler}$  系统的固有频率, 而  $\varepsilon$  是耦合参数. 参数不仅能影响规则运动的动力学行为<sup>[25-26]</sup>, 而且能影响混沌运动的动力学行为<sup>[27]</sup>, 从而可以推测参数可能影响耦合系统的动力学行为. 本文的主要目的是研究在不同的初始条件和不同的参数条件下, 非线性耦合力是如何影响耦合系统混沌相位同步效应的.

## 1 1:1 内共振的相位同步

为了研究两个子系统的固有频率比  $\omega_1: \omega_2$  接近 1:1 情形的混沌相位同步, 这里我们令  $\omega_1 = 1.0 + \sigma, \omega_2 = 1.0$ , 其中  $\sigma$  是调谐参数. 对于两个子系统的固有频率比  $\omega_1: \omega_2$  为严格的 1:1 情形, 即  $\sigma = 0$ , 在这种情况下两个  $R^{L-ssler}$  振子的固有频率是相同的. 两个子系统的平均频率差随参数  $\varepsilon$  变化曲线见图 1, 其中  $\Delta\omega = \Omega_1 - \Omega_2$ , 而  $\Omega_1, \Omega_2$  分别表示两个混沌系统的平均频率. 当  $\varepsilon < 0.0083$ ,  $\Delta\omega$  接近于 0, 即两个子系统的平均频率比锁定在 1:1, 这说明两个  $R^{L-ssler}$  系统之间存在相位同步. 当  $\varepsilon > 0.0083$  时, 平均频率差曲线存在小的波动, 这说明两个  $R^{L-ssler}$  振子之间的相位存在差异, 即当  $\varepsilon > 0.0083$  时, 两个  $R^{L-ssler}$  系统之间相位同步消失.

为了揭示混沌系统的相位同步特征, 图 2 给出了非线性耦合的  $R^{L-ssler}$  系统 4 个最大的 Liapunov 指数随耦合参数  $\varepsilon$  变化的曲线. 当  $\varepsilon < 0.00175$  时, 除了一个很小的区域  $\varepsilon \in [0.00158, 0.00172]$  外, 第 3 个 Liapunov 指数很快地变为负数, 且其值非常小; 除了两个很小的区域  $\varepsilon \in [0.0009, 0.0011]$  和  $\varepsilon \in [0.00158, 0.00172]$  外, 第 4 个 Liapunov 指数是负数, 且其值也非常小. 当  $0.00175 < \varepsilon < 0.0083$  时, 第 3 个 Liapunov 指数变为 0, 第 4 个 Liapunov 指数仍然负数, 这说明两个子系统混沌相位同步. 进一步的研究说明: 当  $\varepsilon > 0.0083$  时, 第 3 个 Liapunov 指数变为正的, 两个子系统的平均频率差有明显的波动, 导致两个振子的相位不一致, 即当  $\varepsilon$  增加时, 两个子系统的相位由相位同步向不同步转化.

耦合系统的混沌相位动力学也可以从扩散云得到证实(见图 3, 图 4). 当  $\varepsilon = 0.0002$ , 相点分布在吸引子的周围(见图 3), 然而随着  $\varepsilon$  的增加, 相点几乎分布到相平面某个确定的矩形区域(见图 4), 这说明两个振子的相位差随着时间的增加趋于无穷, 这也证实了两个子系统相位不同步. 总之, 随着非线性耦合力  $\varepsilon$  的增加, 耦合系统的同步效应被减弱.

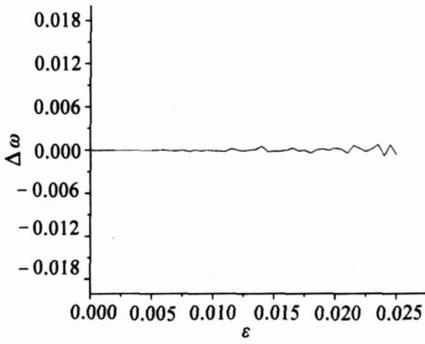


图 1 平均频率差

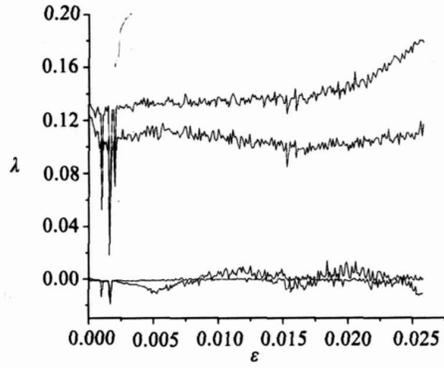


图 2 4 个最大的 Liapunov 指数

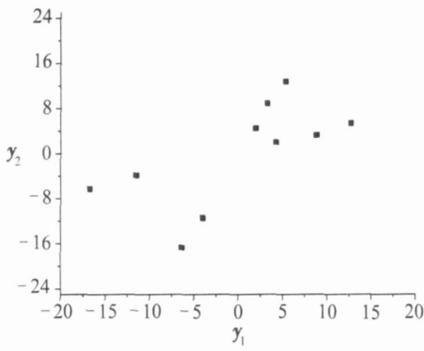


图 3 相位同步  $\varepsilon = 0.002$

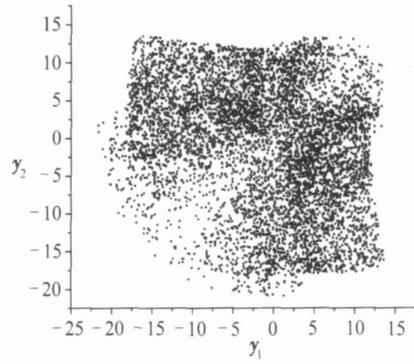


图 4 不同步  $\varepsilon = 0.01$

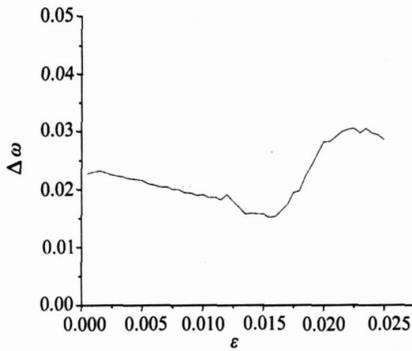


图 5 平均频率差

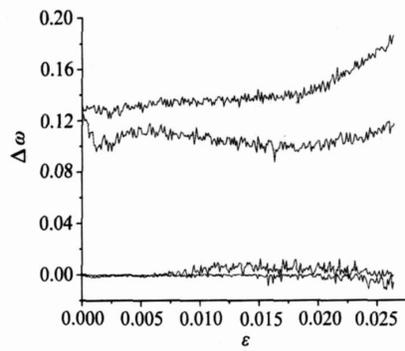


图 6 4 个最大的 Liapunov 指数

然而,如果两个子系统的固有频率之间存在着小的差异,则可以得到不同的相位动力学。对于调谐参数  $\sigma = 0.02$ ,非线性耦合系统的两个子系统的平均频率随耦合力  $\varepsilon$  变化关系见图 5。从图 5 可以看出:当  $\varepsilon < 0.0155$  时,两个子系统的平均频率差逐步减少;当  $\varepsilon > 0.0155$  时,两个子系统的平均频率差突然增加,这与固有频率比为严格的 1:1 内共振情形完全不同,这说明调谐参数  $\sigma$  对混沌结构的影响非常大。

对于两个子系统的固有频率比为严格 1:1 和近似 1:1 内共振的不同相位动力学,可以通过两个子系统之间的相互作用来解释。对于严格 1:1 内共振情形,具有相同的固有频率的两个子系统之间的相互作用在某些耦合区域引起了平均频率的比率锁定,而对于具有不同的固

有频率的两个子系统之间的相互作用, 在整个耦合区域上导致了两个子系统的平均频率的分离或吸引.

混沌相位同步也可以从 Liapunov 指数的变化来解释, 非线性耦合混沌系统的 4 个最大的 Liapunov 指数随着非线性耦合力的变化曲线见图 6. 从图 6 可以发现: 随着非线性耦合力的增加, 耦合系统总有两个正的 Liapunov 指数, 另两个 Liapunov 指数总在 0.0 的较小区域里变化, 且没有明显的变化, 这证实了非线性耦合振子的相位不同步现象.

非线性耦合振子的相位不同步现象也可以扩散云来证实(见图 7~ 9). 相点几乎分布在相平面  $(y_1, y_2)$  的某个确定的矩形区域里, 说明两个振子的相位差随着时间的变化趋于无穷, 说明了两个振子之间的相位是不同步的.

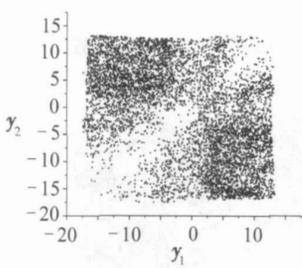


图 7 不同步  $\epsilon = 0.003$

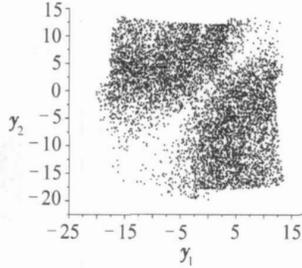


图 8 不同步  $\epsilon = 0.008$

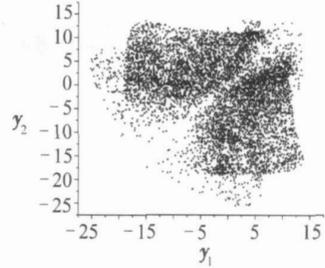


图 9 不同步  $\epsilon = 0.014$

## 2 1: 2 内共振的相位同步

对于两个子系统的固有频率比为严格的 1: 2 情形, 两个子系统平均频率的关系见图 10, 其中  $\Delta\omega = 2\Omega_1 - \Omega_2$ , 而  $\Omega_1, \Omega_2$  分别表示非线性耦合的两个子系统的平均频率. 当  $\epsilon < 0.0083$  时, 两个子系统的平均频率差在  $y = -0.03$  的较小的邻域内, 这说明两个子系统不完全相位同步. 这是因为两个子系统的平均频率有小的差异, 这种情形与严格的 1: 1 的内共振情形完全不同, 尽管两者都可以实现相位同步. 在严格的 1: 2 的内共振情形, 耦合项引起了两个子系统平均频率的分离(与初始的固有频率的差相比). 当  $\epsilon$  增加时, 两个子系统之间更强的相互作用导致了两个子系统的平均频率产生了较大的分离或吸引, 这一点也可以从图 10 中的曲线得到证实, 即  $\epsilon \in [0.0083, 0.0125]$  对应的曲线. 当  $\epsilon > 0.0125$  时, 两个子系统的平均频率差  $\Delta\omega$  极剧下降, 即当非线性耦合力  $\epsilon > 0.0125$  时, 两个子系统的相位不可能达到一致.

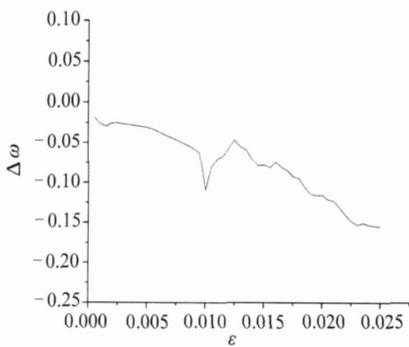


图 10 平均频率差

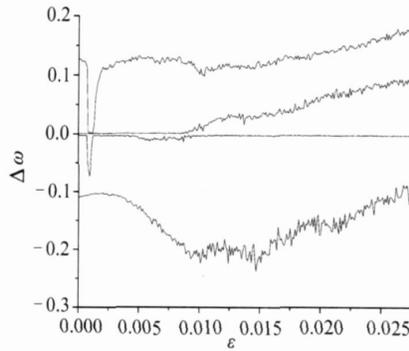


图 11 4 个最大的 Liapunov 指数

具有严格的 1: 1 和 1: 2 内共振的情形, 其同步现象是不同的, 这可以从两个子系统之间的

相互作用得到解释. 对于 1:1 情形, 两个子系统具有相同的固有频率, 引起了两个子系统的平均频率比的完全锁定; 然而对于 1:2 情形, 两个子系统的相互作用, 导致了两个子系统的平均频率的吸引或分离.

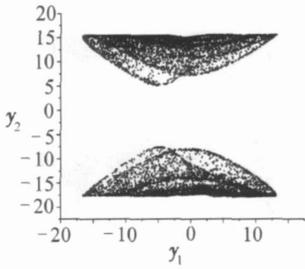


图 12 不完全相位同步  $\epsilon = 0.002$

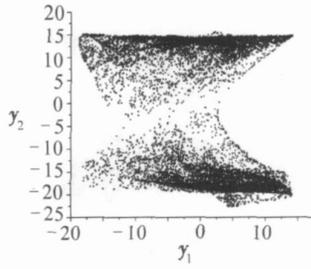


图 13 不同步  $\epsilon = 0.014$

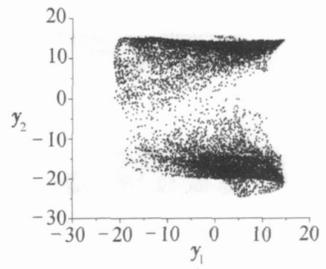


图 14 不同步  $\epsilon = 0.02$

我们也可以从 Liapunov 指数的变化证实上面的结果, 非线性耦合系统的 4 个最大的 Liapunov 指数, 随着非线性耦合力的变化曲线见图 11. 从图 11 可以看出: 当  $\epsilon < 0.0083$  时, 除了一个小区间  $\epsilon \in [0.0008, 0.0011]$  外, 几乎总存在一个正的、一个 0 和两个负的 Liapunov 指数. 第 1 个负指数非常的小, 导致两个子系统不完全相位同步. 进一步当  $\epsilon > 0.0083$  时, 零指数变为正的, 两个最初的负指数中的 1 个指数变为 0, 这说明耦合系统从简单混沌状态变化到超混沌状态, 两个子系统的相位不可能完全锁定.

这个现象也可以从扩散云来证实. 当耦合参数  $\epsilon < 0.0083$  时, 相点集中在混沌吸引子上 (见图 12), 当耦合力  $\epsilon$  增加时, 相点逐步地分散到吸引子的周围 (见图 13), 最终分散到相平面的某个确定的区域 (见图 14), 这说明非线性耦合的两个振子的相位差随着时间的变化趋于无穷, 这也说明了两个振子的相位是不一致的. 总之随着非线性耦合力的增加, 耦合系统的相位动力学由不完全相位同步状态向不同步状态转化.

对于固有频率比锁定在 1:2 附近的情形, 我们同样可以得到随着参数  $\epsilon$  变化的两个子系统相位同步. 固定调谐参数  $\sigma = 0.02$ , 两个子系统的平均频率差随参数  $\epsilon$  变化曲线如图 15 所示. 当  $\epsilon < 0.012$  时, 两个子系统的平均频率差在  $y = 0.0$  的一个小区域内变化, 即当  $\epsilon < 0.012$  时, 两个子系统不完全相位同步, 因为两个子系统的平均频率有小的差异. 当  $\epsilon > 0.012$  时, 两个子系统的平均频率差急剧减少, 说明两个子系统不可能相位同步.

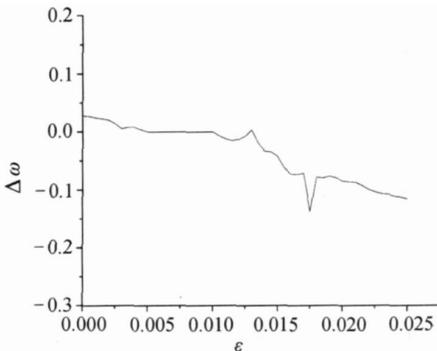


图 15 平均频率差

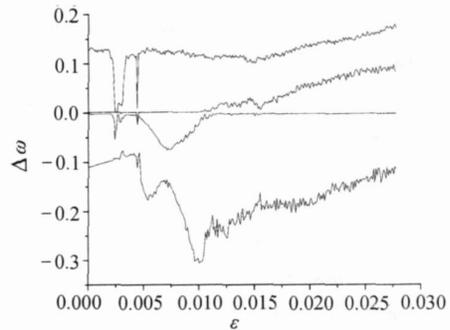


图 16 4 个最大的 Liapunov 指数

非线性耦合系统的 4 个最大的 Liapunov 指数随耦合力变化的曲线, 如图 16 所示. 当  $\epsilon < 0.012$  时, 耦合系统几乎总存在一个正的, 一个 0 和两个负 Liapunov 指数. 进一步研究发现, 当

0.0019 <  $\varepsilon$  < 0.0045 时, 正指数和第 1 个负指数有很大的波动. 当  $\varepsilon > 0.012$  时, 零指数变为正的, 第 1 个负指数变为 0, 且 Liapunov 指数的变化有明显的波动, 这说明耦合系统由简单混沌状态向超混沌状态转化. 两个子系统的相位不可能锁定.

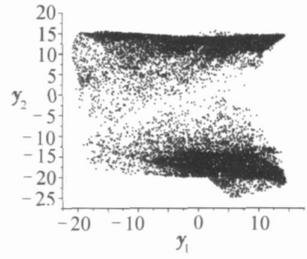
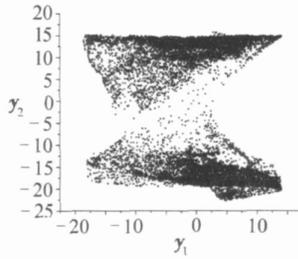
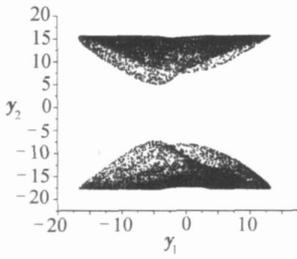
图 17 不完全相位同步  $\varepsilon = 0.002$ 图 18 不同步  $\varepsilon = 0.015$ 图 19 不同步  $\varepsilon = 0.02$ 

图 17~ 19 给出了耦合系统的扩散云, 从扩散云图可以得到: 随着耦合力  $\varepsilon$  的增加, 相点逐步分散, 最终几乎扩散到整个混沌吸引子上, 说明耦合系统的相位动力学由不完全相位同步向不同步状态转化.

### 3 结 论

非线性耦合的两个子系统随着耦合力的变化, 可以得到不同比率的混沌相位同步. 讨论了非线性耦合的两个子系统的固有频率的调谐参数  $\sigma$  对相位同步的影响, 揭示由相位同步向不同步转化的过程中可能涉及到不同的相位动力学, 即混沌相位同步被非线性耦合力削弱了. 与主共振相比, 具有高阶内共振的两个子系统平均频率差有较大波动, 且参与了耦合系统的相位调谐. 相位同步的产生与混沌吸引子的结构有关, 这可以从 Liapunov 指数的变化得到证实. 非线性耦合力对相位动力学的影响, 尤其对同步的影响, 与线性耦合相比是完全不同的, 线性耦合增强了相位同步的效应, 而非线性耦合引起了两个子系统的平均频率不一致, 最终导致两个子系统的相位不一致, 即两个子系统处于不同步状态.

#### [参 考 文 献]

- [1] Pecora L M, Carroll T L. Synchronization in chaotic systems[J]. Physical Review Letter, 1990, **64**(8): 821-824.
- [2] Zhang S H, Shen K. Generalized synchronization of chaos in erbium-doped dual-ring lasers[J]. Chinese Physics, 2002, **11**(9): 894-899.
- [3] Zhi L, Si S J. Global synchronization of Chua's chaotic delay network by using linear matrix inequality[J]. Chinese Physics, 2004, **13**(8): 1221-1225.
- [4] Kiss I Z, Zhai Y M, Hudson J L. Collective dynamics of chaotic chemical oscillators and law of large numbers[J]. Physical Review Letter, 2002, **88**(23): 238301.
- [5] Shi X, Lu Q S. Firing patterns and complete synchronization of coupled Hindmarsh-Rose neurons [J]. Chinese Physics, 2005, **14**(1): 77-85.
- [6] Wang J, Deng B, Tsang K M. Chaotic synchronization of neurons coupled with gap junction under external electrical stimulation[J]. Chaos, Soliton & Fractals, 2004, **22**(2): 469-476.
- [7] Shuai J W, Durand D M. Phase synchronization in two coupled chaotic neurons[J]. Physics Letters A, 1999, **264**(4): 289-297.
- [8] Samuel B. Stability analysis for the synchronization of chaotic systems with different order: applica-

- tion to secure communication[J]. *Physics Letters A*, 2004, **326**(1): 102-113.
- [9] Kim C M, Kye W H, Rim S, et al. Communication key using delay times in time-delayed chaos synchronization[J]. *Physics Letters A*, 2004, **333**(3/4): 235-240.
- [10] Gonzalez-Miranda J M. Communications by synchronization of spatially symmetric chaotic systems [J]. *Physics Letters A*, 1999, **251**(2): 115-120.
- [11] Rulkov N F, Sushchik M M, Tsimring L S, et al. Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems[J]. *Physical Review E*, 1995, **51**(2): 980-994.
- [12] Winterhalder M, Schelter B, Kurths J, et al. Sensitivity and specificity of coherence and phase synchronization analysis[J]. *Physics Letters A*, 2006, **356**(1): 26-34.
- [13] Li X. Phase synchronization in complex networks with decayed long-range interactions[J]. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2006, **223**(2): 242-247.
- [14] Alariste F R, Mateos J L. Phase synchronization in tilted deterministic ratchets[J]. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 2006, **372**(2): 263-271.
- [15] Gabor D. Theory of communication[J]. *J IEE (London)*, Part III, 1946, **93**(26): 429-457.
- [16] Pikovsky A, Roseblum M G, Osipov G, et al. Phase synchronization of chaotic oscillators by external driving[J]. *Physica D*, 1997, **104**(3): 219-238.
- [17] Pikovsky A. Phase synchronization of chaotic oscillators by a periodic external field[J]. *Journal of Communications Technology Electronics*, 1985, **30**(3): 1970-1974.
- [18] Pikovsky A, Roseblum M G, Osipov G, et al. Phase synchronization in regular and chaotic systems[J]. *Journal of Bifurcation and Chaos*, 2000, **10**(10): 2291-2305.
- [19] Landa P S, Roseblum M G. Synchronization and chaotization of oscillations in coupled self-oscillating systems[J]. *Application Mechanics Review*, 1993, **46**(7): 414-426.
- [20] Zhang Z G, Hu G. Generalized synchronization versus phase synchronization[J]. *Physical Review E*, 2000, **62**(6): 7882-7885.
- [21] Lv J H, Zhou T S, Zhang S C. Chaos synchronization between linearly coupled chaotic systems[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2002, **14**(4): 529-541.
- [22] Landa P S, Perminov S M. Synchronization of the chaotic oscillations in the Mackey-Glass system [J]. *Radiofizika*, 1987, **30**(3): 437-439.
- [23] Coombes S. Phase locking in the networks of synaptically coupled McKean relaxation oscillators[J]. *Physica D*, 2001, **160**(3): 173-188.
- [24] Palus M. Detecting phase synchronization in noisy systems[J]. *Physics Letters A*, 1997, **235**(4): 341-351.
- [25] Bi Q. Bifurcation of traveling wave solutions from KdV equation to Camassa-Holm equation[J]. *Physics Letters A*, 2005, **344**(5): 361-368.
- [26] Bi Q. Dynamical analysis of two coupled parametrically excited Van der Pol oscillators[J]. *Journal of Non-Linear Mechanics*, 2004, **39**(1): 33-54.
- [27] Bi Q. Dynamics and modulated chaos of coupled oscillators[J]. *Journal of Bifurcation and Chaos*, 2004, **14**(1): 337-346.

# Phase Synchronization Between Nonlinearly Coupled Rössler Systems

LIU Yong<sup>1,2</sup>, BI Qin-sheng<sup>1</sup>, CHEN Yu-shu<sup>3</sup>

(1. Faculty of Science, Jiangsu University, Zhenjiang,  
Jiangsu 212013, P. R. China;

2. School of Mathematical Science, Yancheng Teachers College, Yancheng,  
Jiangsu 224002, P. R. China;

3. Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, P. R. China)

**Abstract:** Phase synchronization between nonlinearly coupled systems with  $1:1$  and  $1:2$  resonances is investigated. By introducing the conception of phase for a chaotic motion, it demonstrates that for the different internal resonances, with relatively small parameter  $\epsilon$ , both differences between the mean frequencies of the two sub-oscillators approach zero, implying phase synchronization can be achieved for weak interaction between the two oscillators. With the increase of the coupling strength, fluctuations of the frequency difference can be observed, and for the primary resonance, the amplitudes of the fluctuations of the difference seem much smaller compared with the case with frequency ratio  $1:2$ , even with weak coupling strength. Unlike the enhance effect on the synchronization for linear coupling, the increase of nonlinear coupling strength results in the transition from phase synchronization to non-synchronized state. Further investigation reveals that the states from phase synchronization to non-synchronization are related to the critical changes of the Liapunov exponents, which can also be explained by the diffuse clouds.

**Key words:** phase synchronization; Rössler oscillator; nonlinearly coupled; Liapunov exponent